ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1999. Серия 2. Том 6, № 2, 3–11

УДК 519.87+519.854

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА СТАНДАРТИЗАЦИИ С УСЛОВИЕМ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА*)

Л. Е. Горбачевская, В. Т. Дементьев,
Ю. В. Шамардин

Исследуется целочисленная линейная задача двухуровневого программирования, обобщающая задачу стандартизации [1]. Рассмотрены случаи, когда поставленная задача решается эффективно. Показана ее сводимость к известной задаче о выборе подмножества строк в паре матриц.

Введение

Многие модели исследования операций формулируются в виде экстремальных задач:

$$F(x) \to \min_x, \quad x \in X,$$

когда требуется найти наилучшее по критерию $F(x)$ решение x^* из множества X допустимых решений. Подобные задачи можно назвать *одноуровневыми*. В последние годы внимание исследователей привлекают *двухуровневые* модели [7, 8, 10]. Они отражают ситуации, когда лицо, принимающее решение, должно учитывать поведение другой стороны, действующей по своему критерию. Двухуровневые модели имеют следующую структуру.

Задача верхнего уровня:

$$F(x, y^*) \to \min_x, \quad x \in X.$$

Задача нижнего уровня:

$$G(y) \to \min_y, \quad y \in Y(x).$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00482).

Элемент $y^* \in Y(x)$ — наилучшее решение задачи нижнего уровня при фиксированном элементе $x \in X$. Впервые двухуровневые модели принятия решений рассматривались в [9] при описании стратегий фирм, конкурирующих на одном рынке. В [3] подобные модели применялись для анализа задач распределения ресурсов в иерархических системах, состоящих из «центра» и связанных с ним производственных звеньев.

В настоящей работе исследуется двухуровневая модель выбора номенклатуры изделий. Их производитель стремится минимизировать свои затраты, зависящие от предпочтений потребителей продукции. Они выбирают те изделия из предлагаемых производителем, которые минимизируют закупочные и эксплуатационные расходы. Аналогично можно говорить о выборе пунктов производства некоторого продукта, когда потребительская сторона сама осуществляет привязку к ним точек спроса.

1. Постановка задачи

Введем обозначения:

$I = \{1, \dots, n\}$ — множество изделий;

$J = \{1, \dots, m\}$ — множество потребителей;

c_i^0 — затраты на подготовку производства изделия i;

c_{ij} — затраты, связанные с производством и реализацией изделия i потребителю j;

d_{ij} — закупочные и эксплуатационные расходы потребителя j при использовании изделия i;

x_i — переменная выбора производителем изделия i ($x_i \in \{0, 1\}$, $x = (x_i)$);

$I(x) = \{i \in I \mid x_i = 1\}$ — список изделий, выбираемых в варианте x;

X — множество всех векторов $x \neq 0$ с компонентами 0 и 1;

y_{ij} — переменная выбора потребителем j изделия i ($y_{ij} \in \{0, 1\}$, $y = (y_{ij})$);

$Y(x)$ — множество возможных вариантов y потребительского выбора. Оно описывается ограничениями:

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \quad y_{ij} \leqslant x_i, \quad i \in I,\ j \in J.$$

В принятых обозначениях двухуровневая модель выбора номенклатуры изделий имеет следующий вид.

Задача верхнего уровня (производственная):

$$F(x, y^*) = \sum_{i \in I} c_i^0 x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}^* \to \min_x, \quad x \in X. \tag{1}$$

Задача нижнего уровня (потребительская):

$$G(y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij} \to \min_{y}, \quad y \in Y(x). \tag{2}$$

Через $y^* = (y^*_{ij})$ обозначено оптимальное решение задачи (2). Будем предполагать, что $d_{ij} \neq d_{kj}$ при всех j и $i \neq k$. При этом условии матрица y^* определяется единственным образом: $y^*_{ij} = 1$, если $d_{ij} = \min\{d_{kj} \mid k \in I(x)\}$, и $y^*_{ij} = 0$ в противном случае. Отметим, что в [6] изучалась модель аналогичного содержания, когда оптимальный потребительский выбор y^* может быть неоднозначен, но производитель имеет возможность корректировать затраты, связанные с реализацией изделий потребителям.

