ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2000. Серия 1. Том 7, № 1, 6–17

УДК 519.95

# О РАБОТАХ Р. Г. НИГМАТУЛЛИНА ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ АЛГОРИТМАМ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

*М. Ю. Мошков*

Работы Р. Г. Нигматуллина оказали заметное влияние на развитие исследований приближенных алгоритмов решения дискретных экстремальных задач. Он получил оценки мультипликативной точности жадного алгоритма решения задачи о покрытии и доказал, что многие сложные задачи сводятся к своим приближенным с некоторой аддитивной точностью. В статье рассматриваются четыре работы Р. Г. Нигматуллина, посвященные изучению приближенных алгоритмов, приводятся некоторые результаты последних лет, относящиеся к исследованиям мультипликативной точности жадного алгоритма и мультипликативной точности приближенных полиномиальных алгоритмов решения задачи о раскраске графа и задачи о покрытии, а также обсуждается близкая к задаче о покрытии задача построения минимального по глубине дерева решений.

## Введение

В научном наследии Р. Г. Нигматуллина видное место занимают исследования, связанные с проблемой построения эффективных приближенных алгоритмов для решения сложных дискретных экстремальных задач.

Понятие дискретной экстремальной задачи $z$ определяется следующим образом. Пусть $X$ — множество входов задачи, $Y$ — множество решений задачи, каждому входу $x \in X$ поставлено в соответствие непустое множество $D(x) \subseteq Y$ допустимых решений и каждому решению $y \in Y$ поставлено в соответствие целое неотрицательное число $L(y)$ — стоимость решения $y$. По произвольному входу $x \in X$ требуется найти допустимое решение $y \in D(x)$, имеющее минимальную стоимость. Стоимость такого решения, называемого оптимальным, обозначается через $L(x)$. Обычно предполагается, что $X$ и $Y$ — некоторые множества конечных слов в конечном алфавите. Словами из этих множеств кодируются содержательные объекты.

Пусть $\varphi$ — функция, сопоставляющая каждому входу $x \in X$ неотрицательное действительное число $\varphi(x)$.

Для задачи $z$ приближенная задача с аддитивной точностью $\varphi$ (обозначается $z + \varphi$) определяется следующим образом: по произвольному входу $x \in X$ требуется найти допустимое решение $y \in D(x)$ такое, что $L(y) \leqslant L(x) + \varphi(x)$. Про алгоритм, решающий задачу $z + \varphi$, говорят, что он решает задачу $z$ с аддитивной точностью $\varphi$.

Для задачи $z$ приближенная задача с мультипликативной точностью $\varphi$ (обозначается $z \cdot \varphi$) определяется следующим образом: по произвольному входу $x \in X$ требуется найти допустимое решение $y \in D(x)$ такое, что $L(y) \leqslant L(x) \cdot \varphi(x)$. Про алгоритм, решающий задачу $z \cdot \varphi$, говорят, что он решает задачу $z$ с мультипликативной точностью $\varphi$.

Пусть $z$ — задача, для которой не известны полиномиальные алгоритмы ее решения. Тогда целесообразно проводить исследования в двух направлениях:

1) пытаться строить эффективные приближенные алгоритмы решения задачи $z$ и изучать их точность;

2) при некоторых предположениях о сложности задачи $z$ или о классе NP пытаться доказать, что задача $z$ не может быть решена полиномиальными алгоритмами с данной точностью.

Результаты исследований Р. Г. Нигматуллина оказали заметное влияние на развитие этих направлений. В работе [6], опубликованной в 1969 г., он изучил мультипликативную точность жадного алгоритма решения важной с теоретической и практической точек зрения задачи о покрытии. К этому времени результаты работ [13] и [1] позволили осознать принципиальные трудности, возникающие при точном решении ряда дискретных экстремальных задач, в том числе и близких к задаче о покрытии, а статьи [13] и [3] предоставили многочисленные примеры алгоритмов, строящих асимптотически оптимальные решения для почти всех входов сложных задач. Результаты последующих работ [17, 22, 12] послужили дополнительными аргументами в пользу гипотезы о неустранимости перебора при точном решении некоторых задач. В 1975 г., когда уже была установлена NP-полнота, или NP-трудность, большого числа дискретных экстремальных задач, Р. Г. Нигматуллин доказал [8], что для многих из них точные задачи полиномиально сводятся к приближенным с некоторой аддитивной точностью.

