ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 1999. Серия 2. Том 6, № 1, 61–77

УДК 519.865.3

ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА С ФИКСИРОВАННЫМИ БЮДЖЕТАМИ*)

В. И. Шмырёв, Ю. А. Воленко

Известно, что задача отыскания равновесия в линейной модели с фиксированными бюджетами сводится к некоторой задаче математического программирования с линейными ограничениями. Такое сведение приведено в книге Д. Гейла [1]. Однако эффективных конечных алгоритмов для решения задач возникающего класса предложено не было. Принципиально иной подход к проблеме, основанный на идеях полиэдральной комплементарности, был развит в работах одного из авторов [4, 6]. Этот подход позволил не только прояснить некоторые качественные аспекты проблемы, но и разработать достаточно простые и эффективные алгоритмы симплексного типа [5, 7, 8], обеспечивающие нахождение равновесия за конечное число шагов. Предлагаемый в настоящей работе алгоритм является дальнейшим продвижением в этом направлении, показывая применимость идей венгерского метода решения транспортных задач. Это выявляет более тесную связь с конструкциями линейного программирования. Использование алгоритма Форда — Фалкерсона для задачи о максимальном потоке [3] позволяет избавиться от характерного для симплексных процедур предположения о невырожденности.

§ 1. Описание модели и признаки равновесности

Будем рассматривать линейную модель обмена с фиксированными бюджетами в традиционной форме. Пусть $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество номеров участников обмена, а $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество номеров продуктов, имеющихся на рынке. Без ограничения общности считаем, что имеется по единице каждого продукта. Каждый участник обмена характеризуется некоторым бюджетом и своей линейной целевой функцией, указывающей относительную ценность различных наборов товаров для данного участника. Пусть λ_i — бюджет i-го участника, а $c^i \in R^n_+$ —

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00885а).

вектор коэффициентов его целевой функции. При фиксированном векторе цен на товары $p \in R^n_+$ формируются задачи участников: максимизировать

$$\sum_{j\in J} c^i_j x^i_j \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j\in J} p_j x^i_j \leqslant \lambda_i, \tag{1.2}$$

$$x^i_j \geqslant 0, \quad j \in J. \tag{1.3}$$

Здесь c^i_j — компоненты вектора c^i, а x^i_j — компоненты вектора x^i, характеризующего закупки i-го участника: x^i_j — объем закупок i-м участником j-го продукта.

Вектор цен $\hat{p}$ называется *равновесным*, если среди оптимальных решений задач участников найдутся такие $\hat{x}^i$, что

$$\sum_{i\in I} \hat{x}^i_j = 1, \quad j \in J. \tag{1.4}$$

Равновесный вектор цен $\hat{p}$ вместе с соответствующими векторами $\hat{x}^i$, $i \in I$, образуют *состояние равновесия*. Ясно, что при $x^i = \hat{x}^i$ и $p = \hat{p}$ в (1.2) достигается равенство. Кроме того, из (1.2) и (1.4) следует, что $\sum\limits_{j\in J} \hat{p}_j = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i$. Для простоты будем считать, что $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i = 1$, и ограничимся рассмотрением векторов цен p из *симплекса цен* $\sigma = \Big\{p \in R^n_+ \mid \sum\limits_{j\in J} p_j = 1\Big\}$. Относительно векторов c^i естественно предполагать, что они отличны от нуля и

$$\max_i c^i_j > 0, \quad j \in J. \tag{1.5}$$

Это означает, что каждый товар представляет интерес по крайней мере для одного из участников. В противном случае товар можно исключить из рассмотрения.

В предположении (1.5) равновесный вектор $\hat{p}$ обязательно положителен, т. е. лежит в относительной внутренности σ° симплекса σ.

Существование состояний равновесия в приведенной модели следует из известного сведéния исходной проблемы (см. [1], с. 355) к задаче нахождения максимального значения функции

$$\gamma(x^1, \ldots, x^n) = \prod_{i\in I} (c^i, x^i)^{\lambda_i}$$

при условии, что

$$\sum_{i\in I} x^i = e, \quad x^i \geqslant 0, \quad i \in I, \tag{1.6}$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$.

Пусть

$$T = \{(i,j) \in I \times J \mid c_j^i > 0\},$$
$$T_i = \{j \in J \mid (i,j) \in T\},$$
$$T^j = \{i \in I \mid (i,j) \in T\}.$$

Для формулировки требуемых в дальнейшем признаков равновесного состояния введем в рассмотрение специальную транспортную задачу, которую будем называть *транспортной задачей модели*: максимизировать

$$\sum_{(i,j) \in T} z_{ij} \ln c_j^i \tag{1.7}$$

при условиях

$$\sum_{j \in T_i} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I, \tag{1.8}$$

$$\sum_{i \in T^j} z_{ij} = p_j, \quad j \in J, \tag{1.9}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in T. \tag{1.10}$$

Здесь цены p_j выступают в роли параметров. Согласно теории параметрического линейного программирования максимальное значение целевой функции приведенной задачи является вогнутой кусочно-линейной функцией параметров p_j, которую мы будем обозначать через $f(p)$. Для тех p, при которых транспортная задача модели неразрешима, принимается $f(p) = -\infty$. Несложные рассуждения из [8] показывают, что f — собственная вогнутая функция, т. е. ее эффективная область $\operatorname{dom} f = \{p \in R^n \mid f(p) > -\infty\} = P$ непуста. Это простое следствие того, что все c^i отличны от нуля, а значит, множество T обладает свойством i-накрываемости: все множества T_i непусты. Поэтому, обозначив через t_i число элементов в множестве T_i и положив

$$\hat{z}_{ij} = \lambda_i / t_i, \quad (i,j) \in T, \tag{1.11}$$

$$\hat{z}_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin T, \tag{1.12}$$

$$\hat{p}_j = \sum_{i \in I} \hat{z}_{ij}, \tag{1.13}$$

получаем, что $\hat{p} \in \sigma$, а величины $\hat{z}_{ij}$ образуют допустимое решение транспортной задачи модели при $p = \hat{p}$. Ясно, что этого достаточно для существования и оптимального решения, т. е. $\hat{p} \in P$. Заметим, что