Покажем, что к двухуровневой задаче (1), (2) сводится задача стандартизации [1], которая в принятых обозначениях имеет следующую формулировку:

$$C(x) = \sum_{i \in I} c_i^0 x_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in I(x)} c_{ij} \to \min_{x}, \quad x \in X. \tag{3}$$

Действительно, по матрице (c_{ij}) нетрудно построить такую матрицу (d_{ij}), что $d_{ij} < d_{kj}$, если $c_{ij} \leqslant c_{kj}$. В этом случае $F(x, y^*) = C(x)$ при всех $x \in X$. Следовательно, задача (3) сводится к (1), (2).

Поскольку задача (3) является NP-трудной, задача (1), (2) также NP-трудна. Эффективно разрешимые случаи задачи (3) определяются свойствами матрицы (c_{ij}). Так, например, если матрица (c_{ij}) обладает свойством «связности» или «квазивыпуклости», то задача (3) решается методом динамического программирования с полиномиальной сложностью [1]. Ниже доказывается, что если матрица (d_{ij}) обладает упомянутыми свойствами, то задача (1), (2) может быть решена за полиномиальное время. В разд. 4 задача (1), (2) сводится к задаче о выборе подмножества строк в паре матриц, методы решения которой достаточно разработаны [1, 2, 4, 5].

2. Свойство связности

Пусть x — произвольный вектор из X. Введем определения, аналогичные [1]. *Областью применения* изделия $i \in I(x)$ называется множество

$$J_i(x) = \{j \in J \mid y^*_{ij} = 1\} = \{j \in J \mid d_{ij} = \min_{k \in I(x)} d_{kj}\} \tag{4}$$

потребителей этого изделия. В силу условия $d_{ij} \neq d_{kj}$ области применения определяются однозначно. Множество $J_i(x)$ называется *связным*, если $J_i(x) = \{j, j+1, \ldots, k\}$, т. е. является целочисленным сегментом $[j, k]$.

Матрица (d_{ij}) называется *связной*, если для любых строк $i, k \in I$ разность $d_{ij} - d_{kj}$ меняет знак не более одного раза при монотонном изменении индекса $j \in J$. Далее в этом пункте матрица (d_{ij}) предполагается связной.

Множество (4) может быть пустым. Положим $I_0(x) = \{i \in I(x) \mid J_i(x) = \varnothing\}$. Для простоты изложения ограничимся ситуацией, когда $c_i^0 \geqslant 0$ при всех $i \in I$. В этом случае найдется оптимальное решение x^* задачи (1) такое, что $I_0(x^*) = \varnothing$. Поэтому достаточно рассматривать варианты выбора изделий из множества $X' = \{x \in X \mid I_0(x) = \varnothing\}$.

Лемма 1. *При любом векторе $x \in X'$ все изделия $i \in I(x)$ имеют связные области применения.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся вектор $x \in X'$ и три потребителя j, k и l, $j < k < l$, двух различных изделий $p, q \in I(x)$ такие, что $j, l \in J_p(x)$ и $k \in J_q(x)$. Это означает выполнение неравенств

$$d_{pj} - d_{qj} < 0, \quad d_{pk} - d_{qk} > 0, \quad d_{pl} - d_{ql} < 0.$$

Таким образом, разность $d_{ps} - d_{qs}$ изменяет знак по крайней мере дважды, когда индекс s пробегает множество J. Получаем противоречие с условием связности матрицы (d_{ij}). Следовательно, утверждение верно. Лемма 1 доказана.