В статье рассматриваются четыре работы Р. Г. Нигматуллина, посвященные изучению приближенных алгоритмов решения дискретных экстремальных задач, приводятся некоторые результаты последних лет, относящиеся к исследованиям точности жадного алгоритма и мультипликативной точности приближенных полиномиальных алгоритмов

решения задачи о раскраске графа и задачи о покрытии, а также обсуждается близкая к научным интересам автора и тесно связанная с задачей о покрытии задача построения минимального по глубине дерева решений.

## 1. Работы по исследованию жадного алгоритма

Пусть $A$ — множество, состоящее из $N > 0$ элементов, и $F = \{A_1, \ldots, A_p\}$ — некоторая совокупность подмножеств множества $A$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = A$. Подмножество $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_t}\}$ множества $F$ назовем $F$-покрытием, если $A = \bigcup_{j=1}^{t} A_{i_j}$. Задача о покрытии $(A, F)$ заключается в построении минимального (по мощности) $F$-покрытия. К задаче о покрытии сводятся задачи разнообразной природы.

Один из наиболее известных приближенных алгоритмов решения этой задачи, часто называемый жадным алгоритмом (синонимы: градиентный алгоритм, метод наискорейшего спуска), заключается в следующем. В множестве $F$ выбирается подмножество $A_k$ максимальной мощности, которое включается в строящееся покрытие. Далее алгоритм применяется к паре $(A', F')$, где $A' = A \setminus A_k$ и $F' = \{A_1 \setminus A_k, \ldots, A_p \setminus A_k\}$, и т. д. до тех пор, пока не будет исчерпано множество $A$.

Для задачи о покрытии $(A, F)$ обозначим через $r_G(A, F)$ отношение мощности $F$-покрытия, построенного жадным алгоритмом, к мощности минимального $F$-покрытия. Задачу $(A, F)$ назовем *вырожденной*, если для нее существует $F$-покрытие мощности 1.

Доказано [6], что для любой невырожденной задачи о покрытии $(A, F)$ выполняется неравенство

$$r_G(A, F) \leqslant 1 + \frac{\ln N - \ln m}{m \ln(1 + 1/(m-1))}, \tag{1}$$

где $N$ — мощность множества $A$ и $m$ — мощность минимального $F$-покрытия. Поскольку $m \ln(1 + 1/(m-1)) > 1$ при $m \geqslant 2$, то имеем

$$r_G(A, F) \leqslant 1 + \ln N - \ln m. \tag{2}$$

Отметим, что последнее неравенство справедливо для любой задачи о покрытии $(A, F)$. В этой же работе показано, что для любого $N \geqslant 1$ существует задача о покрытии $(A, F)$, для которой $|A| = N$, мощность минимального $F$-покрытия равна 2 и

$$r_G(A, F) \geqslant \frac{\lfloor \log_2(N+2) \rfloor - 1}{2}.$$

Отметим, что эта оценка получена для задачи покрытия вершин графа максимальными полными подграфами.

Кроме оценки (1), справедливой для класса всех невырожденных задач о покрытии, в работах [6] и [7] получены оценки для величины $r_G(A, F)$ для более узких классов задач о покрытии таких, как задача построения кратчайшей дизъюнктивной нормальной формы, задача о раскраске вершин графа, задача о реберном покрытии вершин графа. Например, в случае задачи о реберном покрытии показано, что для почти всех графов с $n$ вершинами $r_G \leqslant 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n$ стремится к 0 с ростом $n$.

