ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1999. Серия 2. Том 6, № 2, 12–22

УДК 519.852

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ*)

М. Р. Давидсон

Предлагается модификация метода потенциальных функций [1] для решения задачи линейного программирования. Метод применяется к ее двойственной формулировке. По приближенному решению двойственной задачи строится приближенное решение исходной задачи. Приводится оценка времени работы алгоритма.

Многие прикладные задачи оптимизации характеризуются большим числом переменных и ограничений. Поиск точного решения подобных задач представляет значительную трудность. Поэтому в последнее время растет интерес исследователей к разработке способов приближенного решения экстремальных задач, в том числе задач линейного программирования. Один из таких способов основан на методе штрафных функций специального вида, называемых «потенциальными».

Этот метод с использованием логарифмического потенциала рассмотрен в [4] на примере задач о многопродуктовых потоках в сетях. Применение экспоненциального потенциала для того же класса задач предложено в [5]. В [2] метод получил дальнейшее развитие. Описанные там алгоритмы имеют существенно лучшие оценки числа шагов. В [1] разработана общая схема метода потенциальных функций для решения выпуклых задач об оптимальном распределении ресурсов. Тесты показали, что методы этого типа весьма эффективны [3].

В настоящей работе используется подход, несколько отличный от [1]. Метод применяется к задаче, двойственной к исходной. Затем по приближенному решению двойственной задачи строится приближенное решение прямой задачи. Это требует модификации общей схемы метода. Изменения относятся к построению потенциальной функции и к правилу останова алгоритма.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00786).

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования, записанную в матричной форме:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \langle b, \alpha \rangle + \langle c, \beta \rangle \to \max_{\alpha, \beta} \tag{1}$$

при ограничениях

$$D^T \alpha + B^T \beta = d, \quad \alpha, \beta \geqslant 0. \tag{2}$$

Выпишем задачу, двойственную к (1), (2):

$$\langle d, y \rangle \to \min_y \tag{3}$$

при ограничениях

$$Dy \geqslant b, \quad By \geqslant c. \tag{4}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов; D и B — матрицы размерностей $n \times m$ и $k \times m$; $b, \alpha \in R^n$, $c, \beta \in R^k$, $d, y \in R^m$.

Будем предполагать, что задачи (1), (2) и (3), (4) имеют решения. Следовательно, экстремумы (1) и (3) равны. Их значение обозначим через φ^*.

Пусть δ — заданное положительное число. Требуется найти приближенное решение задачи (1), (2), т. е. такую точку $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, удовлетворяющую ограничениям (2), что

$$\varphi^* - \varphi(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant \delta. \tag{5}$$

Сформулируем условия, обеспечивающие корректность излагаемых ниже конструкций. Введем обозначение

$$S(\lambda) = \left\{ \alpha \in R^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i \leqslant \lambda, \ \alpha \geqslant 0 \right\}.$$

Условие 1. Задано такое число $\lambda_0 > 0$, что хотя бы для одного оптимального решения (α^*, β^*) задачи (1), (2) выполняется включение $\alpha^* \in S(\lambda_0)$.

Обозначим через $D_1, \ldots, D_n$ строки матрицы D. Положим $Y = \{y \in R^m \mid By \geqslant c\}$. Отметим, что $Y \neq \varnothing$, поскольку задача (3), (4) имеет допустимые решения.

Условие 2. На множестве Y функции $\langle D_i, y \rangle$, $i = 1, \ldots, n$, ограничены снизу и сверху.

Лемма 1. *При любом векторе $\gamma \in R^n$ задача*

$$\min_{y\in Y}\langle d + D^T\gamma, y\rangle \tag{6}$$

имеет решение.

Доказательство. Пусть (α, β) — произвольная точка, удовлетворяющая (2). Так как

$$d = D^T\alpha + B^T\beta,$$

после простых преобразований получаем

$$\langle d + D^T\gamma, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \gamma_i)\langle D_i, y\rangle + \langle By, \beta\rangle.$$

Поэтому на множестве Y функционал (6) ограничен снизу в силу неравенства $By \geqslant c$ и условия 2. Следовательно, минимум (6) достигается на Y. Лемма 1 доказана.

Задачу (6) будем считать «элементарной», предполагая заданным алгоритм, который находит оптимальные решения задачи (6) и двойственной к ней задачи.