При любой нумерации строк матрицы (d_{ij}) свойство связности сохраняется. Будем считать, что изделия в исходном списке I занумерованы по предпочтению первого потребителя:

$$d_{11} < d_{21} < \ldots < d_{n1}. \tag{5}$$

Полезность такой нумерации выясняет

Лемма 2. *Пусть $j \in J_i(x)$ и $k \in J_l(x)$. Тогда если $j < k$ и $i \neq l$, то $i < l$.*

Доказательство. Из условий леммы следуют неравенства

$$d_{ij} - d_{lj} < 0, \quad d_{ik} - d_{lk} > 0.$$

С учетом связности матрицы (d_{ij}) получаем $d_{i1} - d_{l1} < 0$. В силу (5) это возможно только при $i < l$. Лемма 2 доказана.

Пусть $x \in X'$ и $I(x) = \{i_1, \ldots, i_s\}$, где

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n. \tag{6}$$

Из лемм 1 и 2 следует, что области применения изделий $i_k \in I(x)$ имеют вид

$$J_{i_k}(x) = [j_{k-1} + 1, j_k], \quad k = 1, \ldots, s, \tag{7}$$

$$0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_s = m, \tag{8}$$

т. е. упорядочены так же, как и выбираемые изделия. В граничных точках областей применения выполняются неравенства

$$d_{i_k j_k} < d_{i_{k+1} j_k}, \quad d_{i_k, j_k+1} > d_{i_{k+1}, j_k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1. \tag{9}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 3. *Пусть наборы* $\{i_1, \dots, i_s\}$ *и* $\{j_1, \dots, j_s\}$ *удовлетворяют* (6), (8) *и* (9). *Тогда для вектора* $x \in X$ *такого, что* $I(x) = \{i_1, \dots, i_s\}$, *справедливо* (7).

Доказательство. В силу (9) разность $d_{i_k j} - d_{i_{k+1} j}$, рассматриваемая как функция аргумента $j \in J$, меняет знак при переходе от $j = j_k$ к $j = j_k + 1$. Из этого факта и условия связности матрицы (d_{ij}) следует, что равенство

$$d_{i_k j} = \min\{d_{i_p j} \mid p = 1, \dots, s\}$$

справедливо только при значениях $j \in [j_{k-1} + 1, j_k]$. Таким образом, соотношение (7) верно. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Если матрица* (d_{ij}) *связна и* $c_i^0 \geqslant 0$, $i \in I$, *то задача* (1), (2) *сводится к следующей задаче: найти*

$$\min_{(i_k, j_k), s} \sum_{k=1}^{s} f(i_k, j_{k-1}, j_k) \tag{10}$$

при ограничениях

$$1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n, \quad 0 = j_0 < j_1 < \dots < j_s = m, \tag{11}$$

$$d_{i_k j_k} < d_{i_{k+1} j_k}, \quad d_{i_k, j_k+1} > d_{i_{k+1}, j_k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1, \tag{12}$$

$$1 \leqslant s \leqslant n. \tag{13}$$

Доказательство. Положим

$$f(p, r, q) = c_p^0 + \sum_{j=r+1}^{q} c_{pj}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \ 0 \leqslant r < q \leqslant m.$$

Пусть $x \in X'$ и $I(x) = \{i_1, \dots, i_s\}$. В силу лемм 1 и 2 области применения изделий i_k имеют вид (7). Поэтому

$$F(x, y^*) = \sum_{k=1}^{s} f(i_k, j_{k-1}, j_k). \tag{14}$$

Пусть наборы $\{i_1, \dots, i_s\}$ и $\{j_1, \dots, j_s\}$ удовлетворяют ограничениям (11)–(13). Рассмотрим вектор $x \in X$, определяемый условием $I(x) = \{i_1, \dots, i_s\}$. По лемме 3 области применения изделий i_k имеют вид (7).

