ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 1999. Серия 2. Том 6, № 1, 43–60

УДК 519.865.3

НОВЫЙ ВАРИАНТ ВЕНГЕРСКОГО МЕТОДА ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА*)

В. И. Шмырёв

Проблема численного отыскания состояния равновесия в линейной модели обмена в принципе решается методом из [7], сводящим дело к некоторой задаче линейной дополнительности [8]. Однако при этом слабо учитывается специфика исходной модели и возникающая задача линейной дополнительности имеет сравнительно большую размерность — порядка произведения числа участников на число продуктов модели.

Более экономные процедуры нахождения равновесного состояния в линейной модели обмена были получены на основе применения идей полиэдральной комплементарности [4, 5]. Учитывая тот факт, что в этих рассмотрениях в качестве вспомогательной задачи фигурирует классическая транспортная задача линейного программирования, в [6] для модели с фиксированными бюджетами был предложен метод, использующий идеи венгерского алгоритма решения транспортных задач [3]. При этом в доказательстве конечности процесса существенно использовался факт потенциальности рассматриваемых кусочно-постоянных отображений.

В данной работе излагается новый вариант такого алгоритма. В отличие от алгоритма [6] новый процесс характеризуется монотонным возрастанием вспомогательной функции, задающей текущее значение величины максимального потока, как это имеет место в обычном венгерском методе для транспортных задач [3].

§ 1. Предварительные построения

Пусть $I = \{1, \dots, m\}$ — множество номеров участников модели, а $J = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество номеров продуктов (товаров), которые участвуют в обмене. Предполагается, что каждый участник располагает определённым количеством каждого продукта. Пусть $d^i = (d^i_1, \dots, d^i_n)$ — вектор, j-я компонента которого равна количеству j-го

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97–01–01076, 96–15–98656).

продукта у i-го участника, $1 \leqslant j \leqslant n$. Относительная ценность различных наборов товаров для каждого участника своя и задается некоторой линейной функцией. Пусть $c^i = (c_1^i, \ldots, c_n^i)$ — вектор коэффициентов такой (целевой) функции для i-го участника. Предполагается, что все векторы c^i и d^i неотрицательны, т. е. $c^i, d^i \in R_+^n$. Если $p = (p_1, \ldots, p_n) \in R_+^n$ — некоторый вектор цен на товары, то участник с номером i может получить от продажи своего набора товаров d^i доход $(p, d^i) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j d_j^i$, после чего он может приобрести набор товаров $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$, который оценится для него величиной (c^i, x^i). Это приводит к следующей задаче i-го участника:
максимизировать

$$(c^i, x^i) \tag{1.1}$$

при условиях

$$(p, x^i) \leqslant (p, d^i), \tag{1.2}$$

$$x^i \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Вектор цен $\hat{p}$ называется *равновесным*, если среди оптимальных решений задач участников имеются такие $x^i = \hat{x}^i$, что выполнено условие баланса товаров

$$\sum_{i \in I} x^i = \sum_{i \in I} d^i. \tag{1.4}$$

Это означает, что все планы $\hat{x}^i$ закупок участников действительно могут быть удовлетворены. Равновесный вектор цен $\hat{p}$ вместе с соответствующими $\hat{x}^i$, $i \in I$, образуют *состояние равновесия*. Ясно, что для $x^i = \hat{x}^i$ и $p = \hat{p}$ неравенства (1.2) выполняются как равенства.

Отметим, что неравенства (1.2) относительно p являются однородными. Поэтому вектор цен интересует нас с точностью до положительного множителя, а значит, на p можно наложить дополнительное условие нормировки, считая, например, что $\sum\limits_{j \in J} p_j = 1$, т. е. ограничиваясь рассмотрением векторов цен p из *симплекса цен* $\sigma = \left\{ p \in R_+^n \;\middle|\; \sum\limits_{j \in J} p_j = 1 \right\}$.

Естественно предполагать, что все векторы c^i отличны от нуля и при каждом $j \in J$ выполняется условие

$$\max_{i \in I} c_j^i > 0. \tag{1.5}$$

Это означает, что любой товар представляет интерес хотя бы для одного участника. При выполнении этого предположения непосредственно из определения следует, что все компоненты равновесного вектора цен

должны быть строго положительны (ибо в противном случае целевая функция какой-то из задач (1.1)–(1.3) не ограничена сверху на множестве допустимых решений этой задачи).

Без ограничения общности можно считать, что все векторы d^i также отличны от нуля и

$$\sum_{i\in I} d_j^i = 1, \quad j \in J. \tag{1.6}$$

(Последнее обеспечивается выбором соответствующих единиц измерения товаров.)

Необходимое и достаточное условие существования равновесных состояний в описанной модели состоит в отсутствии собственного подмножества участников $S \subset I$, вместе обладающих совокупностью товаров из множества $G \subset J$, но помимо этого обладающих и какими-то прочими товарами, не представляющими для них интереса:

$$\sum_{i\in S} d_j^i = 1, \quad j \in G, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j\in J\setminus G} \sum_{i\in S} d_j^i > 0, \tag{1.8}$$

$$c_j^i = 0, \quad j \in J \setminus G, i \in S. \tag{1.9}$$

Если это условие не выполняется (т. е. указанные подмножества S и G существуют), то говорят, что модель *сводима*.

Важным классом несводимых моделей являются так называемые *модели с фиксированными бюджетами*. Это такие модели, в которых каждый участник обладает определенной долей каждого товара: $d^i = \lambda_i e$, где $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$. В этом случае при $p \in \sigma$ имеем

$$(p, d^i) = \lambda_i(p, e) = \lambda_i,$$

т. е. количество денег, получаемых i-м участником от продажи имеющихся у него товаров, не зависит от цен. Этим и объясняется используемая терминология.

Для модели с фиксированными бюджетами проблема отыскания равновесия сводится ([1, с. 355]) к задаче максимизации функции

$$\Psi(x^1, \ldots, x^m) = \prod_{i\in I} (c^i, x^i)^{\lambda_i}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x^i = e,$$

$$x^i \geqslant 0, \quad i \in I,$$

(здесь, как и выше, $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$). Однако автору не известны конечные процедуры, основанные на использовании этой задачи.

