ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2000. Серия 1. Том 7, № 1, 32–39

УДК 519.1

РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ МУЛЬТИГРАФА В ПРЕДПИСАННЫЕ ЦВЕТА*)

В. Г. Визинг

Задача нахождения правильной p-раскраски инциденторов ориентированных мультиграфов в наименьшее число цветов была впервые рассмотрена в [3]. В настоящей статье рассматривается определяемая специальным образом p-раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа в предписанные цвета. Оценивается необходимая мощность предписания для существования такой раскраски. Результаты применяются к тотальной p-раскраске вершин и инциденторов мультиграфа.

1. Введение. Основные понятия

Не определяемые в статье понятия можно найти в [1, 2].

Под мультиграфом $G = (V, E)$ понимается конечный ориентированный мультиграф без петель, с непустым множеством вершин $V = V(G)$ и непустым множеством дуг $E = E(G)$. Через $\sigma(G)$ обозначается максимальная степень вершины мультиграфа G, через $\sigma^+(G)$ и $\sigma^-(G)$ — соответственно максимальная полустепень исхода и максимальная полустепень захода вершины. Каждая дуга $e = (\overrightarrow{u, v})$ имеет два инцидентора: начальный $i_1(e) = (u, e)$ и конечный $i_2(e) = (v, e)$. Будем говорить, что инцидентор $i_1(e)$ содержит вершину u, инцидентор $i_2(e)$ — вершину v. Множество инциденторов мультиграфа G обозначается через $I = I(G)$.

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество этих чисел обозначим через C. Раскраска ζ инциденторов мультиграфа G — это однозначное отображение $I(G)$ в C.

Определим понятие предписания. *Инциденторное предписание* — это отображение $f : I \to 2^C$. Каждый цвет из множества $f(i) \subseteq C$ называется *предписанным*, или *допустимым*, для инцидентора i. Инциденторное предписание f называется *дуговым*, если $f(i_1(e)) = f(i_2(e)) = f(e)$ для любой дуги $e \in E$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект INTAS-OPEN-97-1001).

Определение 1. Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф, f — дуговое предписание, p — целое неотрицательное число.

Назовем p-раскраской инциденторов мультиграфа G в предписанные цвета такую раскраску ζ инциденторов, при которой выполняются условия:

a) каждый инцидентор окрашен в допустимый для него цвет;

b) $\zeta(i_2(e)) - \zeta(i_1(e)) \geqslant p$ для любой дуги $e \in E$;

c) любые два инцидентора, содержащие общую вершину, окрашены различно.

Определение 2. Инциденторным p-шаговым списочным хроматическим числом мультиграфа G называется такое наименьшее натуральное число $\chi I_L(p, G)$, что при любом дуговом предписании f, удовлетворяющем условию $|f(e)| \geqslant \chi I_L(p, G)$ для любого $e \in E$, существует p-раскраска инциденторов мультиграфа G в предписанные цвета.

Легко видеть, что $\chi I_L(p, G) \geqslant \sigma(G)$.

Основной результат настоящей работы состоит в том, что $\chi I_L(p, G) \leqslant 2\lfloor\frac{\sigma(G)+1}{2}\rfloor + p$.

В работах [3–5] изучалась раскраска инциденторов при отсутствии предписания. Такую раскраску будем называть *свободной*. Свободную раскраску можно представить себе как разновидность раскраски в предписанные цвета, когда предписанные множества цветов являются интервалами с левым концом 1. (Здесь интервал $[a, b]$ — это множество натуральных чисел j, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant j \leqslant b$.) Через $\chi I(p, G)$ обозначается минимальное число цветов, необходимых для свободной p-раскраски инциденторов мультиграфа G. Ясно, что $\chi I(p, G) \leqslant \chi I_L(p, G)$. В [4] доказана формула $\chi I(p, G) = \max\{\sigma(G), \sigma^+(G) + p, \sigma^-(G) + p\}$. Она не переносится на случай p-раскраски инциденторов в предписанные цвета.

Действительно, пусть $p \geqslant 1$. Рассмотрим мультиграф G с вершинами v_1, v_2, v_3, в котором имеется $k - 1$ дуг, идущих из v_1 в v_2, и одна дуга, идущая из v_2 в v_3 ($k \geqslant 2$). Дуговое предписание таково: дуге, идущей из v_2 в v_3, предписан интервал $[p + 1, 2p + k - 1]$; каждой из остальных дуг предписан интервал $[1, k + p - 1]$. Таким образом, каждой дуге мультиграфа G предписано $k + p - 1$ цветов. Вместе с тем p-раскраски инциденторов мультиграфа не существует, в чем легко убедиться. Значит,

$$\chi I_L(p, G) > k + p - 1 = \max\{\sigma(G), \sigma^+(G) + p, \sigma^-(G) + p\} = \chi I(p, G),$$

т. е. равенство $\chi I_L(p, G) = \chi I(p, G)$ при $p \geqslant 1$ может не иметь места. Ответ на вопрос о том, всегда ли справедливо это равенство при $p = 0$, автору не известен.

