ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1999. Серия 2. Том 6, № 2, 23–31

УДК 519.10

О ДВУХ ТИПАХ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

В. А. Емеличев, Ю. В. Никулин

Получены формулы для вычисления радиусов устойчивости и квазиустойчивости множества Парето векторной задачи булева программирования с линейно квадратичными частными критериями. Указаны необходимые и достаточные условия этих типов устойчивости.

Известно [7, 10], что совпадение множества Парето с множеством Слейтера (с множеством Смейла) является необходимым и достаточным условием устойчивости (квазиустойчивости) по векторному критерию множества Парето векторной задачи целочисленного программирования с линейными частными критериями. В настоящей статье показано, что этот результат переносится на векторные задачи булева программирования с линейно квадратичными частными критериями.

При исследовании устойчивости задач оптимизации естественно встает вопрос о количественной мере устойчивости, дескриптивное понятие которой было введено в [8, 9] для линейных скалярных траекторных задач. В соответствии с этим понятием в настоящей работе выведены формулы для радиусов устойчивости и квазиустойчивости по векторному критерию множества Парето рассматриваемой нелинейной векторной задачи булева программирования. Ранее аналогичные формулы были получены для линейных векторных задач дискретной оптимизации в [1–6].

1. Основные определения

Пусть $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $m \geqslant 1$ таковы, что при каждом $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ матрица $A_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$, а вектор-столбец $b_i \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$, т. е. $A \in \mathbf{R}^{n\times n\times m}$ и $b \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (код проекта Ф 97–266).

На множестве (допустимых) решений $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$, $|X| > 1$, зададим векторный критерий

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \longrightarrow \min_{x \in X},$$

компоненты которого (частные критерии) являются линейно квадратичными функционалами:

$$f_i(x) = \langle A_i x, x\rangle + \langle b_i, x\rangle, \quad i \in N_m.$$

Изменяя элементы пары (A, b), будем получать различные векторные критерии. Поэтому если предположить, что множество X зафиксировано, то пара (A, b) может служить для индексации векторного критерия, частные случаи которого будем обозначать через $f_i(x, A_i, b_i)$.

Под векторной (m-критериальной) линейно квадратичной задачей булева программирования $Z^m(A, b)$ будем понимать задачу нахождения множества Парето (иначе: множества эффективных решений)

$$P(A, b) = \{x \in X \mid \pi(x, A, b) = \varnothing\},$$

где

$$\pi(x, A, b) = \{x' \in X \mid q(x, x', A, b) \geqslant 0_{(m)},\ q(x, x', A, b) \neq 0_{(m)}\},$$
$$q(x, x', A, b) = (q_1(x, x', A_1, b_1), q_2(x, x', A_2, b_2), \dots, q_m(x, x', A_m, b_m)),$$
$$q_i(x, x', A_i, b_i) = f_i(x, A_i, b_i) - f_i(x', A_i, b_i),\ i \in N_m,$$
$$0_{(m)} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^m.$$

Ясно, что при $m = 1$ множество Парето превращается в множество оптимальных решений, а рассматриваемая задача — в обычную (скалярную) квадратичную экстремальную задачу с булевыми переменными. Такие задачи имеют широкую область приложений. Среди них отметим квадратичную задачу о назначениях, известные оптимизационные задачи на графах, играющие важную роль при автоматизации проектирования электронной аппаратуры: размещения, разбиения, компоновки, упаковки и др.

При любом $k \in \mathbf{N}$ в пространстве $\mathbf{R}^k$ зададим полярные друг к другу нормы l_∞ и l_1:

$$\| y \| = \max\{|y_i| \mid i \in N_k\}, \quad \| y \|^* = \sum_{i=1}^{k} |y_i|.$$

Под нормой матрицы $D = [d_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ будем понимать норму вектора $(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{nn-1}, d_{nn}) \in \mathbf{R}^{n^2}$.