В основу подхода [4, 5], в значительной степени позволившего прояснить качественную сторону проблемы и разработать достаточно эффективные процедуры отыскания равновесных состояний, положена другая экстремальная задача, порождаемая исходной моделью. Это *транспортная задача модели* в следующей формулировке:
максимизировать

$$\sum_{(i,j)\in T} z_{ij} \ln c^i_j \tag{1.10}$$

при условиях

$$\sum_{j\in T_i} z_{ij} = (p, d^i), \quad i \in I, \tag{1.11}$$

$$\sum_{i\in T^j} z_{ij} = p_j, \qquad j \in J, \tag{1.12}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \qquad (i,j) \in T, \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned} T &= \{(i,j) \in I \times J \mid c^i_j > 0\}, \\ T_i &= \{j \in J \mid (i,j) \in T\}, \\ T^j &= \{i \in I \mid (i,j) \in T\}, \end{aligned}$$

а $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор цен из σ, компоненты которого p_j играют роль изменяющихся параметров. Ввиду (1.6) имеем

$$\sum_{j\in J} p_j = \sum_{i\in I} (p, d^i),$$

т. е. при любом p транспортная задача модели сбалансирована. Если $c^i_j > 0$ при всех $(i,j) \in I \times J$, т. е. $T = I \times J$, то из сбалансированности следует и разрешимость этой задачи. Если же среди c^i_j есть нулевые, то в рассматриваемой транспортной задаче появляются запрещённые связи (они отвечают $c^i_j = 0$) и задача, вообще говоря, разрешима не при всех $p \in \sigma$. При этом имеет место следующая

Лемма 1. *Если модель обмена сводима, то при любом $p \in \sigma^\circ$ транспортная задача модели неразрешима (σ° — относительная внутренность симплекса σ).*

Доказательство. Пусть модель обмена сводима и S, G — собственные подмножества соответственно множéств I и J, фигурирующие в определении сводимости, для которых выполняются условия (1.7)–(1.9). Для простоты записи будем предполагать, что все прочие c^i_j, кроме указанных в (1.9), положительны.

Среди ограничений (1.11) и (1.12) присутствуют следующие:

$$\sum_{j\in G} z_{ij} = (p, d^i), \quad i \in S,$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = p_j, \quad j \in G.$$

Просуммируем эти равенства, умножая при этом уравнения первой группы на (-1). В результате получим

$$\sum_{j\in G}\sum_{i\in I\setminus S} z_{ij} = \sum_{j\in G} p_j - \sum_{i\in S}(p, d^i). \tag{1.14}$$

Но ввиду (1.7)

$$\sum_{i\in S}(p, d^i) = \sum_{j\in J} p_j \sum_{i\in S} d^i_j = \sum_{j\in G} p_j + \sum_{j\in J\setminus G}\sum_{i\in S} d^i_j. \tag{1.15}$$

Из (1.8) следует, что хотя бы один элемент d^i_j при $i \in S$ и $j \in J \setminus G$ положителен. Поэтому при любом $p > 0$ из (1.15) следует, что

$$\sum_{i\in S}(p, d^i) > \sum_{j\in G} p_j.$$

Но тогда (1.14) несовместимо с неотрицательностью величин z_{ij} и при таких p транспортная задача модели не имеет допустимых решений. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что если транспортная задача модели при некотором $p \in \sigma^\circ$ обладает допустимыми (а значит, и оптимальными) решениями, то модель несводима и равновесный вектор цен существует. Обратное (т. е. разрешимость транспортной задачи при некоторых $p > 0$ в случае существования равновесия), как уже отмечалось, следует из (1.5).

Таким образом, используя транспортную задачу модели, мы получили признак существования равновесных цен. Теперь сформулируем признак равновесности некоторого вектора $p \in \sigma^\circ$.

Среди всех множеств $\mathscr{B} \subset T$ выделим те, которые обладают свойством: при каждом $i \in I$ множество $\{j \in J \mid (i,j) \in \mathscr{B}\}$ непусто. Эти множества будем называть *i-накрывающими*. Пусть $\mathfrak{R}$ — совокупность всех двойственно-допустимых базисных множеств транспортной задачи модели и их всевозможных i-накрывающих подмножеств. Каждому $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие пару множеств, которые обозначим через $\Omega(\mathscr{B})$ и $\Xi(\mathscr{B})$.

Под $\Omega(\mathscr{B})$ понимается множество таких точек $p \in \sigma$, что совместна система условий (1.11)–(1.13) при дополнительном требовании

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin \mathscr{B}. \tag{1.16}$$

При $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ условия (1.11) и (1.12) вместе с (1.16) однозначно определяют величины $z_{ij} = z_{ij}^{\mathscr{B}}(p)$ как линейные функции от параметров p_j. Следовательно, множество $\Omega(\mathscr{B})$ определяется условием $p \in \sigma$ и системой линейных неравенств

$$z_{ij}^{\mathscr{B}}(p) \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathscr{B} \tag{1.17}$$

вместе с дополнительными условиями совместности системы уравнений (1.11), (1.12), (1.16). Это приводит к линейной системе относительно p_j. Следовательно, $\Omega(\mathscr{B})$ представляет собой выпуклый многогранник. При каждом $p \in \Omega(\mathscr{B})$ величины $z_{ij}^{\mathscr{B}}(p)$ образуют оптимальное решение транспортной задачи модели.