Поэтому, как и выше, верно равенство (14). Следовательно, исходная задача (1), (2) сводится к (10)–(13). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим решение задачи (10)–(13) методом динамического программирования. Введем обозначение

$$B(p,q) = \min_{(i_k,j_k),s} \sum_{k=1}^{s} f(i_k, j_{k-1}, j_k),$$

где минимум берется при ограничениях

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s = p, \quad 0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_s = q, \quad 1 \leqslant s \leqslant p,$$

и (12). Параметры p и q лежат в отрезках $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant m$. Величина

$$\min\{B(p,m) \mid 1 \leqslant p \leqslant n\}$$

равна минимуму (10). Обычными для динамического программирования рассуждениями получаем рекуррентное соотношение

$$B(p,q) = \min\{f(p,0,q),\ B'(p,q)\}, \quad B'(p,q) = \min_{i,j}\{B(i,j) + f(p,j,q)\}. \tag{15}$$

Минимум в последнем выражении ищется при ограничениях

$$1 \leqslant i < p, \quad 1 \leqslant j < q, \quad d_{ij} < d_{pj}, \quad d_{i,j+1} > d_{p,j+1}.$$

В случае их несовместности полагаем $B'(p,q) = \infty$. Схема (15) реализуется за $O(n^2m^2)$ арифметических операций и требует $O(nm)$ ячеек памяти. Расчет и хранение чисел $f(p,r,q)$ требуют $O(nm)$ операций и $O(nm)$ ячеек памяти. Следовательно, в условиях теоремы 1 задача (1), (2) может быть решена с временной сложностью $O(n^2m^2)$ при объеме памяти $O(nm)$.

3. Свойство квазивыпуклости

Матрица (d_{ij}) называется *квазивыпуклой* [1], если

$$d_{kj} \leqslant \max\{d_{ij},\ d_{lj}\}$$

при всех j и всех i, k, l таких, что $i < k < l$.

Теорема 2. *Если матрица (d_{ij}) квазивыпукла, то задача (1), (2) сводится к следующей задаче: найти*

$$\min_{(i_k),s} \sum_{k=1}^{s} f(i_{k-1}, i_k) \tag{16}$$

при условиях

$$0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_s \leqslant n, \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $I(x) = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $i_1 < \ldots < i_s$. Рассмотрим потребителя $j \in J$. В функционале (1) величина $\sum\limits_{i \in I} c_{ij} y^*_{ij}$ равна $c_{i_t j}$, где $i_t = \arg\min\{d_{ij} \mid i \in I(x)\}$. Положим

$$\chi(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a < 0, \\ 0, & \text{если } a \geqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая условие $d_{ij} \neq d_{kj}$ и свойство квазивыпуклости матрицы (d_{ij}), получаем

$$d_{i_1 j} > \ldots > d_{i_t j}, \quad d_{i_t j} < \ldots < d_{i_s j}.$$

Поэтому

$$\sum_{i \in I} c_{ij} y^*_{ij} = c_{i_1 j} + \sum_{k=2}^{s} (c_{i_k j} - c_{i_{k-1} j}) \chi(d_{i_k j} - d_{i_{k-1} j}). \tag{18}$$

Определим функцию $f(u, v)$ следующим образом:

$$f(u, v) = c^0_v + \sum_{j \in J} (c_{vj} - c_{uj}) \chi(d_{vj} - d_{uj}), \quad 1 \leqslant u < v \leqslant n,$$

$$f(0, v) = c^0_v + \sum_{j \in J} c_{vj}, \quad 1 \leqslant v \leqslant n.$$

Полагая $i_0 = 0$ и учитывая (18), получаем

$$F(x, y^*) = \sum_{k=1}^{s} f(i_{k-1}, i_k).$$

Следовательно, задача (1), (2) сводится к (16), (17). Теорема 2 доказана.

Расчет и хранение чисел $f(u, v)$ требуют $O(n^2 m)$ операций и $O(n^2)$ ячеек памяти. Вычислительная схема метода динамического программирования для задачи (16), (17) реализуется за $O(n^2)$ операций при объеме памяти $O(n)$ [1]. Поэтому в условиях теоремы 2 задача (1), (2) может быть решена с временной сложностью $O(n^2 m)$ при объеме памяти $O(n^2)$.