Введем обозначения:

$$f_0(y) \equiv 0, \quad f_i(y) = b_i - \langle D_i, y\rangle, \quad i = 1, \dots, n, \tag{7}$$

$$a = 2\max_{i=1,\dots,n}\max_{y\in Y}|f_i(y)|, \tag{8}$$

$$F(y) = \max_{i=0,\dots,n}\{f_i(y)/a\}.$$

По условию 2 величина a конечна. Если $a = 0$, то максимум (1) достигается в точке $(0, \beta^*)$, где β^* — решение задачи, двойственной к задаче $\min\{\langle d, y\rangle \mid y \in Y\}$. Далее считаем, что $a > 0$. Условие 1 позволяет доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *При всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ справедливо равенство*

$$\varphi^* = \min_{y\in Y}\{\langle d, y\rangle + \lambda a F(y)\}. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим через

$$L(\alpha, \beta, y) = \langle b, \alpha\rangle + \langle c, \beta\rangle + \langle d - D^T\alpha - B^T\beta, y\rangle$$
$$= \langle d, y\rangle + \langle b - Dy, \alpha\rangle + \langle c - By, \beta\rangle$$

функцию Лагранжа, связывающую задачи (1), (2) и (3), (4). Пусть (α^*, β^*) — такое оптимальное решение задачи (1), (2), что $\alpha^* \in S(\lambda_0)$. Очевидно, что $\alpha^* \in S(\lambda)$ при всех $\lambda > \lambda_0$, поскольку $S(\lambda_0) \subset S(\lambda)$. Учитывая равенство

$$\max_{\alpha\in S(\lambda)}\langle b - Dy, \alpha\rangle = \lambda a F(y),$$

получаем цепочку соотношений

$$\varphi^* = \max_{\alpha,\beta\geqslant 0} \min_y L(\alpha,\beta,y) = \min_y L(\alpha^*,\beta^*,y)$$
$$= \max_{\alpha\in S(\lambda),\beta\geqslant 0} \min_y L(\alpha,\beta,y) = \min_y \max_{\alpha\in S(\lambda),\beta\geqslant 0} L(\alpha,\beta,y)$$
$$= \min_{y\in Y}\{\langle d,y\rangle + \lambda aF(y)\},$$

из которой следует (9). Лемма 2 доказана.

2. Потенциальная функция

По отношению к задаче (3), (4) задачу (9) можно интерпретировать как штрафную с функцией штрафа $F(y)$. Рассмотрим функцию

$$G(y,\varepsilon) = \varepsilon \ln \sum_{i=0}^{n} \exp\left(\frac{f_i(y)}{a\varepsilon}\right), \quad y\in R^m,\ \varepsilon>0,$$

называемую *потенциальной* и представляющую гладкую аппроксимацию функции $F(y)$. Аналогичная потенциальная функция использована в [1].

Лемма 3. *Функция $G(y,\varepsilon)$ выпукла по y и не убывает по ε. Справедливы неравенства*

$$G(y,\varepsilon) - l\varepsilon \leqslant F(y) \leqslant G(y,\varepsilon). \tag{10}$$

(*Здесь и далее* $l = \ln(n+1)$.)

Доказательство. Пусть u и v — произвольные точки из R^m. Рассмотрим функцию

$$\rho(t) = G(u+vt,\varepsilon) = \varepsilon \ln \sum_{i=0}^{n} \eta_i(t), \qquad \text{где } \eta_i(t) = \exp(\zeta_i + \xi_i t).$$

Ее вторая производная $\rho''(t)$ неотрицательна, поскольку

$$\rho''(t) = \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \eta_i(t)\eta_j(t)(\xi_i-\xi_j)^2 \left(\sum_{i=0}^{n}\eta_i(t)\right)^{-2}.$$

Следовательно, функция $\rho(t)$ выпуклая. В силу произвольности u и v функция $G(y,\varepsilon)$ выпукла по y. Остальные утверждения леммы легко следуют из тождества

$$G(y,\varepsilon) = F(y) + \varepsilon \ln \sum_{i=0}^{n} \exp\left(\frac{f_i(y)-aF(y)}{a\varepsilon}\right).$$

Лемма 3 доказана.