Множество $\Xi(\mathscr{B})$ можно охарактеризовать как совокупность таких $q \in \sigma^\circ$, что множество предпочтительных товаров в задаче i-го участника содержит множество $\{j \in J \mid (i,j) \in \mathscr{B}\}$. Точнее говоря, множество $\Xi(\mathscr{B})$ задаётся условием $q \in \sigma^\circ$ и следующей системой уравнений и неравенств:

$$\frac{c_k^i}{q_k} = \frac{c_j^i}{q_j}, \quad (i,j),(i,k) \in \mathscr{B}, \tag{1.18}$$

$$\frac{c_l^i}{q_l} \leqslant \frac{c_j^i}{q_j}, \quad (i,l) \notin \mathscr{B}, \quad (i,j) \in \mathscr{B}. \tag{1.19}$$

Теорема 1. *Вектор цен $p \in \sigma^\circ$ является равновесным тогда и только тогда, когда имеется множество $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ такое, что $p \in \Omega(\mathscr{B}) \cap \Xi(\mathscr{B})$.*

Доказательство. Пусть $p \in \Omega(\mathscr{B}) \cap \Xi(\mathscr{B})$ при некотором $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$. Покажем, что p — равновесный вектор цен модели. Действительно, так как $p \in \Omega(\mathscr{B})$, то величины z_{ij}, являющиеся решением системы (1.11), (1.12), (1.16), не отрицательны, а векторы x^i с компонентами $x_j^i = z_{ij}/p_j$ являются допустимыми в соответствующих задачах участников. Из $p \in \Xi(\mathscr{B})$ следует, что эти векторы будут оптимальными в этих задачах. Условие же (1.12) с учетом (1.16) означает, что выполняется требуемое условие баланса. Таким образом, p — равновесный вектор цен.

Покажем обратное. Пусть p — равновесный вектор цен. Это означает, что в соответствующих задачах участников найдутся оптимальные векторы x^i, удовлетворяющие условию баланса (1.4). Ясно, что при таких x^i условие (1.2) выполнено как равенство и величины $z_{ij}^\circ = x_j^i p_j$ образуют допустимое решение транспортной задачи модели. Легко видеть, что это решение является оптимальным. Действительно, оптимальность вектора x^i в задаче i-го участника означает, что $x_j^i = 0$ при $j \notin T_i$ и при некотором $y_i > 0$ выполнены неравенства

$$y_i p_j \geqslant c_j^i, \quad j \in T_i, \tag{1.20}$$

$$x_j^i (y_i p_j - c_j^i) = 0, \quad j \in J. \tag{1.21}$$

Но тогда при $u_i^\circ = \ln y_i$ и $v_j^\circ = \ln p_j$ выполняются следующие условия задачи, двойственной к транспортной задаче модели:

$$u_i^\circ + v_j^\circ \geqslant \ln c_j^i, \quad (i,j) \in T. \tag{1.22}$$

При этом из (1.21) следует, что если $z_{ij}^\circ > 0$, то соответствующее неравенство (1.22) выполняется как равенство. Таким образом, выполнены известные условия дополняющей нежесткости и при данном p величины z_{ij}° задают оптимальное решение транспортной задачи модели, а величины u_i° и v_j° — оптимальное решение в соответствующей двойственной задаче. Оптимальное решение $z_{ij} = z_{ij}^\circ$ не обязательно порождается каким-то базисным множеством. Однако всегда можно указать возможно иное оптимальное решение этой же задачи $z_{ij} = z'_{ij}$, порождаемое некоторым допустимым и двойственно допустимым базисным множеством $\mathscr{B}$. При этом $z_{ij} = 0$ для $(i,j) \notin \mathscr{B}$. Сужая множество $\mathscr{B}$ до $\mathscr{B}' = \{(i,j) \in T \mid z'_{ij} > 0\}$, мы не потеряем i-накрываемости, и, значит, $\mathscr{B}' \in \mathfrak{R}$. Ясно также, что $p \in \Omega(\mathscr{B}')$. Из условий дополняющей нежесткости, связывающих оптимальные решения пары двойственных задач линейного программирования, следует

$$u_i^\circ + v_j^\circ - \ln c_j^i = 0, \quad (i,j) \in \mathscr{B}',$$

или

$$y_i p_j = c_j^i, \quad (i,j) \in \mathscr{B}'.$$

С учетом (1.20) это означает, что

$$\frac{c_j^i}{p_j} = \max_{k \in J} \frac{c_k^i}{p_k},$$

а тем самым $p \in \Xi(\mathscr{B}')$. Теорема 1 доказана.

Легко показать, что при любом $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ множества $\Omega(\mathscr{B})$ и $\Xi(\mathscr{B})$ непусты. Рассмотрим, например, множество $\Xi(\mathscr{B})$.

Так как $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ (т. е. $\mathscr{B}$ является i-накрывающим подмножеством некоторого двойственно-допустимого базисного множества), то существуют u_i и v_j такие, что

$$u_i + v_j = \ln c_j^i, \quad (i,j) \in \mathscr{B},$$
$$u_i + v_j \geqslant \ln c_j^i, \quad (i,j) \notin \mathscr{B}.$$

Введем $y_i = e^{u_i}$ и $g_j = e^{v_j}$. Тогда

$$y_i g_j = c_j^i, \quad (i,j) \in \mathscr{B}, \tag{1.23}$$
$$y_i g_k \geqslant c_k^i, \quad (i,k) \notin \mathscr{B}. \tag{1.24}$$

Ввиду i-накрываемости множества $\mathscr{B}$ из (1.23) можно определить все y_i. Подставив их в (1.24), получаем неравенство

$$\frac{c^i_j}{g_j} \geqslant \frac{c^i_k}{g_k} \quad (i,j) \in \mathscr{B}, \quad (i,k) \notin \mathscr{B}.$$

Полагая $p_j = g_j \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n} g_j$, получаем вектор $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Xi(\mathscr{B})$.

Теперь рассмотрим множество $\Omega(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$. Так как из $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \in \mathfrak{R}$ и $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$ следует $\Omega(\mathscr{B}_1) \subset \Omega(\mathscr{B}_2)$, то достаточно показать непустоту множеств $\Omega(\mathscr{B})$, порождаемых минимальными элементами из $\mathfrak{R}$ (в смысле предпорядка, порождаемого отношением включения).

