ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2000. Серия 1. Том 7, № 1, 18–31

УДК 519.95

РАБОТЫ Р. Г. НИГМАТУЛЛИНА ПО НИЖНИМ ОЦЕНКАМ СЛОЖНОСТИ

В. М. Храпченко

Сделана попытка ознакомить математическое сообщество с концепцией Р. Г. Нигматуллина по проблеме нижних оценок сложности.

Проблемой нижних оценок сложности Рошаль Габдулхаевич Нигматуллин вплотную стал заниматься с начала 70-х годов. Однако лишь в 1981 г. он опубликовал свою первую работу на эту тему «Проблема нижних оценок сложности и теория NP-полноты (обзор)» (Изв. вузов. Математика. 1981. №5. С. 17–25). Следующей была книга «Сложность булевых функций» (Казань: Изд-во КГУ, 1983), в которой он систематизировал большое количество материала, имеющего прямое отношение к рассматриваемой проблеме*). А начиная с 1984 г. его работы по нижним оценкам сложности стали появляться одна за другой, продолжая выходить и после смерти автора в 1986 г. Перед самой смертью Рошаль Габдулхаевич закончил монографию [3], в которую в том или ином виде вошли все эти работы.

Переход к исследованию нижних оценок сложности был, пожалуй, довольно крутым поворотом в научной деятельности Р. Г. Нигматуллина. Нельзя сказать, что это было связано с изменением его научных интересов или с резкой переменой направления, в котором он вел исследования. Однако обращение к проблеме нижних оценок сложности потребовало изменить характер творческой деятельности. Если в ранних работах Р. Г. Нигматуллина большое впечатление производят конкретные результаты (хотя никакой конкретный результат никогда не был для него самоцелью — за ним стояла определенная философия), то в последних работах философия выступает на первый план, главной становится концепция, а конкретные результаты начинают играть подсобную роль.

---

*) Названная книга в дополненном виде переиздана в Москве издательством «Наука» в 1991 г.

В области теоретической кибернетики подобных работ почти что не было, и к ним выработалось предубежденное отношение. Стало привычным ценить конкретные результаты и недооценивать философские аспекты. При этом упускалось из виду, что в математике на протяжении почти всего ее развития именно такой философский подход был одним из центральных.

О математической деятельности такого рода прекрасно сказано у А. Н. Колмогорова. Обсуждая основные типы математической одаренности и перечислив некоторые из них (алгоритмические способности, геометрическую интуицию, искусство логического рассуждения в непривычной обстановке), он пишет: «Но существуют и такие математические проблемы, которые могут быть решены лишь в результате очень длительного и спокойного размышления и формирования новых понятий. Много такого рода проблем было решено замечательным советским топологом П. С. Александровым. Не случайно Павел Сергеевич Александров неоднократно говорил, что если бы во времена его юности были математические олимпиады, то, возможно, он вообще не сделался бы математиком: его главные достижения в математике явились не плодом быстро работающей *изобретательности*, а итогом длительного и углубленного *созерцания*» [2, с. 65].

В какой-то пропорции обеими способностями наделен каждый математик. И все же, по-видимому, в зрелом возрасте характерен переход от более конкретных задач, требующих, как правило, склонности к комбинаторике, к проблемам более общего вида. Так сложился и творческий путь Рошаля Габдулхаевича Нигматуллина.

Взяв на себя смелость рассказывать о работах Р. Г. Нигматуллина по нижним оценкам сложности, я должен сразу признаться, что понимаю в них далеко не все. Впрочем, разве могло быть иначе? Если бы автору уже в первом изложении серьезной проблемы удалось достичь ясности и полноты освещения, то это означало бы, что проблема на самом деле не так уж сложна.

Чтобы по-настоящему глубоко понимать последние работы Р. Г. Нигматуллина, недостаточно прочитать их в замедленном темпе, осмысливая каждое звено в цепи логических построений. Необходимо самому работать в этой области. Мне придется удовлетвориться тем, что я больше буду рассказывать о том впечатлении, какое у меня сложилось в результате чтения этих работ, о тех соображениях, которые при этом возникли.

