ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1999. Серия 2. Том 6, № 2, 42–47

УДК 519.87

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ*)

Р. М. Ларин, М. Ю. Калугина

Рассматривается задача максимизации вероятности срабатывания не менее заданного числа цепей некоторой иерархической системы при ограничениях на число элементов в каждом уровне. Ввиду сложности этой проблемы исследуется приближенная нецелочисленная задача, которая сводится к решению задачи линейного параметрического программирования и максимизации нелинейной функции на отрезке. Установлен ряд свойств, позволяющих упростить поиск оптимального решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим древовидную структуру, которая имеет четыре уровня, занумерованных числами 0, 1, 2, 3. Нулевой уровень содержит одну вершину, соединенную с n_1 вершинами первого уровня. Каждая вершина первого уровня соединена с n_2 вершинами второго уровня, т. е. на втором уровне имеется $n_1 n_2$ вершин. Каждая вершина второго уровня соединена с n_3 вершинами третьего уровня. Пусть задана вероятность p_i срабатывания отдельного элемента (вершины) на уровне $i = 1, 2, 3$. С вероятностью $1 - p_i$ элемент i-го уровня не срабатывает, и в этом случае не работают все следующие за ним вершины. В теории надежности такие структуры известны как «иерархические изотропные с простым подчинением» [2]. Они возникают, например, в системах вооружения [3], системах связи, многомашинных вычислительных комплексах и т. п. В данной работе изучаются более общие, неоднородные структуры.

Каждое поддерево с корневой вершиной на первом уровне представим как некоторое устройство. Тогда описанная выше структура состоит из n_1 однородных устройств. Набор характеристик (p_1, p_2, p_3, n_2, n_3) определяет *тип* устройства.

Пусть имеется T типов устройств. Устройства типа t, $1 \leqslant t \leqslant T$, задаются своим набором параметров $(p_{1t}, p_{2t}, p_{3t}, n_{2t}, n_{3t})$, где $0 < p_{it} < 1$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00482).

и $n_{it} \geqslant 1$. Будем рассматривать структуры, состоящие из устройств заданных типов. О качестве выбранной структуры будем судить по вероятности срабатывания не менее n элементов третьего уровня.

Через x_t обозначим число устройств типа t, включаемых в иерархическую структуру, и через $x = (x_1, \dots, x_T)$ — вектор выбираемого состава устройств, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i=1}^{T} x_t \leqslant N_1, \quad \sum_{i=1}^{T} n_{2t} x_t \leqslant N_2, \quad \sum_{i=1}^{T} n_{2t} n_{3t} x_t \leqslant N_3, \tag{1}$$

$$x_t \geqslant 0, \quad t = 1, \dots, T, \tag{2}$$

где число N_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, является ограничением на суммарное число элементов i-го уровня.

Обозначив через $\xi(x)$ случайную величину, равную числу сработавших элементов третьего уровня при данном составе устройств x, приходим к задаче нахождения целочисленного вектора x^*, который удовлетворяет ограничениям (1), (2), и вероятность $P(\xi(x) \geqslant n)$ является максимально возможной.

Обозначим через m_t и d_t математическое ожидание и дисперсию числа сработавших элементов третьего уровня в одном устройстве типа t. Нетрудно убедиться в том, что

$$m_t = p_{1t} p_{2t} p_{3t} n_{2t} n_{3t}, \qquad d_t = m_t (q_{1t} p_{2t} p_{3t} n_{2t} n_{3t} + q_{2t} p_{3t} n_{3t} + q_{3t}),$$

где $q_{it} = 1 - p_{it}$. Математическое ожидание $m(x)$ и дисперсия $d(x)$ случайной величины $\xi(x)$ являются линейными по x функциями:

$$m(x) = \sum_{t=1}^{T} m_t x_t, \qquad d(x) = \sum_{t=1}^{T} d_t x_t.$$

В рассматривавшихся авторами приложениях число T типов устройств достигало нескольких десятков, а максимально возможное число устройств типа t, равное целой части величины

$$\min\left\{N_1, \frac{N_2}{n_{2t}}, \frac{N_3}{n_{2t} n_{3t}}\right\},$$

колебалось от десятков до сотен единиц. В таких ситуациях представляется целесообразным перейти к изучению задачи, аналогичной сформулированной выше, заменяя $\xi(x)$ нормально распределенной случайной величиной $\eta(x)$ с математическим ожиданием $m(x)$ и дисперсией $d(x)$.

Положим $\psi(x) = (m(x) - n)/\sqrt{d(x)}$. Вероятность

$$P(\eta(x) \geqslant n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\psi(x)}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

является возрастающей функцией величины $\psi(x)$. Поэтому, отбрасывая требование целочисленности переменных x_t, приходим к задаче нахождения такого вектора x^*, который удовлетворяет (1), (2) и $\psi(x^*) \geqslant \psi(x)$ при любом x. Далее эту задачу считаем основной.