4. Сводимость к задаче о выборе подмножества строк в паре матриц

Рассмотрим задачу (1), (2) в общем случае.

Теорема 3. *Задача (1), (2) сводится к задаче следующего вида: найти*

$$\min_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in I} c^0_i x_i + \sum_{j \in J} \max_{i \in I(x)} a_{ij} + \sum_{j \in J} \min_{i \in I(x)} b_{ij} \right\}. \tag{19}$$

Доказательство. Для каждого столбца $j \in J$ матрицы (c_{ij}) достаточно построить векторы (a_{ij}) и (b_{ij}), удовлетворяющие равенству

$$\sum_{i\in I} c_{ij}y^*_{ij} = \max_{i\in I(x)} a_{ij} + \min_{i\in I(x)} b_{ij} \tag{20}$$

при всех $x \in X$. Тогда значения функционалов (1) и (19) совпадают на множестве X и, следовательно, задача (1), (2) сводится к (19).

Зафиксируем индекс $j \in J$, и пусть $d_{i_1 j} < \ldots < d_{i_n j}$. Положим

$$a_{i_k j} = c_{i_1 j} + \sum_{l=1}^{k-1} \min\{0, c_{i_{l+1} j} - c_{i_l j}\},$$

$$b_{i_k j} = \sum_{l=1}^{k-1} \max\{0, c_{i_{l+1} j} - c_{i_l j}\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что $a_{i_1 j} \geqslant \ldots \geqslant a_{i_n j}$, $b_{i_1 j} \leqslant \ldots \leqslant b_{i_n j}$. Рассмотрим произвольный вектор $x \in X$, и пусть $i_t = \arg\min\{d_{ij} \mid i \in I(x)\}$. Тогда $I(x) \subseteq \{i_t, \ldots, i_n\}$. Поэтому

$$a_{i_t j} = \max_{i\in I(x)} a_{ij}, \quad b_{i_t j} = \min_{i\in I(x)} b_{ij}.$$

С учетом последних двух равенств получаем

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} c_{ij}y^*_{ij} &= c_{i_t j} = c_{i_1 j} + \sum_{l=1}^{t-1}(c_{i_{l+1} j} - c_{i_l j}) \\ &= c_{i_1 j} + \sum_{l=1}^{t-1}(\min\{0,\ c_{i_{l+1} j} - c_{i_l j}\} + \max\{0,\ c_{i_{l+1} j} - c_{i_l j}\}) \\ &= a_{i_t j} + b_{i_t j} = \max_{i\in I(x)} a_{ij} + \min_{i\in I(x)} b_{ij}.\end{aligned}$$

Следовательно, равенство (20) выполняется. Теорема 3 доказана.

Таким образом, решение задачи (1), (2) в общем случае можно искать точными и приближенными методами [1, 2, 4, 5], разработанными для задачи о выборе подмножества строк в паре матриц (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Береснев В. Л., Гончаров Е. Н.** Приближенный алгоритм для задачи минимизации полиномов от булевых переменных // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 2. С. 3–19.

3. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
4. **Гончаров Е. Н.** Метод ветвей и границ для простейшей двухуровневой задачи размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 1. С. 19–39.
5. **Гончаров Е. Н., Кочетов Ю. А.** Поведение вероятностных жадных алгоритмов для многостадийной задачи размещения // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 1. С. 12–32.
6. **Горбачевская Л. Е.** Алгоритмы и сложность решения двухуровневых задач стандартизации с коррекцией дохода // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 2. С. 20–33.
7. **Ben-Ayed O.** Bilevel linear programming // Comput. Oper. Res. 1993. V. 20, N 5. P. 485–501.
8. **Shimizu K., Ishizuka Y., Bard J. F.** Nondiffentiable and two-level mathematical programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
9. **Stackelberg H. V.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.
10. **Vicente L. N., Calamai P. H.** Bilevel and multilevel programming: a bibliography review // J. Global Optim. 1994. V. 5, N 3. P. 291–306.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
20 июля 1999 г.