Пусть y и z — произвольные точки из R^m. В силу выпуклости функции $G(y,\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$G(y,\varepsilon) - G(z,\varepsilon) \geqslant \langle g(z), y - z\rangle, \tag{11}$$

где

$$g(z) = \frac{\partial G(z,\varepsilon)}{\partial z} = -D^T h(z)/a. \tag{12}$$

Компоненты вектора $h(z) = (h_1(z), \dots, h_n(z))$ имеют вид

$$h_i(z) = \exp\left(\frac{f_i(z) - aG(z,\varepsilon)}{a\varepsilon}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(z) = 1 - \exp(-G(z,\varepsilon)/\varepsilon). \tag{13}$$

Следующая оценка доказана в [1].

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(z) f_i(z)/a \geqslant F(z) - l\varepsilon. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\mu = 2a\lambda_0, \qquad \psi(y,\varepsilon) = \langle d, y\rangle + \mu G(y,\varepsilon)$$

и рассмотрим следующий аналог задачи (9):

$$\psi^*(\varepsilon) = \min_{y\in Y} \psi(y,\varepsilon). \tag{15}$$

Из (10) и леммы 2 следует, что

$$\psi^*(\varepsilon) - \mu l\varepsilon \leqslant \varphi^* \leqslant \psi^*(\varepsilon). \tag{16}$$

Линеаризация функции $\psi(y,\varepsilon)$ в некоторой точке $z \in R^m$ порождает вспомогательную задачу

$$\langle d + \mu g(z), y\rangle \to \min_{y\in Y}. \tag{17}$$

В силу (12) и леммы 1 задача (17) и двойственная к ней задача

$$\langle c, \beta\rangle \to \max_{\beta} \qquad \text{при} \qquad B^T\beta = d + \mu g(z),\ \beta \geqslant 0,$$

имеют оптимальные решения, которые обозначим через v и w соответственно. Отметим, что

$$B^T w = d + \mu g(z), \tag{18}$$

$$\langle c, w\rangle = \langle d + \mu g(z), v\rangle. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть в точке $z \in Y$ выполняется неравенство*

$$\langle d + \mu g(z), z - v\rangle \leqslant 2\mu\varepsilon. \tag{20}$$

Тогда

a) *справедливы неравенства*

$$\psi(z, \varepsilon) - \psi^*(\varepsilon) \leqslant 2\mu\varepsilon, \tag{21}$$

$$F(z) \leqslant 2(l+2)\varepsilon, \tag{22}$$

$$|\langle d, z\rangle - \varphi^*| \leqslant \mu(l+2)\varepsilon; \tag{23}$$

b) *точка $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = (2\lambda_0 h(z), w)$ удовлетворяет ограничениям (2) и верно неравенство*

$$\varphi^* - \varphi(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant \mu(l+2)\varepsilon. \tag{24}$$

Доказательство. a) Из (11) следует неравенство

$$\psi(y, \varepsilon) \geqslant \psi(z, \varepsilon) + \langle d + \mu g(z), y - z\rangle.$$

Переходя в обеих частях к минимуму по $y \in Y$ и учитывая (20), получаем

$$\psi^*(\varepsilon) \geqslant \psi(z, \varepsilon) + \langle d + \mu g(z), v - z\rangle \geqslant \psi(z, \varepsilon) - 2\mu\varepsilon.$$

Следовательно, (21) верно.

В силу (10) и (16) имеем $F(z) \leqslant G(z, \varepsilon)$, $\psi^*(\varepsilon) \leqslant \varphi^* + \mu l\varepsilon$. Применяя эти неравенства и (21), получаем

$$\langle d, z\rangle + 2a\lambda_0 F(z) \leqslant \varphi^* + \mu(l+2)\varepsilon. \tag{25}$$

Из леммы 2 следует, что

$$\langle d, z\rangle + a\lambda_0 F(z) \geqslant \varphi^*. \tag{26}$$

Разность (25) и (26) дает (22).

Так как $F(z) \geqslant 0$, из (25) получаем

$$\langle d, z\rangle - \varphi^* \leqslant \mu(l+2)\varepsilon.$$

С учетом оценки (22) из (26) следует, что

$$\varphi^* - \langle d, z\rangle \leqslant \mu(l+2)\varepsilon.$$

Последние два неравенства равносильны (23).

b) Очевидно, что $\widetilde{\alpha} \geqslant 0$ и $\widetilde{\beta} \geqslant 0$. С учетом (12) и (18) получаем

$$B^T\widetilde{\beta} = B^T w = d + \mu g(z) = d - 2\lambda_0 D^T h(z) = d - D^T\widetilde{\alpha}.$$

Таким образом, ограничения (2) выполняются в точке $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$.