До появления работы [6] или практически одновременно с ним жадный алгоритм использовался в [11] для построения достаточно простых тестов, в [5] при получении оценок минимального числа вершин $n$-мерного куба, протыкающих все $m$-мерные грани, в [2] при оценке сложности тестов для почти всех таблиц, в [10] при получении верхних оценок сложности дизъюнктивных нормальных форм для почти всех булевых функций. Отметим, что к оценке, близкой к (2), независимо пришли несколько авторов (см., например, [21]).

## 2. Работы по исследованию приближенных алгоритмов с аддитивной точностью

В работах [8], [9] получено достаточное условие полиномиальной сводимости точной задачи к приближенной с некоторой аддитивной точностью. Укажем некоторые из приведенных в этих работах следствий.

Первые два следствия связаны с задачами построения минимальных схем, которые реализуют булевы функции, заданные таблично:

задача построения минимальной контактной схемы полиномиально сводится к своей приближенной с аддитивной точностью $k$ для произвольной константы $k \geqslant 0$;

задача построения кратчайшей дизъюнктивной нормальной формы полиномиально сводится к своей приближенной с аддитивной точностью $t^{1-\varepsilon}$ для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ ($t$ — длина табличного задания функции для приближенной задачи).

Вторая группа следствий относится к задачам на графах.

Следующие задачи на графах полиномиально сводятся к своим приближенным с аддитивной точностью $t^{1-\varepsilon}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ ($t$ — число вершин в графе приближенной задачи): минимальная раскраска вершин, вершинное покрытие ребер, минимальное покрытие вершин кликами.

Третья группа следствий связана с задачами на конечном множестве.

При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ следующие задачи полиномиально сводятся к своим приближенным с аддитивной точностью $t^{1-\varepsilon}$ ($t$ — длина кода множества): минимальное покрытие множества подмножествами, минимальное покрытие множества подмножествами без пересечений.

В статье [9] отмечается, что близкие по идее результаты были получены в [27] для задачи коммивояжера и в работе [19] для задачи раскраски графа. Результаты работы [8] упоминаются в книге [20] при обсуждении приближенных алгоритмов решения NP-полных задач.

### 3. Некоторые дальнейшие результаты

Пусть $(A, F)$ — задача о покрытии с $|A| = N$. Рассмотрим верхние и нижние оценки для величины $r_G(A, F)$, зависящие только от $N$. Из неравенства (2) следует, что

$$r_G(A, F) \leqslant \ln N + 1.$$

Близкая оценка содержится в работе [21], в которой показано, что

$$r_G(A, F) \leqslant H(N),$$

где $H(N) = 1 + 1/2 + \ldots + 1/N$. Отметим, что $\ln N \leqslant H(N) \leqslant \ln N + 1$. Существенное улучшение этих оценок было получено только в 1996 г. в работе [28]. В ней было показано, что для любой задачи о покрытии $(A, F)$ с $|A| = N \geqslant 2$ верно неравенство

$$r_G(A, F) < \ln N - \ln\ln N + 0,78 \qquad (3)$$

и при любом $N \geqslant 2$ имеется задача о покрытии $(A, F)$ с $|A| = N$ такая, что

$$r_G(A, F) > \ln N - \ln\ln N - 0,31.$$

В работах Р. Г. Нигматуллина [8, 9] для естественных функций стоимости и для широкого круга задач в предположении NP $\neq$ P было доказано, что не существует полиномиальных алгоритмов, решающих эти задачи с определенной аддитивной точностью.

Для получения подобных результатов об алгоритмах, решающих задачи с определенной мультипликативной точностью, потребовалось разработать новые подходы к исследованию задач [16]. При этом существенное продвижение было достигнуто только в последние годы. Например, до 1994 г. наилучшим для задачи о минимальной раскраске вершин графа был результат работы [19]: если NP $\neq$ P, то для любого $c$, $1 < c < 2$, задача о раскраске не может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $c$. В работе [23] для задачи

о раскраске доказано следующее утверждение: если $\mathrm{NP} \neq \mathrm{P}$, то существует $\delta > 0$ такое, что рассматриваемая задача не может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $n^{\delta}$, где $n$ — число вершин в графе.