Когда в начале 70-х годов Рошаль Габдулхаевич обратился к проблеме нижних оценок сложности, ему пришлось начинать практически с нуля. Это обычная для математика ситуация, когда он берется за

н о в у ю и вдобавок т р у д н у ю задачу. Сначала (и нередко в течение длительного времени) в голову не приходит ни одной идеи, как взяться за ее решение. Потом появляется мысль: «А что если попробовать вот это..., нет, тут безнадежно! Лучше, наверно, попробовать вон то..., нет, там тоже безнадежно!». То, что хочется попробовать, обычно бывает довольно расплывчатым. Правда, могут быть исключения — например, хочется применить метод математической индукции. Но дальше все равно расплывчато: что доказывать по индукции? — какое-то неравенство? или какое-то свойство, из которого такое неравенство будет следовать?

Часто хочется рассмотреть объект, чуть-чуть отличающийся от известных (фактически ввести новое понятие). А какие должны быть у него свойства? С одной стороны — хорошо бы примерно вот такие..., с другой стороны — хорошо бы примерно вот эдакие..., но ведь одновременно это невозможно! Ладно, давайте какие-нибудь требования ослабим... Но тогда ничего не выйдет. Придется взамен какие-то требования усилить. И вот уже воображаемый объект совершенно расплылся, и математик уже точно не знает, какими же свойствами наделил он предмет своего воображения.

Каждому математику хорошо знакомо состояние, когда после длительного размышления над задачей «в уме» хочется какой-то промежуточный этап зафиксировать на бумаге. Очень часто оказывается, что сделать это невозможно. При первой же попытке выясняется, что проведенные рассуждения настолько приблизительны, настолько расплывчаты, что точно записать их нельзя: как ни записывай — они будут сильно искажены. Несформулированные мысли, благодаря своей расплывчатости, богаче того, что в принципе может быть зафиксировано. Парадоксально, но факт: они, благодаря этому, и точнее.

Здесь есть и еще одно серьезное препятствие — это особенности динамики мысли. Стоит только начать фиксировать обдуманное, как мысль сразу тормозится — и, быть может, в самый неподходящий момент — когда как раз был близок важный опорный пункт для мысли, а возвращение к нему может и не состояться. Противоречие между мыслью, находящейся в поиске, и ее записью, фиксирующей лишь достаточно четко сформулированную мысль, по-видимому, непреодолимо.

Мне очень нравится, как в этом плане сказано у В. А. Жуковского [1]. Быть может, по современным понятиям стихи Жуковского несколько тяжеловаты или не удовлетворяют каким-нибудь другим критериям качества. Но главное в них смысл:

Что наш язык земной пред дивною природой?
С какой небрежною и легкою свободой

Она рассыпала повсюду красоту
И разновидное с единством согласила!
Но где, какая кисть ее изобразила?
Едва, едва одну ее черту
С усилием поймать удастся вдохновенью...
Но льзя ли в мертвое живое передать?
Кто мог создание в словах пересоздать?
Невыразимое подвластно ль выраженью?...

Формально, последняя строка — тавтология: «невыразимое невыразимо». Но смысл в ней: невыразимое существует и мы даже не представляем себе его масштабы.

Я склонен думать, что сам Жуковский подразумевал весьма широкое толкование этого отрывка: невозможно адекватно передать, изобразить на бумаге не только внешний мир, но и чувства человека, живущего в этом мире. Говоря о математике, я бы еще чуть-чуть расширил толкование: многие мысли — да что там, многие — большинство мыслей невыразимо, т. е. они не могут быть достаточно точно переданы ни словами, ни символами, ни картинками, ни чем-нибудь еще.

Но время от времени (какая бы отличная ни была память!) кое-что приходится фиксировать. Хорошо, если к этому моменту был получен конкретный результат — его можно зафиксировать довольно точно. А если нет? Тогда уже через небольшой промежуток времени по записи не удается восстановить то состояние, то ощущение, которое было, когда эта запись делалась. Это означает, что часть добытых знаний утеряна и, быть может, безвозвратно. Вот и получается: не запишешь — потеряешь информацию, запишешь — тоже потеряешь. И чем сложнее проблема, чем больше растягивается процесс ее решения, тем меньше сделанные записи отражают то, что к этому моменту было достигнуто в результате интеллектуальной работы.