Учитывая (7), (12) и (19), нетрудно проверить, что

$$\varphi(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \langle d, z\rangle + \mu\sum_{i=1}^{n} h_i(z)f_i(z)/a + \langle d+\mu g(z), v-z\rangle.$$

С помощью неравенств (14), (20) и леммы 2 убеждаемся в том, что

$$\varphi(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \geqslant \langle d, z\rangle + \mu F(z) - \mu l\varepsilon - 2\mu\varepsilon \geqslant \varphi^* - \mu(l+2)\varepsilon.$$

Следовательно, оценка (24) верна. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет свести вопрос о приближенном решении задачи (1), (2), удовлетворяющем (5), к построению точки $z \in Y$, в которой неравенство (20) выполняется при условии

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\mu(l+2)}. \tag{27}$$

Ниже описываются алгоритмы нахождения точки z.

В силу (21) точка z является приближенным решением задачи (15) с погрешностью $2\mu\varepsilon$ по функционалу. Из неравенств (22) и (23) следует, что эту же точку z можно рассматривать как приближенное решение задачи (3), (4), на котором ограничения $Dy \geqslant b$ выполняются с погрешностью $2a(l+2)\varepsilon$, а значение функционала отклоняется от оптимума не более чем на $\mu(l+2)\varepsilon$.

3. Алгоритмы

Параметры δ и ε будем рассматривать при ограничениях

$$0 < \delta < \mu(l+2), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Через $P(u,\varepsilon)$ обозначим алгоритм, который, исходя из произвольной точки $u \in Y$, путем последовательных приближений находит точку $z \in Y$, удовлетворяющую условию (20) при данном ε.

Алгоритм $P(u,\varepsilon)$.

Шаг 1. Полагается $s = 1$, $u_1 = u$.

Шаг 2. Находится точка

$$v = \arg\min_{y\in Y}\langle d+\mu g(u_s), y\rangle. \tag{28}$$

Шаг 3. Если

$$\langle d+\mu g(u_s), u_s - v\rangle > 2\mu\varepsilon, \tag{29}$$

то полагается

$$u_{s+1} = \varepsilon^2 v + (1-\varepsilon^2)u_s, \quad s = s+1$$

и осуществляется возврат на шаг 2. В противном случае полагается $z = u_s$ и алгоритм заканчивает работу.

Конец

В силу условия $\varepsilon \leqslant 1$ все точки u_s, $s \geqslant 2$, лежат в Y. Обоснование конечности алгоритма $P(u,\varepsilon)$ дает

Лемма 5. *Если в точке* u_s *выполняется* (29), *то*

$$\psi(u_s,\varepsilon)-\psi(u_{s+1},\varepsilon)>\mu\varepsilon^3. \tag{30}$$

Доказательство использует рассуждения, аналогичные [1]. Для краткости записи положим

$$\xi_i=\varepsilon(f_i(v)-f_i(u_s))/a,\quad i=1,\dots,n. \tag{31}$$

С учетом (8) имеем

$$|\xi_i|\leqslant\varepsilon(|f_i(v)|+|f_i(u_s)|)/a\leqslant\varepsilon\leqslant 1.$$

Рассмотрим разность

$$\rho=G(u_{s+1},\varepsilon)-G(u_s,\varepsilon).$$

После несложных преобразований получаем

$$\rho=\varepsilon\ln\left(e^{-\frac{G(u_s,\varepsilon)}{\varepsilon}}+\sum_{i=1}^n h_i(u_s)e^{\xi_i}\right).$$

Применяя неравенство $\ln x\leqslant x-1$ и учитывая (13), получаем

$$\rho\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^n h_i(u_s)(e^{\xi_i}-1).$$

Поскольку $e^x-1\leqslant x+x^2$ при $x\leqslant 1$, имеем

$$\rho\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^n h_i(u_s)(\xi_i+\xi_i^2).$$

С учетом неравенств $|\xi_i|\leqslant\varepsilon$, $\sum\limits_{i=1}^n h_i(u_s)\leqslant 1$ получаем

$$\rho\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^n h_i(u_s)\xi_i+\varepsilon^3.$$

После тождественных преобразований правой части с учетом (12) и (31) имеем

$$\rho\leqslant\varepsilon^2\langle g(u_s),v-u_s\rangle+\varepsilon^3. \tag{32}$$

Теперь перейдем к оценке разности

$$\Delta=\psi(u_s,\varepsilon)-\psi(u_{s+1},\varepsilon)=\varepsilon^2\langle d,u_s-v\rangle-\mu\rho.$$

Применяя последовательно неравенства (32) и (29), получаем

$$\Delta\geqslant\varepsilon^2\langle d+\mu g(u_s),u_s-v\rangle-\mu\varepsilon^3>2\mu\varepsilon^3-\mu\varepsilon^3=\mu\varepsilon^3.$$

Следовательно, неравенство (30) верно. Лемма 5 доказана.