Пусть $\mathscr{B}$ — минимальное i-накрывающее множество из $\mathfrak{R}$. Тогда если $z_{ij} = z^{\mathscr{B}}_{ij}(p)$ образуют решение системы (1.11), (1.12), (1.16), то

$$z^{\mathscr{B}}_{ij}(p) = (p, d^i), \quad (i,j) \in \mathscr{B}, \tag{1.25}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}} z^{\mathscr{B}}_{ij}(p) = p_j. \tag{1.26}$$

Введем множества $I_j = \{i \in I \mid (i,j) \in \mathscr{B}\}$. Ввиду i-накрываемости множества $\mathscr{B}$ каждый $i \in I$ попадает в какое-то множество I_j. Из (1.25) и (1.26) получаем

$$p_j = \sum_{i\in I_j}(p, d^i) \quad \text{при} \quad I_j \neq \varnothing, \tag{1.27}$$

$$p_j = 0 \quad \text{при} \quad I_j = \varnothing.$$

Пусть π — вектор, состоящий из p_j, отвечающих непустым множествам I_j. Тогда (1.27) перепишется в виде

$$\pi = \widetilde{D}\pi, \tag{1.28}$$

где матрица $\widetilde{D}$ неотрицательна и, как легко видеть, ввиду (1.6) обладает свойством: сумма элементов в каждом столбце равна единице. Если ввести вектор $\tilde{e} = (1, \ldots, 1)$ той же размерности, что и π, то это свойство запишется в виде равенства $\tilde{e} = \tilde{e}\widetilde{D}$. Это означает, что единица является максимальным по модулю собственным числом матрицы $\widetilde{D}$, а у системы (1.28) всегда имеется ненулевое неотрицательное решение. Это и дает с точностью до положительного множителя вектор p из $\Omega(\mathscr{B})$ $\Big($возможно, придется разделить на $\sum\limits_{j\in J} p_j$, чтобы добиться выполнения условия $\sum\limits_{j\in J} p_j = 1\Big)$.

§ 2. Метод

Предлагаемая процедура отыскания равновесного состояния базируется на приведенном в предыдущем параграфе признаке равновесия. На очередной итерации рассматривается некоторое множество $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ и точка $q \in \Xi(\mathscr{B})$. Если оказалось, что q принадлежит множеству $\Omega(\mathscr{B})$, то q является равновесным вектором цен. Если же точка q не принадлежит множеству $\Omega(\mathscr{B})$, то осуществляется движение точки q в пределах множества $\Xi(\mathscr{B})$ таким образом, чтобы убывала некоторая мера отдаленности точки q от множества $\Omega(\mathscr{B})$. Если при таком движении точка q попадает на какую-то грань множества $\Xi(\mathscr{B})$, то это порождает новое множество $\Xi(\mathscr{B}') \subset \Xi(\mathscr{B})$ при $\mathscr{B}' \in \mathfrak{R}$ и $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$. Итерация повторяется. В процессе движения точки q в соответствии с некоторым правилом может произойти и расширение множества $\Xi(\mathscr{B})$ до $\Xi(\mathscr{B}'') \supset \Xi(\mathscr{B})$ с $\mathscr{B}'' \subset \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'' \in \mathfrak{R}$.

Такого рода итерации продолжаются до тех пор, пока не получим $q \in \Omega(\mathscr{B})$.

Для подробного описания метода в первую очередь нужно конкретизовать упомянутую меру отдаленности точки $q \in \sigma^0$ от множества $\Omega(\mathscr{B})$. Для этого введем в рассмотрение следующую вспомогательную транспортную задачу:
минимизировать

$$\sum_{i=1}^{m} z_{i0} + \sum_{j=1}^{n} z_{0j} \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}} z_{ij} + z_{i0} = \lambda_i, \quad i = 1\dots m, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in\mathscr{B}} z_{ij} + z_{0j} = q_j, \quad j = 1\dots n, \tag{2.3}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathscr{B}, \tag{2.4}$$

$$z_{i0} \geqslant 0, \quad i = 1\dots m, \tag{2.5}$$

$$z_{0j} \geqslant 0, \quad j = 1\dots n. \tag{2.6}$$

Известно, что эту задачу можно свести к задаче о максимальном потоке. Подробно это описано в [6]. Отметим лишь, что такое сведение осуществляется введением дополнительных переменных $v_{i0} = \lambda_i - z_{i0}$ и $v_{0j} = q_j - z_{0j}$, которые, как легко убедиться, принимают лишь неотрицательные значения и связаны соотношением

$$\sum_{i\in I} v_{i0} = \sum_{j\in J} v_{0j}. \tag{2.7}$$

Пусть v_0 — общее значение левой и правой частей в равенстве (2.7). Тогда для функции (2.1) имеем

$$\sum_{i\in I} z_{i0} + \sum_{j\in J} z_{0j} = \sum_{i\in I} \lambda_i + \sum_{j\in J} q_j - \sum_{i\in I} v_{i0} - \sum_{j\in J} v_{0j} = 2 - 2v_0. \tag{2.8}$$

В результате для задачи (2.1)–(2.6) получаем следующую эквивалентную ей задачу:
максимизировать

$$v_0 \tag{2.9}$$

при условиях

$$-\sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}} z_{ij} + v_{i0} = 0, \quad i \in I, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in\mathscr{B}} z_{ij} - v_{0j} = 0, \quad j \in J, \tag{2.11}$$

$$-\sum_{i\in I} v_{i0} + v_0 = 0, \tag{2.12}$$

$$\sum_{j\in J} v_{0j} - v_0 = 0, \tag{2.13}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathscr{B}, \tag{2.14}$$

$$0 \leqslant v_{0j} \leqslant q_j, \quad j \in J, \tag{2.15}$$

$$0 \leqslant v_{i0} \leqslant \lambda_i, \quad i \in I. \tag{2.16}$$

Это и есть задача, которая позволяет судить об отдаленности точки q от множества $\Omega(\mathscr{B})$. Оптимальное значение целевой функции этой задачи будет зависеть от задаваемой точки q. Обозначим его через $v_0^*(q)$. Легко видеть, что $0 \leqslant v_0^*(q) \leqslant 1$. Если $v_0^*(q) = 1$, то это означает, что в оптимальном решении задачи (2.1)–(2.6) все z_{0j} и z_{i0} равны нулю, а значит, $q \in \Omega(\mathscr{B})$. Если же $v_0^*(q) < 1$, то $q \notin \Omega(\mathscr{B})$ и величина $1 - v_0^*(q)$ характеризует меру удаленности q от $\Omega(\mathscr{B})$.