У Р. Г. Нигматуллина работа над проблемой нижних оценок сложности растянулась на многие годы. Большая роль абстракций в подобного рода исследованиях и сравнительно небольшая роль конкретных результатов затрудняли сильнее, чем обычно, фиксирование промежуточных умозаключений. Необходима была максимальная концентрация внимания, чтобы в процессе записи не растерять то, что удалось придумать, понять, но еще не удалось точно сформулировать. И все равно сохранить в полном объеме итоги труда, конечно, не удавалось. Разумеется, Рошаль Габдулхаевич замечал это и снова начинал утомительные поиски.

Для завершения таких поисков недостаточно целой жизни, тем более непродолжительной. В связи с этим очень ценно, что Р. Г. Нигматуллин

стал публиковать свои работы, не дожидаясь того момента, когда у него сложится безукоризненная концепция и он будет способен выразить на бумаге почти все, что хочет. Нелегко быть первопроходцем.

Как, на мой взгляд, следует воспринимать последние работы Р. Г. Нигматуллина? Во-первых, труднейшая проблема нижних оценок сложности по-прежнему очень далека от решения: его работы — это только первый подход к ней. Во-вторых, опубликовано лишь то, чему удалось придать более или менее законченный вид. Какую долю всех изысканий Нигматуллина составляет этот материал, определить невозможно. В-третьих, философский характер исследования создал условия для широкого проникновения в опубликованные работы «невыразимого». Это означает, что не всё в последних работах Р. Г. Нигматуллина следует понимать буквально — кое-где надо видеть намек на недосказанную или даже незаконченную мысль. Не стоит также придавать слишком большое значение каждому частному положению или конкретному результату; главное — как из них складывается общая концепция. Впрочем, возможно, что здесь перед нами лишь видимая часть айсберга, а почти весь он — в области невыразимого. Но даже если это так, то можно попытаться, изучая верхнюю часть айсберга, сделать какие-то выводы о том, что у него в глубине.

Переходя теперь непосредственно к изложению работ Р. Г. Нигматуллина по нижним оценкам сложности, я прекращаю строить гипотезы и постараюсь возможно точнее передать содержание этих работ. Следовать буду монографии [3].

Современную формулировку проблемы нижних оценок сложности невозможно понять, не зная ее истории. Поэтому автор рассказывает о происхождении этой проблемы и о том, как изменялась ее постановка в течение почти полувековой истории. Когда началось изучение сложности различных объектов, довольно скоро выяснилось, что точное значение сложности можно найти лишь в простейших ситуациях. Поэтому появилось естественное желание хотя бы хорошо оценить эту сложность сверху и снизу. В некотором смысле оценить сложность сверху проще, поскольку любое конкретное вычисление функции (а речь чаще всего идет именно о таких объектах) дает верхнюю оценку сложности. Другое дело — получение нижней оценки сложности: здесь надо убедиться, что в с е вычисления данной функции имеют сравнительно большую сложность.

В принципе для произвольной функции можно получить хорошую нижнюю оценку сложности (даже найти точное значение) на основе перебора конечного числа вычислений функции. Однако в любом нетривиальном случае это число настолько велико, что на самом деле такой

перебор практически неосуществим. В связи с этим постановка проблемы видоизменяется: доказать хорошую нижнюю оценку сложности не для произвольной функции, а для какой-нибудь конкретной функции.