2. Анализ задачи

Обозначим через X множество векторов x, удовлетворяющих ограничениям (1) и (2). Положим

$$m^* = \max\{m(x) \mid x \in X\}.$$

Если $m^* = n$, то, очевидно, максимальное значение функции $\psi(x)$ равно нулю и достигается в таких точках $x^* \in X$, что $m(x^*) = m^*$. Далее рассмотрим отдельно случаи, когда $m^* < n$ и $m^* > n$.

2.1. Случай $m^* < n$. Введем параметризацию $X(\lambda) = \{x \in X \mid m(x) = \lambda\}$, где $\lambda \in [0, m^*]$. При данном $\lambda > 0$ функция $\psi(x)$ и дисперсия $d(x)$ на множестве $X(\lambda)$ в силу условия $m^* < n$ принимают максимальное значение в одних и тех же точках $x \in X(\lambda)$. Положим

$$g(\lambda) = \max\{d(x) \mid x \in X(\lambda)\}, \quad f(\lambda) = (\lambda - n)/\sqrt{g(\lambda)}.$$

Задача сводится к поиску такого значения $\lambda^* \in (0, m^*]$, что

$$f(\lambda^*) = \max\{f(\lambda) \mid \lambda \in (0, m^*]\}. \tag{3}$$

Функция $g(\lambda)$, $\lambda \in [0, m^*]$, является кусочно линейной и вогнутой [1]. Обозначим через $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ отрезки ее линейности ($i = 1, \ldots, s$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_s = m^*$), и пусть $g(\lambda) = a_i\lambda + b_i$ при $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. Функция $g(\lambda)$ строится, например, параметрическим симплекс методом [1]. Участки линейности рассчитываются последовательно один за другим. Одновременно отслеживается точка $x(\lambda) \in X(\lambda)$ такая, что $d(x(\lambda)) = g(\lambda)$. В предлагаемом ниже алгоритме функция $f(\lambda)$ анализируется в том же порядке. Поэтому когда вычислительный процесс доходит до точки λ^*, определенной в (3), мы получаем решение $x^* = x(\lambda^*)$ основной задачи.

Обозначим через $f'(\lambda)$ и $f''(\lambda)$ первую и вторую производные функции $f(\lambda)$.

Лемма 1. *Если $f'(\mu) = 0$ в некоторой точке $\mu \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, то $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \mu)$ и $f'(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\mu, \lambda_i]$.*

Доказательство. Равенство $f'(\mu) = 0$ равносильно равенству

$$(a_i\mu + b_i) + (a_i n + b_i) = 0,$$

из которого следует, что $f'(\lambda) \neq 0$, если $\lambda \neq \mu$, и $a_i n + b_i < 0$, ибо $a_i\mu + b_i = g(\mu) > 0$. Вычитая второе неравенство из первого, получаем $a_i(n - \mu) < 0$. Так как $\mu < n$, то $a_i < 0$.

Вычисляя вторую производную, получаем

$$f''(\mu) = \frac{a_i}{2g(\mu)^{3/2}} < 0.$$

Из этого неравенства и отмеченного выше неравенства $f'(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \neq \mu$ следует требуемое утверждение. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При всех $i = 1, \dots, s-1$ выполняется неравенство*

$$f'(\lambda_i - 0) > f'(\lambda_i + 0).$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Delta = f'(\lambda_i - 0) - f'(\lambda_i + 0) = \frac{(a_i n + b_i) - (a_{i+1} n + b_{i+1})}{2g(\lambda_i)^{3/2}}.$$

В силу вогнутости функции $g(\lambda)$ неравенство

$$a_i u + b_i > a_{i+1} u + b_{i+1}$$

выполняется при всех $u > \lambda_i$, в том числе при $u = n$. Следовательно, $\Delta > 0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Максимум (3) достигается в единственной точке λ^* такой, что $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (0, \lambda^*)$ и $f'(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\lambda^*, m^*]$.*

Доказательство. На отрезке $[0, \lambda_1]$ функция $g(\lambda) = a_1\lambda + b_1$ такова, что

$$a_1 = \max\{d_t/m_t \mid t = 1, \dots, T\} \quad \text{и} \quad b_1 = 0.$$

Так как $a_1 > 0$, то при $\lambda \in (0, \lambda_1]$ имеем

$$f'(\lambda) = \frac{a_1(\lambda + n)}{2g(\lambda)^{3/2}} > 0.$$

Следовательно, $f(\lambda_1) = \max\{f(\lambda) \mid \lambda \in (0, \lambda_1]\}$. Максимальное значение функции $f(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_1, m^*]$ достигается в силу ее непрерывности.

Если $f'(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in [\lambda_1, m^*]$, то функция $f(\lambda)$ принимает максимальное значение в точке λ_i при некотором $i \in [1, s]$. Следовательно, в этой точке выполняются неравенства

$$f'(\lambda_i - 0) > 0, \quad f'(\lambda_i + 0) < 0.$$

По лемме 2 получаем, что $f'(\lambda) > 0$, если $\lambda \in (0, \lambda_i)$, и $f'(\lambda) < 0$, если $\lambda \in (\lambda_i, m^*]$. Поэтому точка максимума $\lambda^* = \lambda_i$ единственная.