Пусть $\epsilon > 0$ и $\Omega(\epsilon)$ — множество таких пар (A', b'), что

$$A' = (A'_1, A'_2, \ldots, A'_m), \quad b' = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_m),$$
$$A'_i \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad \| A'_i \| < \epsilon, \quad b'_i \in \mathbf{R}^n, \quad \| b'_i \| < \epsilon, \quad i \in N_m.$$

Задачу $Z^m(A + A', b + b')$, где $(A', b') \in \Omega(\epsilon)$,

$$A + A' = (A_1 + A'_1, A_2 + A'_2, \ldots, A_m + A'_m),$$
$$b + b' = (b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \ldots, b_m + b'_m),$$

полученную из исходной задачи $Z^m(A, b)$ путем такого сложения соответственно матриц и векторов, будем называть *возмущенной,* а пару (A', b') — *возмущающей.*

2. Лемма

Очевидны следующие соотношения, справедливые для любых векторов $x, x' \in \mathbf{E}^n$, и $c \in \mathbf{R}^n$:

$$|\langle c, x\rangle| \leqslant \| c \| \cdot \| x \|^*, \tag{1}$$
$$\| x - x'\|^* = \| x\|^* + \| x'\|^* - 2\langle x, x'\rangle, \tag{2}$$
$$\| \tilde{x} \|^* = (\| x\|^*)^2, \tag{3}$$
$$\langle \tilde{x}, \tilde{x}'\rangle = \langle x, x'\rangle^2, \tag{4}$$

где $\tilde{x} = (x_1x_1, x_1x_2, \ldots, x_nx_{n-1}, x_nx_n)$, $\tilde{x}' = (x'_1x'_1, x'_1x'_2, \ldots, x'_nx'_{n-1}, x'_nx'_n)$.

Заметим, что равенство (2), левая часть которого есть расстояние Хемминга между векторами x и x' в $\mathbf{E}^n$, легко доказывается методом математической индукции (по числу n).

Лемма. *Пусть при некотором $i \in N_m$ справедливо неравенство*

$$q_i(x, x', A_i, b_i) > \| A'_i \| \left((\| x \|^*)^2 + (\| x'\|^*)^2 - 2\langle x, x'\rangle^2\right) + \| b'_i \| \cdot \| x - x' \|^*,$$

где $x, x' \in X$, $b_i, b'_i \in \mathbf{R}^n$ и $A_i, A'_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Тогда

$$q_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) > 0.$$

Действительно, последовательно используя соотношения (1)–(4) и условие леммы, получаем

$$q_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \geqslant q_i(x, x', A_i, b_i) - |\langle A'_i x, x\rangle - \langle A'_i x', x'\rangle| - |\langle b'_i, x - x'\rangle|$$
$$\geqslant q_i(x, x', A_i, b_i) - \| A'_i \| \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} |x_s x_p - x'_s x'_p| - \| b'_i \| \cdot \| x - x'\|^*$$
$$= q_i(x, x', A_i, b_i) - \| A'_i \| \left(\| \tilde{x} \|^* + \| \tilde{x}'\|^* - 2\langle \tilde{x}, \tilde{x}'\rangle\right) - \| b'_i \| \cdot \| x - x'\|^*$$
$$= q_i(x, x', A_i, b_i) - \| A'_i \| \left((\| x \|^*)^2 + (\| x'\|^*)^2 - 2\langle x, x'\rangle^2\right) - \| b'_i \| \cdot \| x - x'\|^* > 0.$$

3. Устойчивость

По аналогии с [4, 6, 7, 10] задачу $Z^m(A,b)$ назовем *устойчивой,* если существует такое положительное число ϵ, что для любой пары $(A',b') \in \Omega(\epsilon)$ выполняется включение

$$P(A+A',b+b') \subseteq P(A,b).$$

В соответствии с [4, 6–9] *радиусом устойчивости* задачи $Z^m(A,b)$ назовем число

$$\rho_1^m(A,b) = \begin{cases} \sup Q_1(A,b), & \text{если } Q_1(A,b) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$Q_1(A,b) = \{\epsilon > 0 \mid \forall (A',b') \in \Omega(\epsilon)\ (P(A+A',b+b') \subseteq P(A,b))\}.$$

Поэтому задача $Z^m(A,b)$ устойчива тогда и только тогда, когда $\rho_1^m(A,b) > 0$.