В такой постановке проблема была решена в 1942 г. Дж. Риорданом и К. Шенноном, которые на одной конкретной модели вычислений (реализация булевых функций параллельно-последовательными контактными схемами) показали, что почти все конечные функции имеют очень большую сложность. Идея доказательства состоит в том, чтобы сравнить число функций от n переменных с числом схем не очень большой сложности, реализующих эти функции, и убедиться, что схем гораздо меньше, чем функций. Для бесконечных моделей вычислений (таких, как машины Тьюринга или нормальные алгорифмы) соответствующие нижние оценки сложности были получены идейно близким диагональным методом, восходящим к Г. Кантору. Оба метода (мощностной и диагональный) доказывают лишь существование сложных функций, но не указывают их явно (например, неизвестно, как их быстро вычислять). В обоих случаях в описании функций фигурирует понятие сложности. Поэтому (после того, как существование сложных функций доказано) рассматриваемые функции оказываются сложными просто в силу определения.

Это обусловило новое изменение в постановке проблемы: доказать высокую нижнюю оценку сложности для функции, определение которой не использует сложностных категорий. Предполагалось, что такая формулировка проблемы поставит надежный заслон на пути решений, которые интуитивно можно расценивать как неудовлетворительные.

Однако в начале 70-х годов проблема была решена и в такой постановке. Ряд авторов (А. Эренфойхт, А. Р. Мейер, Х. Б. Хант, Л. Дж. Стокмейер, Л. А. Шоломов и др.) в течение короткого промежутка времени предложили каждый свой вариант решения проблемы. «Конкретные» функции, рассматривавшиеся в этих работах, действительно были определены без использования сложностных терминов, а нижние оценки для них были получены очень высокие. И все же в интуитивном плане это не могло считаться решением проблемы. Весьма поучительны сама возможность и характер обходных путей. Во всех работах задание функций осуществлялось с помощью очень сильных выразительных средств (формальные логические теории, вычислимые функции и т. д.). При этом введенные функции (которые казались «конкретными») получались настолько выразительными, что к их вычислению можно было полиномиально свести вычисление сложных функций, построенных мощностным методом или диагонализацией (именно так и доказывались высокие

нижние оценки). Снова появилась необходимость уточнить постановку проблемы.

Все нижние оценки сложности, о которых говорилось выше, принято называть неэффективными. Поэтому на интуитивном уровне проблема состоит в доказательстве высоких э ф ф е к т и в н ы х нижних оценок сложности вычисления функций. Точная формулировка проблемы упирается в необходимость определить понятие «эффективная нижняя оценка сложности», или, что примерно то же самое, провести разграничение между эффективными и неэффективными нижними оценками.

Почти все известные методы доказательства эффективных (в интуитивном смысле) нижних оценок сложности работают по отношению лишь к какой-нибудь одной модели вычислений. Поэтому целесообразно выбрать одну из этих моделей и дальше исследовать проблему нижних оценок сложности только для нее. Автор выбирает схемы из функциональных элементов, справедливо считая, что, с одной стороны, они обладают большей простотой (модель все-таки конечная), а с другой — все основные трудности данной проблемы сохраняют для них силу (так как в некотором естественном смысле они полиномиально эквивалентны машинам Тьюринга, а значит, и другим бесконечным моделям вычислений). Тем самым автор рассматривает одну из проекций проблемы: **доказать высокие эффективные нижние оценки сложности вычисления булевых функций схемами из функциональных элементов**.

Несмотря на значительные усилия на протяжении нескольких десятилетий нет сколько-нибудь заметного прогресса в решении этой проблемы. Все эффективные (в интуитивном смысле) доказательства дают лишь линейные относительно числа переменных булевых функций нижние оценки сложности, что по порядку не отличается от тривиальной нижней оценки и экспоненциально ниже неэффективных нижних оценок. Вопрос «Можно ли доказать нелинейные нижние оценки сложности в классе схем из функциональных элементов?» давно стоит в теории сложности и фактически является просто другим аспектом рассматриваемой проблемы.

Трудности решения проблемы нижних оценок сложности вынудили искать успех на флангах — стали рассматривать более слабые модели вычислений, а именно схемы из функциональных элементов с ограничениями: схемы в неполных базисах, схемы ограниченной глубины, схемы без нулевых цепей и т. д. В результате штурма этой проблемы многими математиками для каждой из перечисленных моделей удалось получить экспоненциальные или близкие к ним эффективные нижние оценки сложности.