Будем считать, что процесс решения «элементарной» задачи (28) занимает условную единицу времени. Длительностями других операций алгоритма $P(u,\varepsilon)$ пренебрегаем.

Теорема 2. *Время работы алгоритма $P(u,\varepsilon)$ не превосходит $O(\varepsilon^{-3})$.*

Доказательство. Обозначим через T время работы алгоритма $P(u,\varepsilon)$. В силу леммы 5 справедливо неравенство

$$T \leqslant 1 + \frac{\psi(u,\varepsilon) - \psi^*(\varepsilon)}{\mu\varepsilon^3}. \tag{33}$$

Оценим разность

$$\Delta = \psi(u,\varepsilon) - \psi^*(\varepsilon) = \langle d, u\rangle + \mu G(u,\varepsilon) - \psi^*(\varepsilon).$$

С учетом неравенств (10), (16) и условия $\varepsilon \leqslant 1$ получаем

$$\Delta \leqslant \langle d, u\rangle + \mu F(u) + \mu l - \varphi^*. \tag{34}$$

Из (33), (34) следует, что $T = O(\varepsilon^{-3})$. Теорема 2 доказана.

Если взять $\varepsilon = \delta/(\mu(l+2))$, то в силу теоремы 2 с помощью алгоритма $P(u,\varepsilon)$ можно построить приближенное решение исходной задачи (1), (2) за время, не превосходящее $O(\delta^{-3})$. Более экономичным оказывается алгоритм (обозначим его через Q), который находит точку $z \in Y$, удовлетворяющую (20), уменьшая параметр ε в ходе последовательных приближений вплоть до выполнения условия (27).

Алгоритм Q.

Шаг 1. Полагается $r = 1$, $\varepsilon_1 = 1$ и

$$z_1 = \arg\min_{y\in Y}\langle d, y\rangle. \tag{35}$$

Шаг 2. Применяется алгоритм $P(z_r,\varepsilon_r)$. Вычисляемая им точка обозначается через z_{r+1}.

Шаг 3. Если

$$\varepsilon_r > \frac{\delta}{\mu(l+2)}, \tag{36}$$

то полагается $\varepsilon_{r+1} = \varepsilon_r/2$, $r = r+1$ и происходит возврат на шаг 2. В противном случае полагается $z = z_{r+1}$ и алгоритм Q заканчивает работу.

Конец

Очевидно, что алгоритм Q конечен. Обозначим через R число обращений алгоритма Q к шагу 2 и через T_r время работы процедуры $P(z_r,\varepsilon_r)$, $r = 1,\ldots,R$. Пренебрегая длительностями выполнения шагов 1 и 3, величину

$$T = \sum_{r=1}^{R} T_r \tag{37}$$

будем считать временем работы алгоритма Q. Для оценки времени T потребуется следующая

Лемма 6. *В любой точке $u \in Y$ справедливо неравенство*

$$\psi(u,\varepsilon/2) - \psi^*(\varepsilon/2) \leqslant \psi(u,\varepsilon) - \psi^*(\varepsilon) + \mu l\varepsilon. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть y — произвольная точка из Y. Из (10) получаем

$$G(y,\varepsilon) \leqslant F(y) + l\varepsilon \leqslant G(y,\varepsilon/2) + l\varepsilon.$$

Поэтому $\psi(y,\varepsilon) \leqslant \psi(y,\varepsilon/2) + \mu l\varepsilon$. Переходя в обеих частях к минимуму по $y \in Y$, получаем $\psi^*(\varepsilon) \leqslant \psi^*(\varepsilon/2) + \mu l\varepsilon$. Учитывая это неравенство и тот факт, что $\psi(u,\varepsilon/2) \leqslant \psi(u,\varepsilon)$ в силу монотонности функции G (см. лемму 3), имеем

$$\psi(u,\varepsilon/2) - \psi^*(\varepsilon/2) \leqslant \psi(u,\varepsilon) - \psi^*(\varepsilon/2) \leqslant \psi(u,\varepsilon) - \psi^*(\varepsilon) + \mu l\varepsilon.$$

Следовательно, неравенство (38) верно. Лемма 6 доказана.