ввиду (1.5) имеем $\hat{p} > 0$ и тем самым $P \cap \sigma^{\circ} \neq \varnothing$. Несложно показать также, что P — многогранное множество. Введем для $p \in \sigma^{\circ}$ функцию

$$h(p) = \sum_{j \in J} p_j \ln p_j$$

и доопределим ее на границе симплекса σ по непрерывности: $p_j \ln p_j$ считаем равным нулю, если $p_j = 0$. Для $p \notin \sigma$ принимаем $h(p) = +\infty$.

Интересующие нас признаки равновесности основаны на рассмотрении функции $\varphi(p) = h(p) - f(p)$. Это выпуклая функция и ее эффективная область $\operatorname{dom} \varphi = \{p \in R^n \mid \varphi(p) < +\infty\}$ совпадает с P. На P функция φ строго выпукла и непрерывна и поэтому имеет единственную точку минимума.

Теорема 1.1. *Точка минимума функции φ на σ и только она задает равновесный вектор цен модели.*

Доказательство этого утверждения имеется в [5, 8].

Для обоснования предлагаемого в этой работе метода потребуется в определенном смысле двойственный аналог приведенного признака, получающийся путем перехода к сопряженным функциям. При этом для произвольной вогнутой функции g сопряженная функция g^* задается формулой

$$g^*(y) = \inf_x \{(x, y) - g(x)\}.$$

Несложно убедиться, что это приводит к соотношению

$$g^*(y) = -(-g)^*(-y),$$

где $(-g)^*$ — функция, сопряженная в обычном смысле к выпуклой функции $(-g)$. Для вогнутой функции g будем обозначать через $\partial g(y)$ ее супердифференциал, вводимый формулой $\partial g(x) = -\partial(-g)(x)$, где $\partial(-g)$ — субдифференциал выпуклой функции $(-g)$.

В этом случае для вогнутой функции g и ее сопряженной функции неравенство Фенхеля имеет вид

$$g(x) + g^*(y) \leqslant (x, y). \tag{1.14}$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда x и y связаны соотношением $y \in \partial g(x)$.

Легко проверяется, что отображения $\partial g : x \to \partial g(x)$ и $\partial g^* : y \to \partial g^*(y)$, как и в случае выпуклых функций, являются взаимно обратными, т. е. соотношение $y \in \partial g(x)$ эквивалентно соотношению $x \in \partial g^*(y)$.

Вернемся к введенной выше вогнутой функции f, задающей оптимальное значение целевой функции в транспортной задаче модели, и рассмотрим сопряженную функцию f^*. Так как f — вогнутая и кусочно-линейная с компактной эффективной областью, то f^* — также вогнутая и кусочно-линейная функция с $\operatorname{dom} f^* = R^n$. Участки линейности

функции f, как следует из теории параметрических задач линейного программирования, являются выпуклыми многогранниками, покрывающими всю эффективную область P правильным образом, т. е. примыкая друг к другу по граням и не пересекаясь по внутренним точкам. Пусть ω — полиэдральный комплекс, образованный этими многогранниками и их всевозможными замкнутыми гранями. Пусть $\{a^k \mid k \in K\}$ — множество вершин этого комплекса. Тогда функция f^* представима в виде

$$f^*(x) = \min_{k \in K}(a^k, x).$$

Если сделать замену переменных по формуле $x_j = \ln q_j$ при $q_j > 0$, то получим строго вогнутую функцию $\overline{\psi}(q) = f^*(\ln q)$, определенную на $\mathrm{Int} R^n_+$. Отметим, что все точки a^k лежат в σ и потому неотрицательны и отличны от нуля. Следовательно, если $q > 0$ стремится к границе множества R^n_+, то $\overline{\psi}(q) \to -\infty$.

Рассмотрим сужение функции $\overline{\psi}$, вводя новую вогнутую функцию

$$\psi(q) = \begin{cases} \overline{\psi}(q), & \text{если } q \in \sigma^\circ, \\ -\infty, & \text{если } q \notin \sigma^\circ. \end{cases}$$

Из сказанного следует, что в σ° функция ψ имеет единственную точку максимума.

Теорема 1.2. *Точка $\hat{p} \in \sigma^\circ$, задающая равновесный вектор цен модели, является точкой максимума функции ψ на σ°.*

Доказательство. Пусть $\hat{p}$ — равновесный вектор цен модели. Тогда в силу теоремы 1.1 вектор $\hat{p}$ доставляет минимум функции φ на σ, т. е. $0 \in \partial\varphi(\hat{p})$. Для $\partial\varphi(\hat{p})$ по теореме Моро — Рокафеллара справедливо равенство

$$\partial\varphi(\hat{p}) = \partial h(\hat{p}) + \partial(-f)(\hat{p}),$$

или, ввиду принятого соглашения $\partial(-f)(\hat{p}) = -\partial f(\hat{p})$,

$$\partial\varphi(\hat{p}) = \partial h(\hat{p}) - \partial f(\hat{p}). \tag{1.15}$$