В то же время для схем с другими ограничениями: для синхронных схем, схем без ветвления выходов элементов (т. е. булевых формул) нижние оценки такой величины получить не удалось, хотя их исследовали не меньше, а может быть, и больше. Самые высокие нижние оценки для булевых формул в настоящий момент имеют вид n^c, где $c \leqslant 3$; для синхронных схем оценки еще ниже. Неизбежно возникает вопрос: «В чем принципиальное различие между одними видами ограничений и другими?». Этот вопрос настолько тесно связан с проблемой нижних оценок сложности, что невозможно уйти от ответа на него.

Подводя итог, Р. Г. Нигматуллин формулирует три основных вопроса, которые в совокупности характеризуют, по его мнению, проблему нижних оценок сложности (см. [3, с. 7–8]).

Вопрос первый. Как провести разграничение эффективных и неэффективных доказательств нижних оценок сложности?

Вопрос второй. Почему для одних моделей с ограничениями высокие нижние оценки сложности получаются легче, для других (например, схем в монотонном базисе) труднее, а для третьих вообще не получаются?

Вопрос третий. Можно ли прогнозировать возможности доказательства высоких нижних оценок сложности для новых, еще не исследованных моделей вычислений?

Заслуживает внимания отношение самого Нигматуллина к этим вопросам. В своей монографии он пишет: «Полувековая история проблемы нижних оценок сложности продемонстрировала сложность этих вопросов. Поэтому трудно рассчитывать на то, что в близком будущем мы получим однозначные ответы на эти вопросы. В то же время для прогресса в решении проблемы нижних оценок сложности важно искать ответы на поставленные вопросы. В такой ситуации нам представляется разумным искать компромиссные варианты. В данной книге развивается один из таких вариантов. Он заключается в построении математической модели доказательств нижних оценок сложности. Эта модель призвана достаточно адекватно отразить текущее состояние проблемы нижних оценок сложности и пролить свет на поставленные вопросы. Это должно способствовать лучшему пониманию проблемы нижних оценок сложности и ориентировать при поисках путей решения этой проблемы» [3, с. 19].

Безуспешность многочисленных настойчивых попыток доказать высокие эффективные нижние оценки сложности (для схем без ограничений) дает основание предположить, что существуют принципиальные препятствия, мешающие положительному решению проблемы. Тем самым ставится вопрос о возможности отрицательного ее решения, состоящего в том, что при определенных условиях высокие нижние оценки

сложности получить вообще невозможно. Необходимость сформулировать такие условия фактически и заключена в первом вопросе.

На первом этапе исследования Р. Г. Нигматуллин проанализировал практически все известные ему методы эффективных (в интуитивном смысле) доказательств нижних оценок сложности. Описание и анализ многих из этих доказательств он включил в книгу, сделав весьма представительную выборку как по разнообразию моделей вычислений, так и по разнообразию методов доказательств.

Каждое доказательство он расчленил на элементарные логические шаги и для каждого шага нашел наиболее простое свойство булевой функции (для которой доказывается нижняя оценка сложности), позволяющее сделать этот шаг. Можно было ожидать, что любое такое свойство использует далеко не всю информацию о булевой функции. Но чтобы настолько мало! Выяснилось, что каждое свойство определяется значениями булевой функции на очень небольшом числе наборов ее аргументов. Во всяком случае, если ввести в рассмотрение частичную булеву функцию, совпадающую на этих наборах с данной булевой функцией (и неопределенную на остальных наборах), то окажется, что ее сложность по порядку не превышает n — числа переменных булевой функции. И это верно для любого шага любого доказательства, проанализированного Нигматуллиным. Как всё просто..., но сколько безуспешных попыток в разных направлениях пришлось сделать Рошалю Габдулхаевичу, прежде чем он обнаружил это!