В статье впервые рассматривается задача тотальной вершинно-инциденторной раскраски мультиграфа.

2. Примитивная раскраска инциденторов

Прежде чем приступать к изложению основных результатов, необходимо рассмотреть один специальный вид раскраски инциденторов.

Определение 3. Раскраска инциденторов ζ мультиграфа $G=(V,E)$ называется *примитивной*, если она обладает следующим свойством: любые два инцидентора, содержащие общую вершину, окрашены различно. Величина $h(e) = \zeta(i_1(e)) + \zeta(i_2(e))$ называется *высотой дуги* $e \in E$ при раскраске ζ, а величина $h(\zeta) = \max\limits_{e \in E}\{h(e)\}$ называется *высотой раскраски* ζ.

Легко видеть, что $h(\zeta) \geqslant \sigma(G) + 1$ для любой примитивной раскраски ζ инциденторов мультиграфа G.

Разумеется, можно говорить о примитивной раскраске инциденторов в предписанные цвета. Но если мы не упоминаем о предписании, как в леммах 1–3, то это значит, что речь идет о свободной раскраске.

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф с четной максимальной степенью вершины. Тогда существует такая примитивная раскраска ζ инциденторов мультиграфа G, что*

$$h(\zeta) = \sigma(G) + 1. \tag{1}$$

Доказательство. Нужно доказать существование такой примитивной раскраски ζ, что $h(\zeta) \leqslant \sigma(G) + 1$.

Пусть $\sigma(G) = 2k \geqslant 2$. Без ограничения общности будем считать, что G — однородный мультиграф степени $2k$. По теореме Петерсена [1, 2] мультиграф G представляется в виде суммы 2-факторов $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Возьмем произвольный фактор F_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Каждая его компонента связности является простым циклом, содержащим четное число инциденторов. Двигаясь по циклу, будем попеременно красить инциденторы в цвета j и $2k+1-j$. Так как $j \leqslant k$, то $j \neq 2k+1-j$. Следовательно, раскраска инциденторов будет примитивной. Раскрасив так инциденторы каждой компоненты связности 2-фактора F_j, получим примитивную раскраску инциденторов F_j высоты $\sigma(G)+1$. Раскрасим указанным образом инциденторы каждого 2-фактора. Так как из $j_1 < j_2 \leqslant k$ вытекает, что $j_1 < j_2 < 2k+1-j_2 < 2k+1-j_1$, то инциденторы, принадлежащие различным факторам, будут раскрашены различно, и мы получим примитивную раскраску высоты $\sigma(G)+1$ инциденторов мультиграфа G. Лемма доказана.

К сожалению, равенство (1) не справедливо в том случае, когда $\sigma(G)$ — нечетное число, большее 1.

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф с нечетной максимальной степенью вершины. Тогда существует такая примитивная раскраска ζ инциденторов мультиграфа G, что*

$$h(\zeta) \leqslant \sigma(G) + 2. \tag{2}$$

Для любого нечетного числа $2k + 1 \geqslant 3$ можно построить мультиграф H с $\sigma(H) = 2k + 1$ такой, что высота любой примитивной раскраски его инциденторов не меньше $\sigma(H) + 2$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство (2). Добавив к G дугу, инцидентную вершине максимальной степени, получим мультиграф с четной максимальной степенью, равной $\sigma(G) + 1$. Теперь неравенство (2) следует из леммы 1.

Докажем неулучшаемость оценки (2). Пусть H — однородный мультиграф степени $m = 2k + 1 \geqslant 3$, не имеющий совершенного паросочетания; ψ — произвольная примитивная раскраска инциденторов мультиграфа H. Покажем, что $h(\psi) \geqslant m + 2$.