Для удобства дальнейшего изложения каждому множеству $\mathscr{B} \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие граф $\Gamma(\mathscr{B})$ с множеством вершин $V = I \cup \{m + j \mid j \in J\}$ и множеством дуг $U = \{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathscr{B}\}$. С целью интерпретации задачи (2.9)–(2.16) в виде задачи о максимальном потоке расширим граф $\Gamma(\mathscr{B})$ до графа $\overline{\Gamma}(\mathscr{B})$, заменяя множества V и U на $\overline{V}$, $\overline{U}$ следующим образом. Положим $\overline{V} = V \cup \{0, m+n+1\}$, а $\overline{U}$ получаем из U, пополняя его дугами вида

1) $(0, i)$, $i \in I$, — дуги соответствуют переменным v_{i0};
2) $(m+j, m+n+1)$, $j \in J$, — дуги соответствуют переменным v_{0j};
3) $(m+n+1, 0)$ — дуга соответствует переменной v_0.

Задача (2.9)–(2.16) является задачей о максимальном потоке на графе $\overline{\Gamma}(\mathscr{B})$ из вершины 0 в вершину $m+n+1$.

Вернемся к описанию предлагаемого метода нахождения равновесия в рассматриваемой модели обмена. Пусть к началу $(k+1)$-го шага имеется некоторое множество $\mathscr{B}_k \in \mathfrak{R}$ и точка $q^k \in \Xi(\mathscr{B}_k)$. Для проверки равновесности вектора цен q^k решаем задачу о максимальном потоке (2.9)–(2.16) при $q = q^k$. Предполагается, что для решения этой задачи используется метод деревьев (см. [2]). При этом будет получен оптимальный граф-дерево, порождаемый некоторым оптимальным базисным множеством $\mathscr{M}_k$. Обозначим этот граф через $\overline{\Gamma}(\mathscr{M}_k)$. Его дуги являются также дугами и в графе $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_k)$. Если из $\overline{\Gamma}(\mathscr{M}_k)$ удалить дугу $(m+n+1, 0)$, то возникнут две компоненты связности. Пусть X и $\overline{X}$ — множества вершин этих компонент; при этом $0 \in X$ и $(m+n+1) \in \overline{X}$.

Ввиду оптимальности базисного множества $\mathscr{M}_k$ в графе $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ нет дуг вида $(i, m+j)$, ведущих из X в $\overline{X}$. Множество таких дуг будем обозначать через $(X, \overline{X})$. Однако дуги такого вида, ведущие из $\overline{X}$ в X, могут присутствовать в $\Gamma(\mathscr{B}_k)$, но при этом полученные оптимальные значения соответствующих переменных z_{ij}^k в задаче о максимальном потоке должны равняться нулю. Мы получили бы то же самое оптимальное базисное множество $\mathscr{M}_k$ и те же оптимальные значения z_{ij}^k, решая задачу о максимальном потоке, если предварительно исключили бы из $\mathscr{B}_k$ связи (i,j), соответствующие дугам $(i, m+j)$ из $(\overline{X}, X) = \{(i, m+j) \mid i \in \overline{X}, (m+j) \in X\}$.

Будем считать, что такая процедура согласования множества $\mathscr{B}_k$ с точкой q^k уже проделана.

Пусть $v_0^*(q^k)$ — оптимальное значение величины потока в задаче (2.9)–(2.16) при $q = q^k$ и $v_0^*(q^k) < 1$. Как уже отмечалось, это означает, что $q^k \notin \Omega(\mathscr{B}_k)$ и, следовательно, q^k не является равновесным вектором цен. Согласно ранее намеченной схеме нужно перемещать точку q, отправляясь от точки q^k в пределах множества $\Xi(\mathscr{B}_k)$ так, чтобы значение $v_0^*(q)$ возрастало. Для определения направления такого перемещения поступаем следующим образом.

Пусть τ — число компонент связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$, а множество V_ν вершин, попадающих в ν-ю компоненту связности, задается посредством таких множеств $I_\nu \subset I$ и $J_\nu \subset J$, что $V_\nu = I_\nu \cup \{m+j \mid j \in J_\nu\}$.

Определим точку $p = r^k \in \sigma^\circ$, решая следующую систему уравнений:

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1 \ldots \tau, \tag{2.17}$$

$$\frac{p_j}{c_j^i} = \frac{p_l}{c_l^i}, \quad (i,j), (i,l) \in \mathscr{B}_k. \tag{2.18}$$

Легко видеть, что эта система имеет единственное решение. В самом деле, если в какой-то компоненте связности имеется лишь одна вершина вида $m + j_0$, (т. е. все дуги этой компоненты имеют вид $(i, m + j_0)$), то $r^k_{j_0}$ однозначно определяется из соответствующего уравнения из (2.17). Не исключено, что при этом $(m + j_0)$ — единственная вершина компоненты, т. е. $I_\nu = \varnothing$. В этом случае $r^k_{j_0} = 0$. Если же в рассматриваемой компоненте имеется более одной вершины вида $m + j$, $j \in J$, то соответствующие r^k_j определяются из (2.18) с точностью до некоторого множителя пропорциональности, который, в свою очередь, однозначно определяется из (2.17).

Таким образом, точка r^k определяется из (2.17) и (2.18) единственным образом. Она и задает направление смещения точки q:

$$q(t) = q^k + t(r^k - q^k). \tag{2.19}$$

Увеличивая t от значения $t = 0$, будем следить за выполнением двух условий:

(а) точка $q(t)$ не покидает множества $\Xi(\mathscr{B}_k)$,

(б) не нарушается условие согласования множества $\mathscr{B}_k$ с точкой $q(t)$, т. е. в $\mathscr{B}_k$ нет связей вида (i, j) таких, что соответствующие дуги $(i, m+j)$ принадлежат множеству $(\overline{X}, X)$, порождаемому текущим оптимальным базисным множеством задачи (2.9)–(2.16) при $q = q(t)$.