Правда, в 1985 г. А. А. Разборов и вслед за ним А. Е. Андреев получили очень высокие нижние оценки сложности для схем в монотонном базисе $\{\&, \vee\}$, доказательства которых, по-видимому, представляют исключение из закономерности, обнаруженной Р. Г. Нигматуллиным. Последние месяцы жизни он много размышлял над этим, пытаясь понять, действительно ли появился качественно новый метод доказательства или все дело в том, что требуется усовершенствовать свою концепцию. Независимо от будущего ответа на этот вопрос уже сейчас ясно, что Р. Г. Нигматуллин обнаружил очень важную особенность подавляющего большинства известных доказательств нижних оценок сложности. Она и была положена им в основу разграничения эффективных и неэффективных доказательств нижних оценок сложности.

Эффективность доказательства Р. Г. Нигматуллин ставит в зависимость от двух факторов. Первым фактором является сложность «элементарных» частичных булевых функций, о которых говорилось выше. Пусть s — максимальная сложность этих элементарных функций. Чем ниже эта сложность s, тем эффективнее считается доказательство. В частности, во всех доказательствах нижних оценок сложности,

проанализированных Нигматуллиным, $s(n) = O(n)$. Второй фактор — это отношение λ величины нижней оценки сложности к сложности $s(n)$ (очевидно, что $\lambda \geqslant 1$). Чем больше λ, тем эффективнее считается доказательство.

Если же для неэффективного (в интуитивном смысле) доказательства попытаться подобным образом ввести частичную булеву функцию, то, по-видимому, придется взять в качестве нее просто исходную булеву функцию. Сложность «элементарной» функции будет экспоненциальной, а $\lambda = 1$.

Итак, разграничение, действительно, налицо и очень резкое. Выбор двух критериев эффективности доказательства нижней оценки сложности можно рассматривать как ответ на первый из поставленных выше вопросов.

В ходе дальнейшего исследования Р. Г. Нигматуллин опирается только на первый критерий. Второй критерий по неизвестным причинам остался без применения, хотя он очень интересен. Можно считать, что это подсказка автора, над чем еще стоит размышлять.

В процессе анализа доказательств было выяснено, что каждое эффективное доказательство нижней оценки сложности для конкретной булевой функции характеризуется множеством частичных булевых функций, «покрываемых» данной булевой функцией. В широком смысле слова булева функция является универсальной функцией для этого множества частичных булевых функций. Заранее ясно, что для универсальной функции, понимаемой в обычном смысле, должны быть возможны те же самые логические шаги в доказательстве, а значит, должна получаться такая же нижняя оценка сложности, как и для оцениваемой булевой функции. В нескольких случаях Р. Г. Нигматуллин в явном виде проверяет это, и проверка, конечно, дает положительный результат. Таким образом возникает первая модель доказательств нижних оценок сложности — «универсальные функции».

Благодаря этой модели сложность любой универсальной функции является верхней границей для величины соответствующей нижней оценки сложности. Модель применялась автором для схем без ограничений, синхронных схем и булевых формул. В каждом из этих классов схем была найдена весьма экономная реализация универсальной функции для множества, состоящего из всех булевых функций, у которых переменными (не обязательно существенными) являются $x_1, \ldots, x_n$, а сложность не превосходит $s(n)$. (Некоторые из этих конструкций были известны раньше, но большинство принадлежит автору.) Очевидно, что такая универсальная функция является универсальной и для множества частичных булевых функций, встречающихся в любом конкретном

доказательстве. Поэтому каждая из предложенных конструкций в своем классе схем дает верхнюю границу величины нижней оценки сложности для доказательства с параметром $s(n)$.

Для меня осталось большой загадкой, почему Р. Г. Нигматуллин не завершает эти рассуждения точной формулировкой результата, а извлекает соответствующий, но более слабый результат из второй модели доказательств нижних оценок сложности, связанной с универсальными схемами. И это при том, что он сам постоянно подчеркивает: «Первая модель является более точной». Еще более загадочно (по крайней мере для меня) его высказывание о булевых формулах: «Для булевых формул найдена экономная реализация универсальных функций, но не универсальных схем. Поэтому выводы о трудностях доказательства высоких нижних оценок сложности в случае булевых формул надо делать с большей осторожностью» [3, с. 11].

Конечно, я мог не обратить должного внимания на какое-либо указание Рошаля Габдулхаевича, проясняющее эту ситуацию. Но все же больше похоже, что здесь что-то не договорено до конца.