По-видимому, до 1992 г. для задачи о покрытии было известно только утверждение об алгоритмах с аддитивной точностью [8]. Из результатов работы [14] следует, что если $\mathrm{NP} \neq \mathrm{P}$, то существует константа $c > 1$ такая, что задача о покрытии не может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $c$. В статье [15] показано, что если $\mathrm{NP} \neq \mathrm{P}$, то для любой константы $c > 1$ задача о покрытии не может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $c$. В работе [18] получен следующий результат: если

$$\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{DTIME}\,(n^{O(\log\log n)}), \tag{4}$$

то для любого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, задача о покрытии не может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $(1-\varepsilon)\ln N$. Здесь $\mathrm{DTIME}\,(n^{O(\log\log n)})$ обозначает класс языков, распознаваемых детерминированными алгоритмами за время $n^{O(\log\log n)}$, где $n$ — длина входного слова.

Оценки (2) и (3) показывают, что можно модифицировать жадный алгоритм так, чтобы он за полиномиальное время решал задачу о покрытии с мультипликативной точностью $\ln N$. Одна из возможностей состоит в том, чтобы сначала за полиномиальное время проверить, имеются ли покрытия мощности 1 и 2, и, если нет, то использовать жадный алгоритм. Другая возможность заключается в том, что задачи с $\ln\ln N < 0{,}78$ решаются с помощью полного перебора, а для задач с $\ln\ln N \geqslant 0{,}78$ используется градиентный алгоритм. В результате получаем модифицированный градиентный алгоритм, который в предположении (4) близок к наилучшим с точки зрения мультипликативной точности приближенным полиномиальным алгоритмам для решения задачи о покрытии. Разумеется, речь здесь идет о классе всех задач о покрытии. Для подклассов этого класса ситуация может быть иной. В книге [25] рассмотрен пример задачи о вершинном покрытии ребер графа. Для последовательности графов с растущим числом ребер приводится нижняя оценка величины $r_G$, близкая к $\ln N/2$, где $N$ — число ребер в графе. С другой стороны, имеется полиномиальный алгоритм, решающий рассматриваемую задачу с мультипликативной точностью 2.

## 4. Задача минимизации глубины дерева решений

Задача минимизации глубины дерева решений тесно связана с задачей о покрытии. Некоторые результаты, полученные для задачи

о покрытии, могут быть использованы при исследовании алгоритмов построения деревьев решений.

Таблица решений, или тестовая таблица, — прямоугольная таблица, заполненная числами из множества $\{0, 1\}$. Строки таблицы попарно различны, и множество строк разбито на классы. С таблицей решений связана игра двух игроков. Первый игрок загадывает строку таблицы, а второй игрок должен отгадать, к какому классу принадлежит загаданная строка. Для этого он может задавать вопросы: выбрав столбец таблицы, спрашивать, что содержит загаданная строка на пересечении с этим столбцом. Стратегии второго игрока, представленные в виде деревьев с корнем, называются деревьями решений, или условными тестами. В качестве меры сложности дерева решений рассматривается его глубина — максимальное число вопросов, задаваемых вторым игроком.

Задача минимизации глубины дерева решений, или, для краткости, задача о дереве решений, состоит в том, чтобы по произвольной таблице решений построить дерево решений, глубина которого минимальна.