Так как $\mathrm{dom}\, h \subset \sigma$, то из $x \in \partial h(\hat{p})$ следует $(x + \lambda e) \in \partial h(\hat{p})$ при любом $\lambda \in R^1$, где $e = (1, \ldots, 1)$. Это же верно и для $\partial f(\hat{p})$. Учитывая, что

$$\partial h(\hat{p}) = \{x = \ln \hat{p} + \lambda e \mid \lambda \in R^1\},$$

из (1.15) заключаем $\ln \hat{p} \in \partial f(\hat{p}) \cap \partial h(\hat{p})$. Это эквивалентно условию $\hat{p} \in \partial h^*(\ln \hat{p}) \cap \partial f^*(\ln \hat{p})$. В свою очередь, это означает, что $\hat{p}$ — точка минимума функции $h^*(\ln p) - f^*(\ln p)$ на $\mathrm{Int} R^n_+$, а значит, и на σ°. Остается учесть, что значение сопряженной функции $h^*(x)$ при любом $x \in R^n$ определяется формулой

$$h^*(x) = \ln \sum_{j \in J} e^{x_j}$$

(см. [2], с. 166). Поэтому при любом $p \in \sigma^\circ$ имеем

$$h^*(\ln p) = \ln \sum_{j \in J} e^{\ln p_j} = \ln \sum_{j \in J} p_j = \ln 1 = 0.$$

Следовательно, $\hat{p}$ — точка минимума на σ° функции $(-f^*(\ln p))$, а значит, точка максимума на σ° функции $\psi(p)$. Теорема доказана.

В описании предлагаемого алгоритма наряду с упомянутым выше полиэдральным комплексом ω, задающим участки линейности функции f, используется иной полиэдральный комплекс ξ, в определенном смысле двойственный к комплексу ω. Он описывает изменение предпочтений участников в приобретении товаров при изменении цен и порождается по следующей схеме.

Задавшись некоторым вектором цен $p = q \in \sigma^\circ$, можно указать товары, которые будет стремиться приобретать i-й участник, — это те товары, для которых достигается максимум среди отношений c^i_k/q_k. Тем самым каждый вектор $q \in \sigma^\circ$ порождает множество

$$\mathscr{B}(q) = \left\{(i,j) \in T \;\middle|\; \frac{c^i_j}{q_j} = \max_k \frac{c^i_k}{q_k}\right\}. \tag{1.16}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность различных множеств $\mathscr{B}(q)$, которые порождаются указанным способом при изменении $q \in \sigma^\circ$. Легко описать участки постоянства возникающего отображения: $\mathscr{B}(q) \equiv \mathscr{B}$ при изменении $q \in \sigma^\circ$ в множестве, задаваемом системой условий:

$$\begin{aligned} \frac{c^i_{j_1}}{q_{j_1}} &= \frac{c^i_{j_2}}{q_{j_2}}, \quad (i,j_1),(i,j_2) \in \mathscr{B}, \\ \frac{c^i_k}{q_k} &< \frac{c^i_j}{q_j}, \quad (i,j) \in \mathscr{B}, (i,k) \in T \setminus \mathscr{B}. \end{aligned}$$

Заменяя в этих условиях строгие неравенства на нестрогие, получаем описание интересующих нас клеток комплекса ξ. Клетку, порождаемую множеством $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$, будем обозначать через $\Xi(\mathscr{B})$.

Таким образом, для каждой клетки $\Xi(\mathscr{B}) \in \xi$ имеем описание

$$\Xi(\mathscr{B}) = \left\{q \in \sigma^\circ \;\middle|\; \frac{c^i_j}{q_j} \geqslant \frac{c^i_k}{q_k}, (i,j) \in \mathscr{B}, (i,k) \in T\right\}.$$

Несложные рассуждения, на которых мы не останавливаемся, показывают, что клетки упомянутого ранее полиэдрального комплекса ω, задающие участки линейности функции f, также порождаются множествами $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$. Такие клетки будем обозначать через $\Omega(\mathscr{B})$. Каждая такая

клетка представляет собой множество тех $p \in \sigma$, при которых система линейных уравнений (1.8)–(1.9), дополненная условиями

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \in T \setminus \mathscr{B}, \tag{1.17}$$

имеет неотрицательное решение.

Легко видеть, что любое такое решение $\{\hat{z}_{ij}\}$ является оптимальным (при данном p) в транспортной задаче модели. Допустимое решение двойственной задачи, связанное с $\{\hat{z}_{ij}\}$ условиями дополняющей нежесткости, можно получить следующим образом: возьмем некоторую точку $q \in \Xi(\mathscr{B})$ и положим

$$u_i = \ln y_i, \quad i \in I,$$
$$v_j = \ln q_j, \quad j \in J,$$

где $y_i = c^i_j / q_j$, $(i,j) \in \mathscr{B}$. Из описания множества $\Xi(\mathscr{B})$ непосредственно следует, что

$$u_i + v_j \geqslant \ln c^i_j, \quad (i,j) \in T, \tag{1.18}$$

т. е. для u_i и v_j выполняются условия двойственной задачи. При этом неравенства (1.18) выполняются как равенства для $(i,j) \in \mathscr{B}$ и тем самым выполнены условия дополняющей нежесткости, подтверждающие оптимальность рассматриваемых $\hat{z}_{ij}$.

Теорема 1.3. *Вектор цен $\hat{p}$ тогда и только тогда является равновесным, когда существует $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$ такое, что $\hat{p} \in \Omega(\mathscr{B}) \cap \Xi(\mathscr{B})$.*

Доказательство. Пусть $\hat{p}$ — равновесный вектор цен. В соответствии с формулой (1.16) образуем множество $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\hat{p})$. Тогда $\hat{p} \in \Xi(\mathscr{B})$. С другой стороны, если $x^i = \hat{x}^i$, $i \in I$, вместе с $\hat{p}$ образуют состояние равновесия, то, полагая $\hat{z}_{ij} = \hat{p}_j \hat{x}^i_j$, получаем, что для $z_{ij} = \hat{z}_{ij}$ выполнены равенства (1.8)–(1.9), а также условия (1.17). Так как $\hat{z}_{ij}$ очевидным образом неотрицательны, получаем $\hat{p} \in \Omega(\mathscr{B})$.