Предположим противное: пусть $h(\psi) \leqslant m + 1$. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что для любой вершины $v \in V(H)$ выполняется условие: инциденторы, содержащие эту вершину, окрашены в цвета $1, 2, \ldots, m$. Тогда сумма цветов инциденторов, содержащих любую вершину мультиграфа H, будет равна $\frac{(m+1)m}{2}$. Обозначим через S сумму цветов всех инциденторов мультиграфа H. Имеем: $S = \frac{(m+1)m}{2}|V(H)| = (m+1)|E(H)|$. Так как $h(\mathrm{e}) \leqslant m + 1$ для любой дуги $E \in E(H)$ и $(m+1)|E(H)| = S = \sum\limits_{e \in E(H)} h(e)$, то $h(\mathrm{e}) = m + 1$ для любой дуги $e \in E(H)$.

Рассмотрим дуги, один из инциденторов которых окрашен в цвет $k + 1$. Так как высота каждой дуги равна $m + 1 = 2k + 2$, то другой инцидентор каждой такой дуги окрашен в цвет $k + 1$. Следовательно, множество таких дуг образует совершенное паросочетание мультиграфа H, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — мультиграф с нечетной максимальной степенью вершины. Если G имеет паросочетание, насыщающее все вершины максимальной степени, то существует такая примитивная раскраска ζ инциденторов мультиграфа G, что $h(\zeta) = \sigma(G) + 1$.*

Доказательство. При $\sigma(G) = 1$ утверждение очевидно. Пусть $\sigma(G) = 2k + 1$, где $k \geqslant 1$. Удалим из G паросочетание M, насыщающее вершины максимальной степени. Остается мультиграф H с $\sigma(H) = 2k$. По лемме 1 существует примитивная раскраска ψ инциденторов мультиграфа H с $h(\psi) = 2k + 1$. Построим раскраску ζ инциденторов мультиграфа G так: все инциденторы дуг из паросочетания M окрасим

в цвет $k+1$, а для инциденторов i остальных дуг положим

$$\zeta(i) = \begin{cases} \psi(i), & \text{если } \psi(i) \leqslant k, \\ \psi(i)+1, & \text{если } \psi(i) > k. \end{cases}$$

Такая раскраска ζ инциденторов мультиграфа G будет искомой. Лемма доказана.

Замечание 1. Из леммы 3 и второй половины доказательства леммы 2 вытекает утверждение: для однородного мультиграфа G нечетной степени существует примитивная раскраска инциденторов высоты $\sigma(G)+1$ тогда и только тогда, когда G имеет совершенное паросочетание. Аналогичный критерий для неоднородного мультиграфа автору не известен.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 4. *Пусть G — мультиграф, ζ — свободная примитивная раскраска его инциденторов. Если f — инциденторное предписание такое, что $|f(i)| \geqslant \zeta(i)$ для любого инцидентора $i \in I(G)$, то существует примитивная раскраска в предписанные цвета инциденторов мультиграфа G.*

3. p-Раскраска инциденторов в предписанные цвета

В этом разделе доказываются две основные теоремы о p-раскраске.

Теорема 1. *Пусть G — мультиграф с четной максимальной степенью вершины. Тогда*

$$\chi I_L(p,G) \leqslant \sigma(G)+p. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть ζ — свободная примитивная раскраска инциденторов мультиграфа G высоты $\sigma(G)+1$. Ее существование гарантируется леммой 1. Пусть далее f — произвольное дуговое предписание, обладающее тем свойством, что $|f(e)| \geqslant \sigma(G)+p$ для любой дуги $e \in E(G)$. Построим следующее инциденторное предписание g. Инциденттору $i_1(e)$ каждой дуги $e \in E(G)$ предпишем подмножество множества $f(e)$, состоящее из $\zeta(i_1(e))$ меньших цветов из множества $f(e)$; инциденттору $i_2(e)$ предпишем подмножество, состоящее из $\zeta(i_2(e))$ больших цветов из множества $f(e)$. По лемме 4 существует примитивная раскраска ψ инциденторов мультиграфа G в предписанные цвета. Осталось доказать, что ψ является p-раскраской. Это вытекает из того, что если $j_2 \in g(i_2(e))$ и $j_1 \in g(i_1(e))$, то

$$j_2 - j_1 \geqslant p. \tag{4}$$

Докажем (4). Так как $|g(i_1(e))| + |g(i_2(e))| = \zeta(i_1(e)) + \zeta(i_2(e)) \leqslant \sigma(G) + 1$, то число цветов множества $f(e)$, либо бóльших j_2, либо мéньших j_1, не превосходит $|g(i_2(e))| - 1 + |g(i_2(e))| - 1 \leqslant \sigma(G) - 1$. А так как $|f(e)| \geqslant \sigma(G) + p$, то число цветов $j \in f(e)$, удовлетворяющих условию $j_1 \leqslant j \leqslant j_2$, не меньше $\sigma(G) + p - (\sigma(G) - 1) = p + 1$, откуда и следует (4). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G — мультиграф с нечетной максимальной степенью вершины. Тогда*