В работе [4] был рассмотрен жадный алгоритм построения деревьев решений (сходный подход к построению деревьев решений был предложен в работе [26]). Каждой таблице решений $T$ ставится в соответствие параметр $R(T)$ — число неупорядоченных пар строк, взятых из различных классов. Этот параметр в некотором смысле характеризует неопределенность таблицы $T$ с точки зрения второго игрока. Если этот игрок задает вопрос об $i$-м столбце, то неопределенность таблицы $T$ в худшем случае уменьшается до величины

$$u_i = \max(R(T_{i0}), R(T_{i1})),$$

где для любого $\delta \in \{0, 1\}$ через $T_{i\delta}$ обозначена подтаблица таблицы $T$, состоящая из тех и только тех строк таблицы $T$, которые на пересечении с $i$-м столбцом имеют число $\delta$. Если все строки таблицы $T$ содержатся в одном классе, то дерево решений состоит из одной вершины, которой приписан номер этого класса. В противном случае в качестве вопроса выбирается тот столбец, для которого величина $u_i$ минимальна (если таких столбцов несколько, то среди них выбирается столбец с минимальным номером). Далее алгоритм применяется к подтаблицам $T_{i0}$ и $T_{i1}$ и т. д.

Далее будем предполагать, что в таблице $T$ имеются строки, принадлежащие различным классам. Обозначим через $r^*_G(T)$ отношение глубины дерева решений, построенного по таблице $T$ жадным алгоритмом, к минимальной глубине дерева решений для таблицы $T$.

В работе [4] показано, что для любой таблицы $T$ справедливо неравенство

$$r^*_G(T) \leqslant \ln R - \ln h + 1, \tag{5}$$

где $R = R(T)$ и $h$ — минимальная глубина дерева решений для таблицы $T$. В работе [4] также показано, что для любых натуральных чисел $h \geqslant 2$ и $R \geqslant 3h$ существует таблица $T$, для которой $R(T) = R$, минимальная глубина дерева решений равна $h$ и

$$r^*_G(T) \geqslant \frac{(h-1)}{h}(\ln R - \ln 3h + 1).$$

Рассмотрим произвольную задачу о покрытии $(A, F)$, где $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ и $F = \{A_1, \ldots, A_p\}$. Этой задаче поставим в соответствие таблицу решений $T_{(A,F)}$ с $p$ столбцами и $N + 1$ строками. Столбцам таблицы соответствуют множества $A_1, \ldots, A_p$, а первым $N$ строкам таблицы соответствуют элементы $a_1, \ldots, a_N$. Для произвольных $i \in \{1, \ldots, p\}$ и $j \in \{1, \ldots, N\}$ на пересечении $i$-го столбца и $j$-й строки стоит 1, если $a_j \in A_i$, и 0 в противном случае. Последняя строка таблицы заполнена нулями. Множество строк таблицы разбито на два класса. К первому классу относятся первые $N$ строк. Ко второму классу относится последняя строка.

Нетрудно показать, что $R(T_{(A,F)}) = N$ и мощность минимального $F$-покрытия для задачи $(A, F)$ совпадает с минимальной глубиной дерева решений для таблицы $T_{(A,F)}$. Рассмотрим произвольное дерево решений для таблицы $T_{(A,F)}$ и в нем путь от корня до концевой вершины, в котором на все задаваемые вопросы дается ответ 0. Ясно, что множеству заданных на этом пути вопросов соответствует некоторое $F$-покрытие.

Таким образом, если задача о дереве решений может быть решена за полиномиальное время с аддитивной точностью $\varphi(R)$, то задача о покрытии может быть решена за полиномиальное время с аддитивной точностью $\varphi(N)$, где $\varphi$ — произвольная функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая значения из множества неотрицательных действительных чисел. Используя этот факт и результаты работы [9], получаем, что в предположении NP $\neq$ P задача о дереве решений не может быть решена за полиномиальное время с некоторой (соответствующей оценке из [9] для задачи о покрытии) аддитивной точностью.

Аналогично если задача о дереве решений может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $\varphi(R)$, то задача о покрытии может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $\varphi(N)$. Используя результат работы [18], получаем, что в предположении (4) для любого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, задача о дереве решений не может быть решена за полиномиальное время с мультипликативной точностью $(1 - \varepsilon) \ln R$.