В итоге $\hat{p} \in \Omega(\mathscr{B}) \cap \Xi(\mathscr{B})$.

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть при некотором $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$ имеется некоторое $\hat{p} \in \Omega(\mathscr{B}) \cap \Xi(\mathscr{B})$. Тогда $\hat{p} > 0$, ибо $\Xi(\mathscr{B}) \subset \sigma^\circ$. Из $\hat{p} \in \Omega(\mathscr{B})$ следует существование $z_{ij} = \hat{z}_{ij}$, для которых выполняются (1.8)–(1.9) и (1.17). Тогда, принимая $\hat{x}^i_j = \hat{z}_{ij}/\hat{p}_j$, будем иметь, что для векторов $\hat{x}^i$ с такими компонентами $\hat{x}^i_j$ будут выполняться как бюджетные ограничения $(\hat{p}, \hat{x}^i) = \lambda_i$, $i \in I$, так и условия баланса товаров (1.4). А из $\hat{p} \in \Xi(\mathscr{B})$ следует оптимальность векторов $\hat{x}^i$ в соответствующих задачах участников. Тем самым вектор цен $\hat{p}$ вместе с векторами $\hat{x}^i$, $i \in I$, задают состояние равновесия, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

§ 2. Описание алгоритма

Переходя непосредственно к описанию предлагаемого алгоритма, каждому множеству $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие граф $\Gamma(\mathscr{B})$ с множеством вершин $V = I \cup \{m+j \mid j \in J\}$ и множеством дуг $U = \{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathscr{B}\}$.

К началу $(k+1)$-го шага процесса имеется некоторое множество $\mathscr{B}_k \in \mathfrak{B}$ и точка $q^k \in \Xi(\mathscr{B}_k)$. Пусть τ — число компонент связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$, а множества $I_\nu \subset I$, $J_\nu \subset J$ задают множество V_ν вершин ν-й компоненты связности: $V_\nu = I_\nu \cup \{(m+j) \mid j \in J_\nu\}$.

Определим точку $p = r^k \in \sigma^\circ$, решая систему уравнений

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1, \ldots, \tau, \tag{2.1}$$

$$\frac{p_j}{c_j^i} = \frac{p_l}{c_l^i}, \quad (i,j),(i,l) \in \mathscr{B}_k. \tag{2.2}$$

Если компонента связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ содержит лишь одну вершину вида $(m+j_0)$, т. е. $J_\nu = \{j_0\}$, то p_{j_0} однозначно определяется из соответствующего уравнения (2.1). При этом не исключается, что $I_\nu = \varnothing$, и тогда $p_{j_0} = 0$. На компонентах связности иного типа ввиду (2.2) величины p_j пропорциональны величинам q_j^k и коэффициент пропорциональности однозначно определяется из соответствующего уравнения (2.1). Таким образом, точка r^k определяется единственным образом.

Возможны два случая.

Случай 1. $q^k \neq r^k$. В этом случае рассматриваем отрезок $[q^k, r^k]$, т. е. точки вида $q(t) = q^k + t(r^k - q^k)$, $t \in [0,1]$. Определим $t^* = \max\{t \in [0,1] \mid q(t) \in \Xi(\mathscr{B}_k)\}$. Речь идет об определении максимального значения $t \leqslant 1$, удовлетворяющего системе неравенств

$$\frac{c_j^i}{q_j(t)} \geqslant \frac{c_l^i}{q_l(t)}, \quad (i,j) \in \mathscr{B}_k \text{ и } (i,l) \in T \setminus \mathscr{B}_k. \tag{2.3}$$

Вычислив t^*, переходим к следующему шагу, полагая $q^{k+1} = q(t^*)$, а в качестве $\mathscr{B}_{k+1}$ берем множество $\mathscr{B}(q^{k+1})$, которое определяется в соответствии с (1.16).

Заметим, что если оказалось $t^* = 1$, то на следующем шаге $r^{k+1} = r^k$ и $q^{k+1} = r^{k+1}$, т. е. реализуется рассматриваемый ниже случай 2. Если же $t^* < 1$, то дальнейшему увеличению t препятствуют какие-то неравенства из (2.3). Переходим к следующему шагу, пополняя множество $\mathscr{B}_k$ всеми парами (i,l), соответствующими таким лимитирующим неравенствам.

Случай 2. $q^k = r^k$. В этом случае проверяем, принадлежит ли точка q^k множеству $\Omega(\mathscr{B}_k)$. В случае положительного ответа на этот

вопрос в силу теоремы 1.3 вектор q^k является равновесным вектором цен модели. Проверка условия $q^k \in \Omega(\mathscr{B}_k)$ осуществляется по схеме, используемой на одном шаге венгерского метода [3] для решения классической транспортной задачи. Для полноты изложения воспроизведем соответствующие выкладки применительно к рассматриваемой ситуации.