Проверка обоих условий сводится к анализу систем линейных неравенств. Условие (а), т. е. условие $q(t) \in \Xi(\mathscr{B}_k)$, равносильно системе

$$\frac{c^i_j}{q_j(t)} \geqslant \frac{c^i_l}{q_l(t)}, \quad (i, j) \in \mathscr{B}_k, \quad (i, l) \notin \mathscr{B}_k.$$

Это дает некоторую систему неравенств относительно t.

Условие (б) приводит к параметрической транспортной задаче, в которой от параметра t зависят правые части системы уравнений. Для соответствующей задачи (2.5)–(2.16) о максимальном потоке мы получим зависящие от параметра t ограничения на пропускную способность по дугам вида $(m + j, m + n + 1)$. Исследование такой задачи легко осуществить по известной процедуре параметрического линейного программирования. Более подробно это делается следующим образом.

Имея оптимальное базисное множество задачи (2.9)–(2.16) при некотором значении параметра t, мы получаем однозначно значения базисных переменных z_{ij}, v_{i0}, v_{0j} как линейные функции этого параметра. Требование неотрицательности этих переменных, а также ограничения сверху на v_{i0} и v_{0j} приводят к линейной системе неравенств относительно t. Интервал совместности этой системы укажет границы изменения t,

в которых имеющееся базисное множество остается оптимальным. Смещение t за любую из этих границ (нас интересует граница сверху) приводит к изменению оптимального базисного множества. Из базисных переменных исключается та, для которой условие неотрицательности или ограничение сверху оказалось лимитирующим при определении рассматриваемой границы интервала оптимальности базиса. Вводимая переменная определится по правилам двойственного метода последовательного улучшения.

Для того чтобы гарантировать конечность процедуры параметрического программирования, считаем выполненным известное условие двойственной невырожденности транспортной задачи (1.10)–(1.13). В данном случае это условие можно сформулировать в следующем виде: для любого вектора цен $p \in \sigma^0$ и произвольных величин $y_i > 0$, $i \in I$, удовлетворяющих неравенствам

$$y_i p_j \geqslant c_j^i, \quad (i,j) \in T,$$

число неравенств, выполняющихся как равенства, не превосходит $m + n - 1$.

Вернемся к описанию предлагаемого метода. Следует отметить, что упомянутое условие согласования множества $\mathscr{B}_k$ с изменяющейся точкой $q(t)$ очевидным образом не нарушается в пределах интервала оптимальности текущего базисного множества $\mathscr{M}_k$. Поэтому, увеличивая t от значения $t = 0$, найдём t^* как максимальное значение t, при котором $q(t) \in \Xi(\mathscr{B}_k)$ и сохраняется оптимальность текущего базисного множества в задаче о максимальном потоке. В связи с этим различаем два случая.

(i) Дальнейшему увеличению t препятствует условие $q(t) \in \Xi(\mathscr{B}_k)$. В этом случае в дополнение к связям $(i,j) \in \mathscr{B}_k$ при $t = t^*$ появляются новые «рентабельные» связи $(i,l) \in T$, на которых реализуется

$$\max_l \frac{c_l^i}{q_l(t)}.$$

Пополняя всеми такими парами (i,l) множество $\mathscr{B}_k$, получаем множество $\mathscr{B}_{k+1}$. После этого следует досчитать задачу о максимальном потоке с множеством $\mathscr{B}_{k+1}$ и в случае необходимости провести корректировку этого множества с целью его согласования с точкой $q(t^*) = q^{k+1}$.

(ii) Лимитирующим фактором при определении t^* является оптимальность текущего базисного множества $\mathscr{M}_k$. В этом случае, выполняя итерацию двойственного метода последовательного улучшения, переходим к новому базисному множеству $\mathscr{M}_{k+1}$, что может повлечь за собой изменение $\mathscr{B}_k$ (а значит, и точки r^k) с целью его согласования с точкой $q^{k+1} = q(t^*)$.

§ 3. Монотонность процесса

Пусть $\mathscr{M}_k$ — оптимальное базисное множество в задаче (2.9)–(2.16) при $q = q^k$ и $\mathscr{B} = \mathscr{B}_k$. Как уже отмечалось выше, удаление из графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ дуги $(m+n+1, 0)$ приводит к возникновению двух компонент связности.

Пусть, как и прежде, X и $\overline{X}$ — множества вершин этих компонент и при этом $0 \in X$, $m+n+1 \in \overline{X}$

Лемма 2. *Если в множестве $\mathscr{B}_k$ нет связей (i,j) таких, что дуги $(i, m+j)$ ведут из $\overline{X}$ в X, то смещение точки q в направлении точки $r^k = r(\mathscr{B}_k)$ (в пределах оптимальности множества $\mathscr{M}_k$) ведет к возрастанию потока $v_0^*(q)$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что любая компонента связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ целиком содержится либо в (X, X), либо в $(\overline{X}, \overline{X})$. В самом деле, в $(\overline{X}, X)$ нет дуг вида $(i, m+j)$, а в $(X, \overline{X})$ эти дуги также отсутствуют, ибо ввиду оптимальности базисного множества $\mathscr{M}_k$ в $(X, \overline{X})$ содержатся лишь насыщенные дуги, т. е. те дуги, по которым величина потока совпадает с их пропускной способностью (с ограничением сверху), а для дуг вида $(i, m+j)$ нет ограничения на пропускную способность и, значит, они не могут быть насыщенными. Таким образом, все дуги любой компоненты связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ содержатся либо в (X, X), либо в $(\overline{X}, \overline{X})$.