Ясно, что в случае, когда $P(A,b) = X$, радиус устойчивости бесконечен. Задачу $Z^m(A,b)$, для которой множество $\bar{P}(A,b) := X \backslash P(A,b) \neq \varnothing$, будем называть *нетривиальной.*

Теорема 1. *Радиус устойчивости $\rho_1^m(A,b)$ нетривиальной задачи $Z^m(A,b)$, $m \geqslant 1$, имеет вид*

$$\rho_1^m(A,b)$$
$$= \min_{x \in \bar{P}(A,b)} \max_{x' \in X \backslash \{x\}} \min_{i \in N_m} \frac{q_i(x,x',A_i,b_i)}{(\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x' \rangle^2}. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через φ правую часть равенства (5). Ясно, что $\varphi \geqslant 0$. Сначала докажем неравенство

$$\rho_1^m(A,b) \geqslant \varphi. \tag{6}$$

Если $\varphi = 0$, то это неравенство очевидно.

Пусть $\varphi > 0$. Тогда согласно определению числа φ для любого решения $x \in \bar{P}(A,b)$ (в силу нетривиальности задачи такое решение существует) найдется такое решение $x' \in X \backslash \{x\}$, что при любом $i \in N_m$ выполняется неравенство

$$q_i(x,x',A_i,b_i) \geqslant \varphi\left((\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x' \rangle^2\right).$$

Отсюда и из леммы следует, что для всякой возмущающей пары $(A',b') \in \Omega(\varphi)$ при любом $i \in N_m$ справедливо неравенство

$$q_i(x,x',A+A',b+b') > 0.$$

Поэтому $x \in \bar{P}(A + A', b + b')$.

Таким образом, для любой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varphi)$ имеем

$$P(A + A', b + b') \subseteq P(A, b).$$

Следовательно, верна оценка (6).

Теперь покажем, что $\rho_1^m(A, b) \leqslant \varphi$. Согласно определению числа $\varphi \geqslant 0$ существует такой вектор $x \in \bar{P}(A, b)$, что для любого решения $x' \in X \backslash \{x\}$ найдется индекс $k = k(x') \in N_m$, при котором выполняется неравенство

$$\varphi \left((\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x' \rangle^2 \right) \geqslant q_k(x, x', A_k, b_k). \tag{7}$$

Далее, полагая $\epsilon > \varphi$, рассмотрим возмущающую пару (A', b'), где $A' = (A'_1, A'_2, \ldots, A'_m)$, $b' = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_m)$, а при любом $i \in N_m$ элементы квадратной матрицы $A'_i = [a'_{sp(i)}]$ порядка n и вектора $b'_i = (b'_{1(i)}, b'_{2(i)}, \ldots, b'_{n(i)})^T$ определяются по формулам

$$a'_{sp(i)} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x_s x_p = 0, \\ -\alpha, & \text{если } x_s x_p = 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$b'_{s(i)} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x_s = 0, \\ -\alpha, & \text{если } x_s = 1, \end{cases} \tag{9}$$

где $\varphi < \alpha < \epsilon$. Следовательно, $(A', b') \in \Omega(\epsilon)$.

Тогда с учетом неравенства (7) получаем

$$\begin{aligned} &q_k(x, x', A_k + A'_k, b_k + b'_k) \\ &= q_k(x, x', A_k, b_k) - \alpha \left((\| x' \|^*)^2 + (\| x \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x' \rangle^2 \right) < 0. \end{aligned}$$

Поэтому $x \in P(A + A', b + b')$. Таким образом, для любого числа $\epsilon > \varphi$ существует такая пара $(A', b') \in \Omega(\epsilon)$, что

$$P(A + A', b + b') \not\subseteq P(A, b).$$

Следовательно, при любом $\epsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho_1^m(A, b) < \epsilon$, т. е. $\rho_1^m(A, b) \leqslant \varphi$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Радиус устойчивости $\rho_1^m(A, b)$, $m \geqslant 1$, конечен тогда и только тогда, когда задача $Z^m(A, b)$ нетривиальна.*