Упомянутый результат, безусловно, является центральным в этом цикле работ. Я привожу его в формулировке Нигматуллина. До тех пор, пока не введены понятия, связанные со второй моделью доказательств нижних оценок сложности, этот результат придется воспринимать на интуитивном уровне.

Теорема 1 [3, с. 97]. *Для произвольного множества S схем с полюсами из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ в классе схем из функциональных элементов универсальным доказательством S не выводимы нижние оценки сложности, превосходящие по порядку $s^2(s+n)$, если $L(S) \leqslant s(n)$.*

Похожая теорема (с несколько более высокими оценками) доказана и для синхронных схем. О булевых формулах уже было сказано. Таким образом, если $s(n)$ мало, что как раз характеризует эффективные доказательства, то ни в классе схем без ограничений, ни в классе синхронных схем, ни в классе булевых формул невозможно получить высокие нижние оценки сложности. Этому препятствует простота реализации в этих классах универсальных схем (или универсальных функций). Это является частичным ответом на второй из поставленных выше вопросов.

Модель «универсальные функции» обладает рядом достоинств (прежде всего — это точность модели), но имеет ограниченную применимость. В некоторых случаях универсальная функция может вообще не существовать. Это относится прежде всего к схемам в неполном базисе. Как показал Р. Г. Нигматуллин, при условии (довольно слабом), что в базисе выразима тождественная функция, выразимость в этом базисе универсальной функции равносильна выразимости в нем более простой

функции — функции выбора. Таким образом, если функция выбора невыразима в неполном базисе, то универсальной функции не существует. В то же время универсальные схемы существуют всегда. Это стимулировало создание второй модели доказательств нижних оценок сложности — «универсальные доказательства».

Еще в процессе анализа доказательств нижних оценок сложности Р. Г. Нигматуллин обратил внимание на то, что все эти доказательства, как правило, разбиваются на два этапа, среди которых определяющим является первый, т. е. уже на первом этапе получается нижняя оценка сложности, которая потом немного усиливается. Он заметил также, что во всех доказательствах на первом этапе оценивалась снизу фактически одна и та же величина, связанная с рассматривавшейся функцией, — максимальное число вершин минимальной схемы, не соединенных (ориентированными) путями, получившая у него название «ширина функции».

А дальше неизбежен скачок мысли. Р. Г. Нигматуллин выдвигает гипотезу, что такая тесная связь между нижними оценками сложности и ширины должна быть типичной и для будущих методов доказательств нижних оценок сложности. Какие могут быть доводы в пользу этой гипотезы? Легко заметить, что асимптотически оптимальный метод синтеза схем, принадлежащий О. Б. Лупанову, для почти всех булевых функций дает схемы, ширина которых лишь незначительно меньше сложности. Это наблюдение помогает Р. Г. Нигматуллину доказать, что почти у всех булевых функций ширина растет экспоненциально, хотя, быть может, медленнее, чем сложность. Это явно говорит о близости сложности и ширины.

Мое личное отношение к этой гипотезе весьма противоречиво. С одной стороны, мне кажется, что во всех интересных случаях минимальные схемы должны иметь небольшую глубину, а значит, ширину — почти такую же, как сложность. С другой стороны, я уверен, что можно придумать сколько угодно искусственных примеров, для которых это не так. В этих условиях следует, по-видимому, придерживаться такой позиции: все последующие выводы справедливы в тех случаях, когда гипотеза выполняется.

Построение второй модели доказательств нижних оценок сложности (универсальные доказательства) Р. Г. Нигматуллин производит следующим образом. Для каждой частичной булевой функции из множества, характеризующего доказательство нижней оценки сложности, должна быть выбрана простая реализующая ее схема — например, сложности, не превосходящей по порядку $s(n)$. Разумеется, каждая такая схема должна удовлетворять тем ограничениям, при которых доказывается

нижняя оценка сложности. Для множества полученных схем, обозначаемого через S, строится универсальная схема $UC(S)$. В отличие от конструкции для универсальной функции универсальная схема должна воспроизводить структуру каждой из моделируемых схем, но зато выходы разных схем могут отображаться в разные вершины универсальной схемы. Это и гарантирует существование универсальной схемы при любых ограничениях.