Теперь покажем, что если ν-я компонента связности такова, что выполняется неравенство $\sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i > \sum\limits_{j \in J_\nu} q_j^k$, то эта компонента попадает в (X, X). Пусть величины $z_{ij} = z_{ij}^k$ задают оптимальное решение задачи (2.1)–(2.6) при $q = q^k$ и $\mathscr{B} = \mathscr{B}_k$. Из уравнений баланса (2.2) и (2.3) при $i \in I_\nu$ и $j \in J_\nu$ имеем

$$- \sum_{j:(i,j) \in \mathscr{B}_k} z_{ij}^k - z_{i0}^k = -\lambda_i, \quad i \in I_\nu, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i:(i,j) \in \mathscr{B}_k} z_{ij}^k + z_{0j} = q^k, \quad j \in J_\nu. \tag{3.2}$$

Сложив эти равенства, получаем

$$- \sum_{i \in I_\nu} z_{i0}^k + \sum_{j \in J_\nu} z_{0j}^k = - \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i + \sum_{j \in J_\nu} q_j^k < 0. \tag{3.3}$$

Значит,

$$\sum_{i \in I_\nu} z_{i0}^k > \sum_{j \in J_\nu} z_{0j}^k \geqslant 0.$$

Следовательно, среди величин z_{i0}^k, $i \in I_\nu$, есть строго положительные. Пусть, например, $z_{l0}^k > 0$, $l \in I_\nu$. Тогда для соответствующей величины $v_{l0}^k = \lambda_l - z_{l0}^k$ имеем $v_{l0}^k < \lambda_l$, т. е. дуга $(0, l)$ оказывается ненасыщенной и $(0, l) \in \mathscr{M}_k$ (иначе на этой дуге нарушался бы признак оптимальности $\mathscr{M}_k$). Таким образом, рассматриваемая компонента связности примыкает к вершине $0 \in X$, а значит, целиком содержится в (X, X).

Теперь заметим, что в рассмотренном случае все дуги вида $(m + j, m + n + 1)$ при $j \in J_\nu$ должны быть насыщенны. Это означает, что величина потока через ν-ю компоненту связности, для которой $\sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i > \sum\limits_{j \in J_\nu} q_j^k$, равна $\sum\limits_{j \in J_\nu} q_j^k$. Но при движении из точки q^k на точку r^k, для которой имеем $\sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i = \sum\limits_{j \in J_\nu} r_j^k$, все величины $q_j(t) = q_j^k + t(r_j^k - q_j^k)$, $j \in J_\nu$, будут пропорционально возрастать, а значит, будет расти и величина потока $\sum\limits_{j \in J_\nu} q_j(t)$ через рассматриваемую компоненту связности.

Аналогично исследуется случай, когда $\sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i < \sum\limits_{j \in J_\nu} q_j^k$. В этом случае получаем, что рассматриваемая компонента связности целиком лежит в $(\overline{X}, \overline{X})$, все дуги вида $(0, i)$, $i \in I_\nu$, насыщенны и поток через такую компоненту связности равен величине $\sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i$, а значит, при движении точки $q(t)$ изменяться не будет.

Остается заметить, что если компонента связности такова, что выполняется равенство $\sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i = \sum\limits_{j \in J_\nu} q_j^k$ (такая компонента может лежать как в (X, X), так и в $(\overline{X}, \overline{X})$), то поток по такой компоненте при движении точки $q(t)$ на точку r^k изменяться не будет, ибо в этом случае $\sum\limits_{j \in J_\nu} q_j^k = \sum\limits_{j \in J_\nu} r_j^k$ и $\sum\limits_{j \in J_\nu} q_j(t) \equiv \sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i$. Лемма 2 доказана.

Таким образом, выбираемое на каждом шаге процесса направление изменения текущей точки $q \in \Xi(\mathscr{B}_k)$ (на точку $r^k = r(\mathscr{B}_k)$) ведет к улучшению оптимального значения величины потока $v_0^*(q)$. Предполагаемая двойственная невырожденность транспортной задачи модели обеспечивает возможность ненулевого сдвига в этом направлении, но нужно, чтобы при таком сдвиге не нарушалось условие $q \in \Xi(\mathscr{B}_k)$. Это будет так, если точка q^k находится в относительной внутренности множества $\Xi(\mathscr{B}_k)$. Если при движении точка $q(t)$ достигает границы этого множества, то благодаря тому, что при этом $\mathscr{B}_k$ пополняется всеми новыми «рентабельными» связями (п. (i) в описании алгоритма), точка q^{k+1} окажется снова в относительной внутренности нового множества $\Xi(\mathscr{B}_{k+1})$. Остается показать, что при выполнении процедуры согласования текущей точки q^k с множеством $\mathscr{B}_k$, когда из $\mathscr{B}_k$ исключаются связи (i, j),

соответствующие дугам $(i, m+j) \in (\overline{X}, X)$, а следовательно, происходит расширение множества $\Xi(\mathscr{B}_k)$, — что и в этом случае положительный сдвиг на новую точку $r^{k+1} = r(\mathscr{B}_{k+1})$ возможен, т. е. расширение множества $\Xi(\mathscr{B}_k)$ происходит «в нужную сторону».

Лемма 3. *Пусть множество $\mathscr{B}_{k+1}$ получено из $\mathscr{B}_k$ в результате согласования множества $\mathscr{B}_k$ с точкой q^k, т. е. исключением из $\mathscr{B}_k$ всех связей (i,j), соответствующих дугам $(i, m+j) \in (\overline{X}, X)$, где X и $\overline{X}$ получены при решении задачи о максимальном потоке для $q = q^k$. Если $(i_0, j_0) \in \mathscr{B}_k \setminus \mathscr{B}_{k+1}$, то при движении точки $q(t)$ в точку $r^{k+1} = r(\mathscr{B}_{k+1})$ граничное условие множества $\Xi(\mathscr{B}_{k+1})$, отвечающее связи (i_0, j_0), не является сдерживающим.*

Доказательство. Так как $i_0 \in \overline{X}$, то дуга $(0, i_0)$ — насыщенная. Это означает, что для величин z^k_{ij}, задающих оптимальное решение задачи (2.1)–(2.6), при $q = q^k$ выполняется равенство $\sum\limits_{j:(i_0,j)\in\mathscr{B}_k} z^k_{i_0 j} = \lambda_{i_0}$.