Рассматривается вспомогательная задача транспортного типа в следующей формулировке:
минимизировать

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_{i0} + \sum_{j=1}^{n} z_{0j} \tag{2.4}$$

при условиях

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}_k} z_{ij} + z_{i0} = \lambda_i, \quad i \in I, \tag{2.5}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in\mathscr{B}_k} z_{ij} + z_{0j} = r_j^k, \quad j \in J, \tag{2.6}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathscr{B}_k, \tag{2.7}$$

$$z_{i0} \geqslant 0, \quad i \in I, \tag{2.8}$$

$$z_{0j} \geqslant 0, \quad j \in J. \tag{2.9}$$

Эта задача сводится к задаче о максимальном потоке. Для этого перепишем уравнения (2.5), (2.6) в виде

$$-\sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}_k} z_{ij} + (-z_{i0} + \lambda_i) = 0, \quad i \in I, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in\mathscr{B}_k} z_{ij} - (r_j^k - z_{0j}) = 0, \quad j \in J. \tag{2.11}$$

Теперь введем новые переменные $v_{i0} = \lambda_i - z_{i0}$ и $v_{0j} = r_j^k - z_{0j}$. Эти переменные принимают лишь неотрицательные значения, ибо из (2.10) и (2.11) следует, что

$$v_{i0} = \sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}_k} z_{ij} \geqslant 0,$$

$$v_{0j} = \sum_{i:(i,j)\in\mathscr{B}_k} z_{ij} \geqslant 0.$$

Отметим также, что ввиду $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i = \sum\limits_{j\in J} r_j^k$ из ограничений (2.5) и (2.6) следует $\sum\limits_{i\in I} z_{i0} = \sum\limits_{j\in J} z_{0j}$, что, в свою очередь, влечет $\sum\limits_{j\in J} v_{0j} = \sum\limits_{i\in I} v_{i0}$.

Поэтому можно ввести новую переменную v_0 формулой

$$v_0 = \sum_{j \in J} v_{0j} = \sum_{i \in I} v_{i0}.$$

Остается заметить, что

$$\sum_{i \in I} z_{i0} + \sum_{j \in J} z_{0j} = \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{j \in J} r_j^k - \sum_{i \in I} v_{i0} - \sum_{j \in J} v_{0j} = 2 - 2v_0.$$

В результате приходим к задаче:
максимизировать

$$v_0 \tag{2.12}$$

при условиях

$$-\sum_{j:(i,j) \in \mathscr{B}_k} z_{ij} + v_{i0} = 0, \quad i \in I, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i:(i,j) \in \mathscr{B}_k} z_{ij} - v_{0j} = 0, \quad j \in J, \tag{2.14}$$

$$-\sum_{i \in I} v_{i0} + v_0 = 0, \tag{2.15}$$

$$\sum_{j \in J} v_{0j} - v_0 = 0, \tag{2.16}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathscr{B}_k, \tag{2.17}$$

$$0 \leqslant v_{i0} \leqslant \lambda_i, \quad i \in I, \tag{2.18}$$

$$0 \leqslant v_{0j} \leqslant r_j^k, \quad j \in J. \tag{2.19}$$

Теперь для интерпретации этой задачи в виде задачи о максимальном потоке к нашему графу нужно добавить две новые вершины: «0» и «$m+n+1$». Им отвечают уравнения (2.15) и (2.16) соответственно. Кроме того, нужно ввести новые дуги вида $(0, i)$, соответствующие переменным v_{i0}, и дуги вида $(m+j, m+n+1)$, соответствующие переменным v_{0j}. Наконец, нужно ввести «возвратную» дугу $(m+n+1, 0)$, соответствующую переменной v_0. Полученный граф обозначим через $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_k)$. Наша задача представляет собой задачу о максимальном потоке по этому графу из вершины 0 в вершину $m+n+1$.

Вернемся теперь к описанию алгоритма. Полученную по точке r^k и множеству $\mathscr{B}_k$ задачу о максимальном потоке решаем методом Форда — Фалкерсона. Если окажется, что в оптимальном решении $v_0 = 1$, то это означает, что все z_{i0} и z_{0j} равны нулю, а следовательно, $q^k \in \Omega(\mathscr{B}_k)$ и q^k — равновесный вектор цен модели.

Если же $v_0 < 1$, то $q^k \notin \Omega(\mathscr{B}_k)$. В этом случае множество $\mathscr{B}_k$ изменяем следующим образом.

Вместе с оптимальным решением рассматриваемой задачи о максимальном потоке, полученным посредством алгоритма Форда — Фалкерсона, будет определен и оптимальный разрез $(X, \overline{X})$ графа $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_k)$ как совокупность дуг, ведущих из множества вершин X в множество остальных вершин $\overline{X}$. При этом $0 \in X$ и $(m+n+1) \in \overline{X}$, все дуги из $(X, \overline{X})$ насыщены, т. е. поток по этим дугам совпадает с их пропускной способностью, а поток по дугам, ведущим из $\overline{X}$ в X (исключая возвратную дугу $(m+n+1, 0)$), равен нулю. Множество $\mathscr{B}_{k+1}$ получается из $\mathscr{B}_k$ исключением пар $(i,j) \in I \times J$, соответствующих этим последним дугам, т. е.

$$\mathscr{B}_{k+1} = \mathscr{B}_k \setminus \{(i,j) \in I \times J \mid i \in \overline{X}, (m+j) \in X\}.$$

Полагая $q^{k+1} = q^k$, переходим к следующему шагу.

§ 3. Обоснование алгоритма

Переходя к доказательству конечности изложенного алгоритма, на исходные данные наложим необременительное требование рациональности величин c_j^i и λ_i. Следствием этого является рациональность получаемых точек r^k, а значит, и конечность процедуры Форда — Фалкерсона при решении вспомогательных задач о максимальном потоке.