Следствие 2. *Всякая однокритериальная задача $Z^1(A, b)$ устойчива.*

Замечание 1. Нетрудно показать, что $\max\limits_{x' \in X \backslash \{x\}}$ в формуле (5) можно заменить на

$$\max_{x' \in \pi(x, A, b)} \quad \text{или} \quad \max_{x' \in P(A, b)}$$

и, следовательно, на

$$\max_{x' \in \pi(x,A,b) \cap P(A,b)} .$$

Для задачи $Z^m(A,b)$ введем традиционное множество Слейтера (иначе: множество полуэффективных решений):

$$S_1(A,b) = \{x \in X \mid \sigma_1(x,A,b) = \varnothing\},$$

где

$$\sigma_1(x,A,b) = \{x' \in X \mid q_i(x,x',A,b) > 0,\ i \in N_m\}.$$

Очевидно, что для любой пары (A,b) справедливо включение

$$P(A,b) \subseteq S_1(A,b). \tag{10}$$

Следствие 3. *Нетривиальная задача* $Z^m(A,b)$, $m \geqslant 1$, *устойчива тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$P(A,b) = S_1(A,b).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть нетривиальная задача $Z^m(A,b)$ устойчива. Тогда согласно теореме 1 число φ (правая часть формулы (5)) положительно, т. е. для любого вектора $x \in \bar{P}(A,b)$ найдется такое решение $x' \in X \backslash \{x\}$, что при всяком $i \in N_m$ выполняются неравенства

$$q_i(x,x',A_i,b_i) \geqslant \varphi\left((\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x' \rangle^2\right) > 0.$$

Следовательно, $S_1(A,b) \cap \bar{P}(A,b) = \varnothing$. Отсюда с использованием (10) получаем $P(A,b) = S_1(A,b)$.

Достаточность. Пусть $P(A,b) = S_1(A,b)$. Тогда для всякого вектора $x \in \bar{P}(A,b)$ найдется такое решение $x' \in X \backslash \{x\}$, что при любом $i \in N_m$ выполняется неравенство $q_i(x,x',A_i,b_i) > 0$. Следовательно, $\varphi > 0$, т. е. задача $Z^m(A,b)$ согласно тереме 1 устойчива. Следствие 3 доказано.

4. Квазиустойчивость

По аналогии с [4–6] задачу $Z^m(A,b)$ назовем *квазиустойчивой,* если существует такое положительное число ϵ, что для любой пары $(A',b') \in \Omega(\epsilon)$ выполняется включение

$$P(A,b) \subseteq P(A+A', b+b').$$

Поэтому радиусом квазиустойчивости задачи $Z^m(A,b)$ называется число

$$\rho_2^m(A,b) = \begin{cases} \sup Q_2(A,b), & \text{если } Q_2(A,b) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$Q_2(A,b) = \{\epsilon > 0 \mid \forall (A',b') \in \Omega(\epsilon)\ (P(A,b) \subseteq P(A+A', b+b'))\}.$$

Отметим, что приведенные свойства устойчивости и квазиустойчивости задачи $Z^m(A,b)$ являются соответственно дискретными аналогами известных (см., например, [10]) свойств полунепрерывности сверху и снизу в смысле Хаусдорфа в точке (A,b) точечно множественного отображения

$$P:\ \mathbf{R}^{n\times n\times m} \times \mathbf{R}^{n\times m} \longrightarrow 2^X,$$

которое каждому набору параметров векторного критерия $f(x)$ ставит в соответствие множество Парето.

Теорема 2. *Радиус квазиустойчивости $\rho_2^m(A,b)$ задачи $Z^m(A,b)$, $m \geqslant 1$, представим в виде*

$$\rho_2^m(A,b)$$
$$= \min_{x' \in P(A,b)} \min_{x \in X\setminus\{x'\}} \max_{i \in N_m} \frac{q_i(x,x',A_i,b_i)}{(\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x'\rangle^2}. \quad (11)$$

Доказательство. Обозначим через ψ правую часть формулы (11). Очевидно, что $\psi \geqslant 0$ для любой пары (A,b).

Сначала докажем неравенство

$$\rho_2^m(A,b) \geqslant \psi. \quad (12)$$

Если $\psi = 0$, то это неравенство очевидно.

Пусть $\psi > 0$. Тогда в соответствии с определением числа ψ для любых решений $x' \in P(A,b)$ и $x \in X\setminus\{x'\}$ найдется такое $i \in N_m$, что

$$q_i(x,x',A_i,b_i) \geqslant \psi\left((\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x,x'\rangle^2\right) > 0. \quad (13)$$

Отсюда и из леммы следует, что для любой возмущающей пары $(A',b') \in \Omega(\psi)$ любое эффективное решение исходной задачи $Z^m(A,b)$ принадлежит множеству Парето возмущенной задачи $Z^m(A+A',b+b')$. Следовательно, верно неравенство (12).