Так как $(i_0, m+j_0) \in (\overline{X}, X)$, то $z^k_{i_0 j_0} = 0$. Но $\lambda_{i_0} > 0$, и поэтому среди величин $z^k_{i_0, j}$, $(i_0, j) \in \mathscr{B}_k$ есть положительные. Значит, найдется $(i_0, j_1) \in \mathscr{B}_k$ при $j_1 \neq j_0$. Тогда ввиду $q^k \in \Xi(\mathscr{B}_k)$ выполняется

$$\frac{c^{i_0}_{j_1}}{q^k_{j_1}} = \frac{c^{i_0}_{j_0}}{q^k_{j_0}}. \tag{3.4}$$

Нужно показать, что при $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\frac{c^{i_0}_{j_1}}{q_{j_1}(t)} \geqslant \frac{c^{i_0}_{j_0}}{q_{j_0}(t)}. \tag{3.5}$$

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{c^{i_0}_{j_1}}{r^{k+1}_{j_1}} \geqslant \frac{c^{i_0}_{j_0}}{r^{k+1}_{j_0}}. \tag{3.6}$$

Это неравенство выполняется, если $r^{k+1}_{j_1} \leqslant q^k_{j_1}$ и $r^{k+1}_{j_0} \geqslant q^k_{j_0}$. Покажем это.

Прежде всего отметим, что исключение дуг вида $(i, m+j) \in (\overline{X}, X)$ не нарушает оптимальности имеющегося базисного множества $\mathscr{M}_k$, а значит, для нового множества $\mathscr{B}_{k+1}$ при $q = q^k$ остаётся прежнее оптимальное базисное множество $\mathscr{M}_k$ и прежние порождаемые им множества X и $\overline{X}$. Как отмечалось при доказательстве леммы 2, множество дуг каждой компоненты связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_{k+1})$ содержится либо в множестве (X, X), либо в множестве $(\overline{X}, \overline{X})$.

Ясно, что вершины i_0 и $m+j_1$ попадают в компоненту связности, лежащую в $(\overline{X}, \overline{X})$, а вершина $m+j_0$ — в компоненту, лежащую в (X, X). Пусть, для определённости, вершина $m+j_0$ попадает в ν-ю компоненту

связности, т. е. $j_0 \in J_\nu$. Эта компонента соединяется какой-то «базисной» дугой с вершиной 0, а все дуги вида $(m+j, n+m+1)$, $j \in J_\nu$, — насыщенные. Это означает, что $z_{0j}^k = 0$ при любом $j \in J_\nu$. Тогда записывая равенства (3.1) и (3.2) с заменой $\mathscr{B}_k$ на $\mathscr{B}_{k+1}$, аналогично (3.3) получим

$$\sum_{i \in I_\nu} \lambda_i - \sum_{j \in J_\nu} q_j^k = \sum_{i \in I_\nu} z_{i0}^k \geqslant 0. \tag{3.7}$$

С другой стороны,

$$\sum_{i \in I_\nu} \lambda_i = \sum_{j \in J_\nu} r_j^{k+1}. \tag{3.8}$$

Теперь из (3.7) и (3.8) следует, что

$$\sum_{j \in J_\nu} r_j^{k+1} \geqslant \sum_{j \in J_\nu} q_j^k. \tag{3.9}$$

Остается учесть, что в любой компоненте связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_{k+1})$ между величинами r_j^{k+1} соблюдаются те же пропорции, что и между $q_j^k : r_j^{k+1} = \gamma_\nu q_j^k$, $j \in J_\nu$. Поэтому из (3.9) следует, что $\gamma_\nu \geqslant 1$ и $r_j^{k+1} \geqslant q_j^k$, $j \in J_\nu$. В частности, поскольку $j_0 \in J_\nu$, имеем $r_{j_0}^{k+1} \geqslant q_{j_0}^k$.

Аналогично показывается, что на компонентах связности, попадающих в $(\overline{X}, \overline{X})$, выполняется неравенство $r_j^{k+1} \leqslant q_j^k$ и, следовательно, для $j_1 \in \overline{X}$ получаем $r_{j_1}^{k+1} \leqslant q_{j_1}^k$. Это завершает доказательство леммы 3.

Объединяя утверждения лемм 2 и 3, получаем следующий результат.

Теорема 2. *При выполнении условия двойственной невырожденности транспортной задачи модели описанный метод обеспечивает монотонное возрастание оптимального значения величины потока $v_0^*(q)$.*

§ 4. Заключительные замечания

Описанная процедура допускает обобщение на общий случай линейной модели обмена. При этом усложнится лишь отыскание точки $r^k = r(\mathscr{B}_k)$, для чего придется решать уже не столь простую систему линейных уравнений, как это было в рассматриваемом случае. В остальном алгоритм не потребует каких-либо значительных изменений. Но, по-видимому, в общем случае целесообразнее использовать предложенную процедуру в комбинации с итеративным алгоритмом [9].

Решенные контрольные примеры показали достаточную эффективность метода и сходимость за конечное число шагов. Но вопрос теоретического обоснования конечности процесса остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Данциг Дж.** Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.
3. **Форд Л., Фалкерсон Д.** Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.
4. **Шмырёв В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 286, № 5. С. 1062–1066.
5. **Шмырёв В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 163–175.
6. **Шмырёв В. И., Воленко Ю. А.** Венгерский метод для отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Наст. журн. С. 61–77.
7. **Eaves B. C.** A finite algorithm for the linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. V. 3, N 2. P. 197–204.
8. **Lemke C. E.** Bimatrix equilibrium points and math. programming // J. Management Sci. 1965. V. 11, N 7. P. 681–689.
9. **Шмырёв В. И., Шмырёва Н. В.** Итеративный алгоритм нахождения равновесия в линейной модели обмена // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 130–146. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 28). (Англ. пер.: Shmyrev V. I., Shmyreva N. V. An iterative algorithm for searching an equilibrium in the linear exchange model // Siberian Advances in Mathematics. 1996. V. 6, N 1. P. 87–104.)

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
19 мая 1998 г.