Заметим также, что начало процесса можно организовать достаточно просто: точка q^0 выбирается произвольно из множества σ°, а в качестве множества $\mathscr{B}_0$ выбирается множество $\mathscr{B}(q^0)$, формируемое по q^0 в соответствии с (1.16). При этом не исключено, что граф $\Gamma(\mathscr{B}_0)$ будет содержать изолированные вершины вида $(m+j)$, $j \in J$. Пусть это так и все такие вершины порождаются множеством $J_0' \subset J$, $J_0' \neq \varnothing$. Тогда на первом шаге для точки r^0 будем иметь $r_j^0 = 0$, $j \in J_0'$. Ясно, что реализуется случай 1. При этом $t^* > 0$, так как все неравенства (2.3) при $t = 0$ выполняются как строгие. С другой стороны, при увеличении t компоненты $q_l(t)$ при $l \in J_0'$ убывают и при $t = 1$ обращаются в нуль. Ввиду предположения (1.5) среди неравенств (2.3) найдется такое, которое при t, достаточно близком к 1, будет нарушаться. Тем самым $t^* < 1$ и на следующем шаге снова будем иметь случай 1 с $\mathscr{B}_1 \supset \mathscr{B}_0$. Такая ситуация будет повторяться до тех пор, пока на графе $\Gamma(\mathscr{B}_k)$, порождаемом текущим множеством $\mathscr{B}_k$, имеются изолированные вершины. Так как при этом множество $\mathscr{B}_k$ расширяется, то через конечное число шагов будет получен граф $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ без изолированных вершин и окажется $r^k > 0$. Ясно, что новые изолированные вершины в процессе появиться не могут. Поэтому, получив однажды $r^k > 0$, мы будем иметь это и в дальнейшем.

Пусть описанная начальная фаза процесса пройдена и мы уже имеем $r^k > 0$. Покажем, что тогда реализация случая 1 всегда сопровождается

строгим возрастанием значения функции ψ в текущей точке: $\psi(q^{k+1}) > \psi(q^k)$. Этим и будет доказана конечность всего процесса. Действительно, в случае 2, который обязательно наступает после конечного числа повторений случая 1, характеризующегося сужением множества $\mathscr{B}_k$, имеем $\psi(q^k) = \psi(r^k)$. Так как точка r^k однозначно порождается множеством $\mathscr{B}_k$, то ни одно из множеств $\mathscr{B}_k \in \mathfrak{B}$, фигурирующих в случае 2, в дальнейшем уже повториться не может. Но число различных множеств $\mathscr{B}_k$ конечно, а значит, конечен и сам процесс.

Выполнение случая 1 состоит в движении точки $q(t)$ в пределах множества $\Xi(\mathscr{B}_k)$ по отрезку $[q^k, r^k]$, что соответствует увеличению t от 0 до 1. Нужно показать, что при этом значение $\psi(q(t))$ растет и t^*, задающее точку q^{k+1}, строго положительно.

Из определения функции, сопряженной к вогнутой функции, и неравенства Фенхеля — Моро (1.14) непосредственно следует, что

$$\psi(q) \leqslant (p, \ln q) - f(p) \tag{3.1}$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда $p \in \sigma$ и $q \in \sigma^\circ$ связаны условием $\ln q \in \partial f(p)$. Теперь вспомним, что отображение $p \to \partial f(p)$ имеет кусочно-постоянный характер с участками постоянства, задаваемыми клетками $\Omega(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$.

Как следует из рассуждений § 1, для транспортной задачи модели при $p \in \Omega(\mathscr{B})$ оптимальные значения двойственных переменных v_j, $j \in J$, совпадают с точностью до одинакового слагаемого с величинами $\ln q_j$, если q взять из клетки $\Xi(\mathscr{B})$. Но совокупность векторов v с такими компонентами v_j, $j \in J$, и задает супердифференциал вогнутой функции f в точке p. Тем самым имеем представление

$$\partial f(p) = \{\ln q + \lambda e \mid q \in (\mathscr{B}), \lambda \in R^1\}, \tag{3.2}$$

где e — вектор из единиц: $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$. С учетом (3.1) и сказанного выше получаем, что соотношение $\ln q \in \partial f(p)$ выполняется при $p \in \Omega(\mathscr{B})$ и $q \in \Xi(\mathscr{B})$. Это означает, что на $\Xi(\mathscr{B})$ функция ψ совпадает с любой из функций ψ_p, $p \in \Omega(\mathscr{B})$, задаваемых формулой

$$\psi_p(q) = (p, \ln q) - f(p). \tag{3.3}$$

Вернемся к рассмотрению ситуации на $(k+1)$-м шаге процесса при выполнении случая 1 и, не оговаривая особо, ограничимся рассмотрением функций ψ_p только при $p \in \Omega(\mathscr{B}_k)$. Это строго вогнутые функции переменного q, и для возрастания значения $\psi_p(q(t))$ с ростом t нам достаточно убедиться в том, что

$$\psi_p(r^k) > \psi_p(q^k). \tag{3.4}$$

Для этого покажем, что в точке r^k достигается максимум функций ψ_p, $p \in \Omega(\mathscr{B}_k)$, на множестве $M'(\mathscr{B}_k) = \sigma^\circ \cap M(\mathscr{B}_k)$, где $M(\mathscr{B}_k)$ — подпространство, описываемое системой линейных однородных уравнений (2.2). Отметим, что как точка q^k, так и вся клетка $\Xi(\mathscr{B}_k)$ принадлежат множеству $M'(\mathscr{B}_k)$. Поэтому ввиду строгой вогнутости функций ψ_p из $q^k \neq r^k$ (мы рассматриваем случай 1) следует неравенство (3.4).