На многочисленных примерах Р. Г. Нигматуллин убеждается, что доказательство нижней оценки ширины, проводящееся на первом этапе доказательства конкретной нижней оценки сложности, моделируется доказательством нижней оценки сложности универсальной схемы $UC(S)$. Поэтому $L(UC(S))$ является верхней границей для величины нижней оценки сложности, которая может быть получена на первом этапе. По наблюдениям Р. Г. Нигматуллина, на втором этапе нижняя оценка сложности усиливается не более чем в $s(n)$ раз. Поэтому для доказательства в целом Р. Г. Нигматуллин определяет верхнюю границу величины нижней оценки сложности как $L(UC(S)) \cdot s(n)$ (по определению считается, что более высокие нижние оценки сложности в этой модели н е в ы в о д и м ы). Заметим еще, что всякая нижняя оценка для $L(UC(S))$ может рассматриваться как нижняя оценка сложности, которая может быть доказана для соответствующей булевой функции. Такая модель называется универсальным доказательством и обозначается той же буквой S, что и характеризующее ее множество схем.

Теперь, когда введены все необходимые понятия и обозначения, можно еще раз взглянуть на формулировку центральной теоремы, приведенную выше, и увидеть, что она приобрела точный смысл.

Опираясь на модель «универсальные доказательства» и доказав высокие нижние оценки сложности для универсальных схем в классе схем без нулевых цепей, в классе схем ограниченной глубины и в классе схем в одном неполном базисе, Р. Г. Нигматуллин дает ответ и на первую часть второго поставленного выше вопроса: для перечисленных классов схем высокие нижние оценки сложности удается доказать потому, что для них универсальные схемы имеют большую сложность.

Модель «универсальные доказательства» позволяет ответить и на третий вопрос. Чтобы прогнозировать возможность доказательства высоких нижних оценок сложности для новой, еще не исследованной модели вычислений, надо изучить сложность соответствующей универсальной схемы. (Обычно это гораздо более простая задача.) Если для нее будет получена высокая нижняя оценка сложности, то это даст хорошие шансы эффективно доказать высокую нижнюю оценку сложности и для новой модели вычислений (причем, может быть, даже тем же самым

методом). Если же универсальная схема имеет небольшую сложность, то доказательство высоких нижних оценок сложности встретит, скорее всего, очень большие трудности.

Р. Г. Нигматуллин неоднократно подчеркивает, что не следует абсолютизировать сделанные им выводы. В частности, он пишет: «...изложенные ответы на поставленные выше три вопроса следует рассматривать как относительные: они имеют силу только для тех доказательств нижних оценок сложности, которые описываются универсальными доказательствами, и потому не исключают возможности положительного решения проблемы нижних оценок сложности» [3, с. 9]. В самом конце монографии он делает еще одно важное пояснение: «Их (выводы. — *В. Х.*) следует рассматривать скорее как объяснение трудностей доказательства высоких нижних оценок сложности. Объяснение состоит в трудностях выхода за пределы класса универсальных доказательств. До сих пор это никому не удавалось сделать (в случае схем и формул в полном базисе)» [3, с. 99].

В последнем высказывании содержится также очень полезное указание для тех, кто занимается поиском новых методов доказательства нижних оценок сложности. Мы еще ясно не представляем себе, не можем до конца оценить, сколько таких замечательных подсказок рассеяно по последним работам Р. Г. Нигматуллина.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жуковский В. А.** Собрание сочинений: В 4 т. М.; Л.: Гослитиздат, 1959. Т. I.
2. **Колмогоров А. Н.** Математика — наука и профессия. М.: Наука, 1988.
3. **Нигматуллин Р. Г.** Нижние оценки сложности и сложность универсальных схем. Казань: Изд-во КГУ, 1990.

Адрес автора:

Институт
прикладной математики
им. М. В. Келдыша,
Миусская пл., 4,
125047 Москва, Россия

Статья поступила
11 января 2000 г.