Теорема 3. *Время работы алгоритма Q не превосходит $O(\delta^{-2})$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$T < 16\mu^2(l+2)^3\delta^{-2}. \tag{39}$$

Предварительно докажем неравенства

$$4^R < 16\mu^2(l+2)^2\delta^{-2}, \tag{40}$$

$$T_r < (2l+5)4^{r-1}, \quad r = 1,\dots,R. \tag{41}$$

Из условий (36) и $\delta < \mu(l+2)$ следуют неравенства

$$R \geqslant 2, \quad \varepsilon_{R-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{R-2} > \frac{\delta}{\mu(l+2)}.$$

Из последнего соотношения следует (40).

Пусть $r \geqslant 2$. Введем обозначения

$$\Delta_r = \psi(z_r,\varepsilon_r) - \psi^*(\varepsilon_r), \quad \eta_r = \psi(z_r,\varepsilon_{r-1}) - \psi^*(\varepsilon_{r-1}).$$

Поскольку $\varepsilon_r = \varepsilon_{r-1}/2$, по лемме 6 получаем $\Delta_r \leqslant \eta_r + \mu l\varepsilon_{r-1}$. В силу условия окончания работы алгоритма $P(z_{r-1},\varepsilon_{r-1})$ и утверждения (21) имеем $\eta_r \leqslant 2\mu\varepsilon_{r-1}$. Поэтому $\Delta_r \leqslant \mu(l+2)\varepsilon_{r-1}$. Применяя лемму 5, получаем

$$T_r \leqslant 1 + \frac{\Delta_r}{\mu(\varepsilon_r)^3} \leqslant 1 + \frac{\mu(l+2)\varepsilon_{r-1}}{\mu(\varepsilon_r)^3} = 1 + \frac{2(l+2)}{(\varepsilon_r)^2} < (2l+5)4^{r-1}.$$

Следовательно, неравенство (41) верно при любом $r \geqslant 2$.

Рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим через y^* оптимальное решение задачи (3), (4). Из (16) и (35) следует, что

$$\psi^*(1) \geqslant \varphi^* = \langle d, y^*\rangle, \quad \langle d, y^*\rangle \geqslant \langle d, z_1\rangle.$$

Поэтому $\psi^*(1) \geqslant \langle d, z_1\rangle$. С учетом последнего неравенства, (10) и леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} T_1 &\leqslant 1 + (\psi(z_1, 1) - \psi^*(1))/\mu = 1 + (\langle d, z_1\rangle - \psi^*(1))/\mu + G(z_1, 1) \\ &\leqslant 1 + G(z_1, 1) \leqslant 1 + F(z_1) + l \leqslant 3/2 + l < 5 + 2l. \end{aligned}$$

Поэтому (41) верно при $r = 1$.

Из соотношений (37), (40) и (41) следует, что

$$\begin{aligned} T = \sum_{r=1}^{R} T_r < (2l+5)\sum_{r=1}^{R} 4^{r-1} \\ = (2l+5)\frac{4^R - 1}{4-1} < (l+2)4^R < 16\mu^2(l+2)^3\delta^{-2}. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (39) верно и $T = O(\delta^{-2})$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Grigoriadis M. D., Khachiyan L. G.** Fast approximation schemes for convex programs with many blocks and coupling constraints // SIAM J. Optim. 1994. V. 4, N 1. P. 86–107.
2. **Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Stein C., Tardos E., Tragoudas S.** Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems // Proc. of the 23rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing. New York: ACM Press, 1991. P. 101–111.
3. **Leong T., Shor P., Stein C.** A combinatorial multicommodity flow algorithm. Working paper. 1995.
4. **Schultz G. L., Meyer R. R.** An interior point method for block angular optimization // SIAM J. Optim. 1991. V. 1, N 4. P. 583–602.
5. **Shahrokhi F., Matula D. W.** The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1990. V. 37, N 2. P. 318–334.

Адрес автора:

МГУ, факультет ВМиК,
Воробьевы горы,
119899 Москва, Россия.
E-mail: davidson@ccas.ru

Статья поступила
12 марта 1997 г.,
переработанный вариант —
24 февраля 1999 г.