Расширим σ° до $\mathrm{Int} R^n_+$, введя функции $\widetilde{\psi}_p$ формулой

$$\widetilde{\psi}_p(q) = \psi_p(q) - \ln \sum_{j \in J} q_j. \tag{3.5}$$

На σ° имеем $\ln \sum\limits_{j \in J} q_j = \ln 1 = 0$ и поэтому $\widetilde{\psi}_p(q) = \psi_p(q)$. Кроме того, при любом $t > 0$ имеем в виду $p \in \sigma$

$$\widetilde{\psi}_p(tq) = (p, \ln tq) - f(p) - \ln \sum_{j \in J} (tq_j) = \widetilde{\psi}_p(q) + (\ln t) \sum_{j \in J} p_j - \ln t = \widetilde{\psi}_p(q).$$

Следовательно, функции $\widetilde{\psi}_p$ являются положительно однородными функциями нулевой степени, и нам нужно доказать, что на множестве $\widetilde{M}'(\mathscr{B}_k) = \mathrm{cone} M'(\mathscr{B}_k)$, являющемся конической оболочкой множества $M'(\mathscr{B}_k)$, максимум каждой функции достигается в точках вида tr^k, $t > 0$.

Так как граф $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ не имеет изолированных вершин, то для каждой компоненты связности этого графа соответствующие ей множества $I_\nu \subset I$ и $J_\nu \subset J$, задающие множество вершин компоненты, непусты. Поставим в соответствие ν-й компоненте вектор направления s^ν с координатами:

$$s^\nu_j = r^k_j, \quad j \in J_\nu \tag{3.6}$$

$$s^\nu_j = 0, \quad j \in J \setminus J_\nu. \tag{3.7}$$

Ясно, что любой такой вектор не выводит из подпространства $M(\mathscr{B}_k)$, а совокупность всех таких векторов образует его базис. Убедимся, что по каждому направлению s^ν производная функций $\widetilde{\psi}_p$ в точке r^k равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}_p(q)}{\partial s^\nu} = \sum_{j \in J} \frac{p_j}{q_j} s^\nu_j - \left(\frac{1}{\sum\limits_{j \in J} q_j} \right) \sum_{j \in J} s^\nu_j. \tag{3.8}$$

Подставляя $q = r^k$ ввиду (3.6) и (3.7), а также учитывая $r^k \in \sigma$, получаем

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}_p(q)}{\partial s^\nu} = \sum_{j \in J_\nu} \frac{p_j}{r^k_j} r^k_j - \left(\frac{1}{\sum\limits_{j \in J} r^k_j} \right) \sum_{j \in J_\nu} r^k_j = \sum_{j \in J_\nu} p_j - \sum_{j \in J_\nu} r^k_j \tag{3.9}$$

Остается учесть, что r^k определяется из системы (2.1)–(2.2) и поэтому $\sum\limits_{j\in J_\nu} r_j^k = \sum\limits_{i\in I_\nu} \lambda_i$. С другой стороны, мы рассматриваем $p \in \Omega(\mathscr{B}_k)$. Легко видеть, что для таких p система (2.1) также должна выполняться, ибо, суммируя уравнения (1.8) при $i \in I_\nu$ и уравнения (1.9) при $j \in J_\nu$, получаем

$$\sum_{i\in I_\nu}\sum_{j\in J_\nu} z_{ij} = \sum_{i\in I_\nu} \lambda_i, \tag{3.10}$$

$$\sum_{j\in J_\nu}\sum_{i\in I_\nu} z_{ij} = \sum_{j\in J_\nu} p_j. \tag{3.11}$$

Отсюда и следует (2.1).

Таким образом, производная (3.9) равна нулю и тем самым доказательство неравенства (3.4) закончено.

Убедимся в том, что при реализации на $(k+1)$-м шаге случая 1 будет $t^* > 0$. Это очевидно, если на предшествующем шаге мы также имели случай 1. В такой ситуации множество $\mathscr{B}_k$ образовано как $\mathscr{B}(q^k)$ в соответствии с (1.16) и все неравенства (2.3) при $t = 0$ выполняются как строгие. Тем самым они выполняются и при достаточно малых $t > 0$, а значит, $t^* > 0$.

Пусть теперь на предшествующем шаге мы имеем случай 2. Это означает, что на графе $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_{k-1})$ решалась задача о максимальном потоке, был получен оптимальный разрез $(X, \overline{X})$ и множество $\mathscr{B}_k$ получено из $\mathscr{B}_{k-1} = \mathscr{B}(q^{k-1})$ исключением связей (i, j) таких, что $i \in \overline{X}$, а $(m+j) \in X$. При этом $q^k = q^{k-1}$ и потому для указанных связей (i, j) неравенства (2.3) при $t = 0$ выполняются на $(k+1)$-м шаге как равенства. Нужно показать, что эти неравенства будут выполняться и при $t > 0$, а тем самым не будут препятствовать увеличению t, что и обеспечит неравенство $t^* > 0$.

Помимо множества дуг $(X, \overline{X})$, задающего разрез, введем в рассмотрение множества (X, X), $(\overline{X}, X)$ и $(\overline{X}, \overline{X})$, определяя их по аналогии с $(X, \overline{X})$. Например, $(\overline{X}, X)$ — это множество дуг графа $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_k)$, ведущих из $\overline{X}$ в X.

Прежде всего отметим, что множество дуг любой компоненты связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ целиком содержится либо в (X, X), либо в $(\overline{X}, \overline{X})$. Действительно, дуги графа $\Gamma(\mathscr{B}_{k-1})$, попадающие в $(\overline{X}, X)$, при переходе от $\mathscr{B}_{k-1}$ к $\mathscr{B}_k$ исключены. Значит, нужно показать, что компоненты связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ не содержат дуг из $(X, \overline{X})$, т. е. дуг полученного оптимального разреза. Однако в оптимальном разрезе могут быть лишь насыщенные дуги, т. е. дуги, по которым поток уже достиг пропускной способности. Но все дуги графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ имеют вид $(i, m+j)$ при

$(i,j) \in I \times J$ и им отвечают переменные z_{ij}, на которые нет ограничений сверху. Значит, эти дуги не могут быть насыщенными.