Оценка (5) показывает, что можно так модифицировать жадный алгоритм построения дерева решений, чтобы он за полиномиальное время решал задачу о дереве решений с мультипликативной точностью $\ln R$. Для этого достаточно за полиномиальное время проверить, имеет ли таблица решений деревья решений, глубина которых равна 1 и 2, и, если нет, то применить жадный алгоритм. Модифицированный жадный алгоритм в предположении (4) близок к наилучшим с точки зрения мультипликативной точности приближенным полиномиальным алгоритмам решения задачи о дереве решений.

В заключение рассмотрим одну сложную задачу, связанную с построением деревьев решений для диагностики неисправностей схем из функциональных элементов.

Пусть $S$ — схема из функциональных элементов в базисе $B = \{x \wedge y, x \vee y, \neg x\}$ и в схеме $S$ имеется ровно $m$ входов элементов. Перенумеруем эти входы числами от 1 до $m$. Набором константных неисправностей на входах элементов схемы $S$ называется произвольный набор длины $m$, заполненный числами из множества $\{0, 1, 2\}$. Для $i = 1, \ldots, m$, если $i$-й разряд набора равен 2, то $i$-й вход элемента схемы исправен. В противном случае на $i$-м входе реализуется константа, равная $i$-му разряду набора.

Пусть $W$ — некоторое непустое множество наборов константных неисправностей на входах элементов схемы $S$. Задача диагностики схемы $S$ относительно неисправностей из $W$ заключается в следующем: по схеме $S$, содержащей неизвестный нам набор неисправностей $w_1 \in W$, требуется найти некоторый набор $w_2 \in W$ такой, что схема $S$ с набором неисправностей $w_1$ и схема $S$ с набором неисправностей $w_2$ реализуют одну и ту же булеву функцию. Для решения этой задачи на входы схемы $S$ можно подавать наборы из нулей и единиц и наблюдать значение на выходе схемы. Отметим, что существует дерево решений, которое решает рассматриваемую задачу и имеет не более $2|W| - 1$ вершин.

В работе [24] приведено следующее утверждение: если NP $\neq$ P, то не существует полиномиального алгоритма, который по произвольной схеме из функциональных элементов $S$ в базисе $B$ и произвольному множеству $W$ наборов константных неисправностей на входах элементов схемы $S$ строит дерево решений, решающее задачу диагностики схемы $S$ относительно неисправностей из $W$.

Рассмотрим теперь задачу построения дерева решений минимальной глубины для диагностики схемы $S$ относительно неисправностей из $W$. Ясно, что в предположении NP $\neq$ P не существует ни точных, ни приближенных полиномиальных алгоритмов решения этой задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Журавлев Ю. И.** Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. Вып. 3. С. 41–77.
2. **Коспанов Э. Ш.** Об одном алгоритме построения достаточно простых тестов // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1966. Вып. 8. С. 43–47.
3. **Лупанов О. Б.** Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1965. Вып. 14. С. 31–110.
4. **Мошков М. Ю.** Условные тесты // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1983. Вып. 40. С. 131–170.
5. **Нечипорук Э. И.** О сложности вентильных схем, реализующих булевские матрицы с неопределенными элементами // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 1. С. 40–42.
6. **Нигматуллин Р. Г.** Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие // Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов: Тр. симпоз. Киев, 1969. Вып. 5. С. 116–126.
7. **Нигматуллин Р. Г.** О покрытии графа ребрами // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1969. Вып. 21. С. 241–248.
8. **Нигматуллин Р. Г.** Сложность приближенного решения комбинаторных задач // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 2. С. 289–292.
9. **Нигматуллин Р. Г.** О приближенных алгоритмах с ограниченной абсолютной погрешностью для дискретных экстремальных задач // Кибернетика. 1978. № 1. С. 95–101.
10. **Сапоженко А. А.** Об одном доказательстве верхней оценки сложности минимальной д.н.ф. для почти всех функций // I Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики: Тез. докл. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1969. С. 103.
11. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля электрических схем // Сб. статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360 (Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова; Т. 51).
12. **Шоломов Л. А.** Об информационной сложности задач, связанных с минимальной реализацией булевых функций схемами // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1973. Вып. 26. С. 207–256.