Пусть теперь $f'(\mu) = 0$ в некоторой точке $\mu \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. В силу леммы 1 имеем

$$f'(\lambda_{i-1} + 0) \geqslant 0, \quad f'(\lambda_i - 0) \leqslant 0,$$

а с учетом леммы 2 заключаем, что $f'(\lambda) > 0$, если $\lambda \in (0, \mu)$, и $f'(\lambda) < 0$, если $\lambda \in (\mu, m^*]$. Следовательно, и в этом случае точка максимума $\lambda^* = \mu$ единственная. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет предложить следующий алгоритм расчета точки λ^* из (3).

Шаг 1. Для построения функции $g(\lambda)$ инициируется параметрический симплекс метод [1] при $\lambda = 0$. Полагается $k = 1$.

Шаг 2. Итерацией симплекс метода находятся числа a_k, b_k, λ_k и полагается

$$\mu = -n - 2b_k/a_k.$$

Шаг 3. Если $\mu \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, то положить $\lambda^* = \mu$ и прекратить вычисления.

Шаг 4. Если $a_k(\lambda_k + n) + 2b_k < 0$, то положить $\lambda^* = \lambda_{k-1}$ и прекратить вычисления.

Шаг 5. Если $\lambda_k = m^*$, то положить $\lambda^* = m^*$ и завершить работу алгоритма. В противном случае положить $k = k + 1$ и возвратиться на шаг 2.

Конец

Обозначим через z вектор из X, на котором достигается максимум дисперсии $d(x)$, т. е.

$$d(z) = d^* = \max\{d(x) \mid x \in X\}.$$

Положим $r = m(z)$. Пусть $\lambda < r$. Поскольку $g(\lambda) \leqslant d^* = g(r)$, то $f(\lambda) < f(r)$. Следовательно, искомая точка λ^* лежит в отрезке $[r, m^*]$. Этот факт позволяет строить модификации алгоритма, в которых движение по параметру λ начинается либо от точки r, либо от точки m^*.

2.2. Случай $m^* > n$. Будем использовать ту же параметризацию $X(\lambda)$, что и выше. Очевидно, что достаточно ограничиться значениями $\lambda \in [n, m^*]$. На множестве $X(\lambda)$ максимум функции $\psi(x)$ и минимум дисперсии $d(x)$ достигаются в одних и тех же точках $x \in X(\lambda)$. Положим

$$g(\lambda) = \min\{d(x) \mid x \in X(\lambda)\}, \quad f(\lambda) = (\lambda - n)/\sqrt{g(\lambda)}.$$

Задача сводится к поиску такого значения $\lambda^* \in [n, m^*]$, что

$$f(\lambda^*) = \max\{f(\lambda) \mid \lambda \in [n, m^*]\}. \tag{4}$$

Функция $g(\lambda)$, $\lambda \in [n, m^*]$, является кусочно линейной и выпуклой [1]. Обозначим через $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ отрезки ее линейности ($i = 1, \ldots, s$, $\lambda_0 = n$, $\lambda_s = m^*$), и пусть $g(\lambda) = a_i\lambda + b_i$ при $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\max\{f(\lambda) \mid \lambda \in [n, m^*]\} = \max\{f(\lambda_i) \mid i = 1, \dots, s\}. \qquad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что функция $f(\lambda)$, рассматриваемая на некотором отрезке $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, принимает максимальное значение в точке $\mu \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i)$. Тогда $f'(\mu) = 0$, что равносильно равенству

$$(a_i\mu + b_i) + (a_i n + b_i) = 0.$$

Поскольку $a_i\mu + b_i = g(\mu) > 0$, имеем $a_i n + b_i < 0$. Поэтому $a_i(\mu - n) > 0$. Так как $\mu > n$, то $a_i > 0$. Вычисляя вторую производную, получаем

$$f''(\mu) = \frac{a_i}{2g(\mu)^{3/2}} > 0,$$

но это противоречит предположению о точке μ. Следовательно, функция $f(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ принимает максимальное значение только при $\lambda \in \{\lambda_{i-1}, \lambda_i\}$. Учитывая, что $f(\lambda_0) = 0$ и $f(\lambda_i) > 0$ при $i \geqslant 1$, убеждаемся в справедливости (5). Теорема 2 доказана.

Таким образом, в случае $m^* > n$ точку λ^*, определенную в (4), можно найти перебором точек $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, которые вычисляются с помощью методов из [1] последовательно одна за другой. Одновременно отслеживается вектор $x(\lambda) \in X(\lambda)$ такой, что $d(x(\lambda)) = g(\lambda)$. В результате получаем искомое решение $x^* = x(\lambda^*)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.** Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.
2. **Рябинин И. А., Черкесов Г. Н.** Логико-вероятностные методы исследований надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь, 1981.
3. **Пустовит Б.** Об оценке надежности корабельных систем вооружения // Морской сборник. 1989. № 12. С. 58–60.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
17 ноября 1996 г.,
переработанный вариант —
24 мая 1999 г.