Таким образом, каждая компонента связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ соединяется в графе $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_k)$ либо какими-то ненасыщенными дугами вида $(0,i)$ с вершиной 0, либо какими-то ненасыщенными дугами вида $(m+j, m+n+1)$ с вершиной $m+n+1$. В первом случае все вершины компоненты связности попадают в множество X, во втором — в множество $\overline{X}$, а дуги — соответственно в (X,X) и $(\overline{X},\overline{X})$.

Пусть $(i_0, m+j_0) \in (\overline{X}, X)$. Это означает, что $(i_0,j_0) \in \mathscr{B}_{k-1}$, $i_0 \in \overline{X}$, $(m+j_0) \in X$ и $(i_0,j_0) \notin \mathscr{B}_k$. Пусть $\Gamma_\nu(\mathscr{B}_k)$ — компонента связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$, в которой находится вершина i_0, и множество всех вершин этой компоненты задается множествами $I_\nu^k \subset I$ и $J_\nu^k \subset J$. Пусть $j_1 \in J_\nu^k$. Так как (i_0,j_0), $(i_0,j_1) \in \mathscr{B}_{k-1}$, то для компонент $r_{j_0}^{k-1}$ и $r_{j_1}^{k-1}$ вектора r^{k-1} выполняется условие

$$\frac{c_{j_0}^{i_0}}{r_{j_0}^{k-1}} = \frac{c_{j_1}^{i_0}}{r_{j_1}^{k-1}}. \tag{3.12}$$

Покажем, что r^k таков, что имеет место неравенство

$$\frac{c_{j_0}^{i_0}}{r_{j_0}^{k}} < \frac{c_{j_1}^{i_0}}{r_{j_1}^{k}}. \tag{3.13}$$

Так как $q^k = r^{k-1}$, то для $q(t) = q^k + t(r^k - q^k)$ следствием (3.12) и (3.13) будет неравенство

$$\frac{c_{j_0}^{i_0}}{q_{j_0}(t)} < \frac{c_{j_1}^{i_0}}{q_{j_1}(t)}$$

при любом $t \in (0,1]$, что и требуется.

Для доказательства (3.13) покажем, что $r_{j_0}^k > r_{j_0}^{k-1}$ и $r_{j_1}^k < r_{j_1}^{k-1}$. Тогда (3.13) будет следовать из (3.12).

Заметим, что в соответствии с правилом определения точки r^k координаты r_j^k в каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_k)$ должны сохранить те же взаимные пропорции, что и соответствующие координаты r_j^{k-1}, т. е. для каждой компоненты связности величины r_j^k получаются из соответствующих r_j^{k-1} домножением на некоторый положительный множитель (свой для каждой компоненты):

$$r_j^k = \gamma_s r_j^{k-1}, \quad j \in J_s, \tag{3.14}$$

где $\gamma_s > 0$ — множитель, отвечающий компоненте $\Gamma_s(\mathscr{B}_k)$.

Пусть вершины компоненты $\Gamma_s(\mathscr{B}_k)$ содержатся в множестве X. Как отмечалось выше, в графе $\overline{\Gamma}(\mathscr{B}_k)$ такая компонента соединяется с вершиной 0 какими-то ненасыщенными дугами вида $(0,i)$. Это означает,

что величины $z_{ij} = \hat{z}_{ij}$, найденные при решении задачи о максимальном потоке, удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathscr{B}_{k-1}} \hat{z}_{ij} + \hat{z}_{i0} = \lambda_i, \quad i \in I_s, \tag{3.15}$$

$$\sum_{i:(i,j)\in\mathscr{B}_{k-1}} \hat{z}_{ij} = r_j^{k-1}, \quad j \in J_s, \tag{3.16}$$

и

$$\sum_{i\in I_s} \hat{z}_{i0} > 0. \tag{3.17}$$

Но из (3.15) и (3.16) следует

$$\sum_{i\in I_s} \lambda_i - \sum_{i\in I_s} \hat{z}_{i0} = \sum_{j\in J_s} r_j^{k-1},$$

что вместе с (3.17) дает

$$\sum_{i\in I_s} \lambda_i > \sum_{j\in J_s} r_j^{k-1},$$

в то время как в соответствии с (2.1) для r_j^k имеем

$$\sum_{i\in I_s} \lambda_i = \sum_{j\in J_s} r_j^k.$$

Следовательно,

$$\sum_{j\in J_s} r_j^{k-1} < \sum_{j\in J_s} r_j^k,$$

т. е. в (3.14) множитель γ_s больше 1 и $r_j^k > r_j^{k-1}$ для каждого $j \in J_s$.

Аналогично показывается, что если вершины компоненты связности $\Gamma_s(\mathscr{B}_k)$ содержатся в множестве $\overline{X}$, то $\gamma_s < 1$ и $r_j^k < r_j^{k-1}$, $j \in J_s$.

Так как $(m + j_1) \in \overline{X}$ и $(m + j_0) \in X$, то в соответствии с приведенными рассуждениями $r_{j_0}^k > r_{j_0}^{k-1}$ и $r_{j_1}^k < r_{j_1}^{k-1}$, что и завершает доказательство неравенства (3.13), а вместе с ним и обоснование конечности рассматриваемого метода отыскания равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. **Форд Л., Фалкерсон Д.** Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

4. **Шмырёв В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 286, № 5. С. 1062–1066.
5. **Шмырёв В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. Вып. 31. С. 137–155.
6. **Шмырёв В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 163–175.
7. **Шмырёв В. И.** Об отыскании равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами и дополнительными ограничениями финансового типа // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 45. С. 66–86.
8. **Шмырёв В. И., Шмырёва Н. В.** Итеративный алгоритм нахождения равновесия в линейной модели обмена // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 130–146. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 28).

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
12 октября 1998 г.