Теперь докажем, что

$$\rho_2^m(A,b) \leqslant \psi.$$

Согласно определению числа ψ существует такая пара векторов $x' \in P(A,b)$ и $x \in X\setminus\{x'\}$, что при любом $i \in N_m$ выполняется неравенство

$$\psi\left((\| x \|^*)^2 + (\| x' \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x,x'\rangle^2\right) \geqslant q_i(x,x',A,b). \quad (14)$$

Далее, полагая $\epsilon > \psi$, рассмотрим такую возмущающую пару (A',b'), элементы которой определяются по формулам (8)–(9) и $\psi < \alpha < \epsilon$.

С учетом структуры возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\epsilon)$ и неравенств (14) при любом $i \in N_m$ легко убедиться в том, что

$$q_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i)$$
$$= q_i(x, x', A_i, b_i) - \alpha\left((\| x' \|^*)^2 + (\| x \|^*)^2 + \| x - x' \|^* - 2\langle x, x' \rangle^2\right) < 0.$$

Поэтому $x' \notin P(A + A', b + b')$. Таким образом, для любого $\epsilon > \psi$ существует такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\epsilon)$, что $P(A, b) \not\subseteq P(A + A', b + b')$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho_2^m(A, b) \leqslant \psi$. Отсюда ввиду доказанного ранее неравенства (12) следует утверждение теоремы 2.

Замечание 2. Очевидно, что в формуле (11) замены, подобные тем, о которых шла речь в замечании 1, не могут быть осуществлены.

Для задачи $Z^m(A, b)$ введем традиционное множество Смейла (иначе: множество строго эффективных решений):

$$S_2(A, b) = \{x \in X \mid \sigma_2(x, A, b) = \varnothing\},$$

где

$$\sigma_2(x, A, b) = \{x' \in X \backslash \{x\} \mid q(x, x', A, b) \geqslant 0_{(m)}\}.$$

Очевидно включение

$$S_2(A, b) \subseteq P(A, b). \tag{15}$$

Следствие 4. *Задача $Z^m(A, b)$, $m \geqslant 1$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$P(A, b) = S_2(A, b).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива. Тогда $\rho_2^m(A, b) > 0$ и согласно теореме 2 число ψ (правая часть формулы (11)) положительно. Поэтому для любых векторов $x' \in P(A, b)$ и $x \in X \backslash \{x'\}$ найдется такое $i \in N_m$, что справедливы неравенства (13). Отсюда и включения (15) следует, что $P(A, b) = S_2(A, b)$.

Достаточность. Пусть $P(A, b) = S_2(A, b)$. Тогда для всякой пары векторов $x' \in P(A, b)$ и $x \in X \backslash \{x'\}$ найдется такое $i \in N_m$, что выполняется неравенство $q_i(x, x', A_i, b_i) > 0$. Следовательно, $\psi > 0$, т. е. задача $Z^m(A, b)$ в силу теоремы 2 квазиустойчива. Следствие 4 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бердышева Р. А., Емеличев В. А.** Устойчивость линейных задач лексикографической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 4. С. 83–88.

2. **Бердышева Р. А., Емеличев В. А.** Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации // Изв. вузов. Математика. 1998. № 12. С. 11–21.
3. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О радиусе устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 20–27.
4. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** Об устойчивости в траекторных задачах дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 4. С. 137–143.
5. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П.** О квазиустойчивости траекторной задачи векторной оптимизации // Мат. заметки. 1998. Т. 63, вып. 1. С. 21–27.
6. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 11. С. 1801–1805.
7. **Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.** Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 3. С. 527–529.
8. **Леонтьев В. К.** Устойчивость задачи коммивояжера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1298–1309.
9. **Леонтьев В. К.** Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 35. С. 169–184.
10. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.

Адрес авторов:

Белорусский
государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: eva@mmf.bsu.unibel.by,
yanush@newman.bas.-net.by

Статья поступила
22 мая 1999 г.