$$\chi I_L(p, G) \leqslant \sigma(G) + p + 1. \tag{5}$$

Доказательство. Добавив к G одну дугу, инцидентную вершине максимальной степени, получим мультиграф H такой, что $\sigma(H) = \sigma(G) + 1$ является четным числом. По теореме 1 имеем $\chi I_L(p, H) \leqslant \sigma(H) + p = \sigma(G) + p + 1$. Теперь (5) следует из неравенства $\chi I_L(p, G) \leqslant \chi I_L(p, H)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Неравенства (4) и (5) можно записать в виде одного неравенства

$$\chi I_L(p, G) \leqslant 2\left\lfloor \frac{\sigma(G) + 1}{2} \right\rfloor + p, \tag{6}$$

где $\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a.

Можно ли улучшить оценку (6)? Для любого натурального m (четного или нечетного) легко строится мультиграф H с $\sigma^+(H) = \sigma(H) = m$. Очевидно, что $\chi I_L(p, H) \geqslant \chi I(p, H) = \sigma(H) + p$.

Гипотеза 1. Для любого мультиграфа G

$$\chi I_L(p, G) \leqslant \sigma(G) + p.$$

4. Тотальная раскраска

Пусть каждой дуге и каждой вершине мультиграфа $G = (V, E)$ предписано некоторое множество цветов. *Тотальная p-раскраска в предписанные цвета* — это раскраска инциденторов и вершин мультиграфа в предписанные цвета, обладающая следующими свойствами:

a) вершины раскрашены правильно, т. е. смежные вершины окрашены в различные цвета;

b) каждый инцидентор окрашен в цвет, отличный от цвета вершины, которую он содержит;

c) раскраска инциденторов является p-раскраской.

Обозначим через $\chi\tau_L(p, G)$ наименьшее натуральное такое, что для любого вершинно-дугового предписания f, удовлетворяющего условиям $|f(v)| \geqslant \chi\tau_L(p, G)$ и $|f(e)| \geqslant \chi\tau_L(p, G)$ для любых $v \in V$, $e \in E$, существует тотальная p-раскраска мультиграфа в предписанные цвета.

Через $\chi\tau(p, G)$ обозначается наименьшее число цветов, необходимых для свободной тотальной p-раскраски мультиграфа G.

Лемма 5. *Для любого мультиграфа* $G = (V, E)$

$$\chi\tau_L(p, G) \leqslant \chi I_L(p, G) + 2. \tag{7}$$

Доказательство. Возьмем произвольное вершинно-дуговое предписание f для мультиграфа G такое, что $|f(v)| \geqslant \chi I_L(p, G) + 2$, $|f(e)| \geqslant \chi I_L(p, G) + 2$ для любых $v \in V$, $e \in E$. Раскрасим правильно все вершины мультиграфа G в предписанные цвета; это возможно, так как $\chi I_L(p, G) + 2 \geqslant \sigma(G) + 2$. После раскраски вершин из предписания для каждой дуги удалим те цвета, в которые окрашены инцидентные этой дуге вершины. Получим такое дуговое предписание g, что $|g(e)| \geqslant \chi I_L(p, G)$ для любой дуги $e \in E$. При этом предписании построим p-раскраску инциденторов мультиграфа G в предписанные цвета. Лемма доказана.

Из неравенств (6), (7), а также очевидных неравенств $\sigma(H) + 1 \leqslant \chi\tau(p, G) \leqslant \chi\tau_L(p, H)$ вытекает

Теорема 3. *Для любого мультиграфа* G

$$\sigma(G) + 1 \leqslant \chi\tau(p, G) \leqslant \chi\tau_L(p, G) \leqslant 2\left\lfloor\frac{\sigma(G)+1}{2}\right\rfloor + p + 2. \tag{8}$$

Гипотеза 2. $\chi\tau_L(p, G) \leqslant \sigma(G) + p + 2$ для любого мультиграфа G.

Эта гипотеза подтверждается в случае свободной тотальной раскраски.

Примечание при корректуре. Для свободной тотальной раскраски удалось доказать справедивость неравенства $\chi\tau(p, G) \leqslant \sigma(G) + p + 1$. Автор собирается изложить это в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

2. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

3. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.

4. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

5. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.

Адрес автора:

Одесская гос. академия
пищевых технологий,
ул. Канатная, 112,
270039 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@osaft.odessa.ua

Статья поступила
8 декабря 1999 г.