13. **Яблонский С. В.** Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1959. Вып. 2. С. 75–121.

14. **Arora S., Lund C., Motwani R., Sudan M., Szegedy M.** Proof verification and hardness of approximation problems // Proc. of the 33rd annual symp. on foundations of comput. sci. Loc Alamitos, CA: IEEE Comput. Soc. Press, 1992. P. 14–23.

15. **Bellare M., Goldwasser S., Lund C., Russell A.** Efficient probabilistically checkable proofs and applications to approximation // Proc. of the 25th annual ACM symp. on theory of computing. N. Y.: ACM Press, 1993. P. 294–304.

16. **Ben-Or M., Goldwasser S., Kilian J., Wigderson A.** Multi-prover interactive proofs: how to remove intractability assumptions // Proc. of the 20th annual ACM symp. on theory of computing. N. Y.: ACM Press, 1988. P. 113–131.

17. **Cook S. A.** The complexity of theorem-proving procedures // Proc. of the 3rd annual ACM symp. on theory of computing. N. Y.: ACM Press, 1971. P. 151–159. (Рус. пер.: Кук С. А. Сложность процедур вывода теорем // Кибернетический сборник. Нов. сер. М.: Мир, 1975. Вып. 12. С. 5–15.)

18. **Feige U.** A threshold of $\ln n$ for approximating set cover (preliminary version) // Proc. of the 28th annual ACM symp. on theory of computing. N. Y.: ACM Press, 1996. P. 314–318.

19. **Garey M. R., Johnson D. S.** The complexity of near-optimal graph coloring // J. Assoc. Comput. Mach. 1976. V. 23, N 1. P. 43–49.

20. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1979. (Рус. пер.: Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.)

21. **Johnson D. S.** Approximation algorithms for combinatorial problems // J. Comput. Syst. Sci. 1974. V. 9, N 3. P. 256–278.

22. **Karp R. M.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. N. Y.: Plenum Press, 1972. P. 85–103. (Рус. пер.: Карп Р. М. Сводимость комбинаторных проблем // Кибернетический сборник. Нов. сер. М.: Мир, 1975. Вып. 12. С. 16–38.)

23. **Lund C., Yannakakis M.** On the hardness of approximating minimization problems // J. Assoc. Comput. Mach. 1994. V. 41, N 5. P. 960–981.

24. **Moshkov M. Ju.** Diagnosis of constant faults of circuits // Proc. of the Fourth intern. workshop on rough sets, fuzzy sets and machine discovery. Tokyo, 1996. P. 325–327.

25. **Papadimitriou C. H., Steiglitz K.** Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1982. (Рус. пер.: Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.)

26. **Quinlan J. R.** Discovering rules by induction from large collections of examples // Experts systems in the microelectronic age. Edinburg: Edinburg Univ. Press, 1979.

27. **Sahni S., Gonzales T.** P-complete problems and approximate solutions // Proc. of the 15th annual symp. on switching and automata theory. N. Y.: IEEE, 1974. P. 28–32.

28. **Slavík P.** A tight analysis of the greedy algorithm for set cover // Proc. of the 28th annual ACM symp. on theory of computing. N. Y.: ACM Press, 1996. P. 435–439.

Адрес автора:

НИИ прикладной математики
и кибернетики ННГУ,
ул. Ульянова, 10,
603005 Нижний Новгород,
Россия. E-mail:
moshkov@nnucnit.unn.ac.ru

Статья поступила
10 ноября 1999 г.