ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2000. Серия 1. Том 7, № 1, 49–66

УДК 519.17

E-СВОБОДНЫЕ ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ*)

В. В. Лозин

Предложена структурная характеризация класса двудольных графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графу E, где E — граф с вершинами a, b, c, d, e, f и ребрами ab, bc, cd, de, cf. Показано, что графы из этого класса распознаются за время $O(n^2)$. Доказана полиномиальная разрешимость в данном классе ряда проблем, являющихся NP-полными на множестве всех двудольных графов.

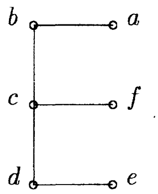
Введение

Все рассматриваемые в работе графы являются неориентированными, без петель и кратных ребер. Двудольный граф $H = (V_1, V_2, E)$ состоит из множества вершин $V_1 \cup V_2$ и множества ребер $E \subseteq V_1 \times V_2$. Множества V_1 и V_2 называются *долями графа H*. Если $|V_1| = |V_2|$, граф H называется *сбалансированным*. Для двудольного графа $H = (V_1, V_2, E)$ через $\widetilde{H}$ обозначено двудольное дополнение графа H, т. е. $\widetilde{H} = (V_1, V_2, (V_1 \times V_2) - E)$.

Множества вершин и ребер графа G обозначаются через VG и EG соответственно. Если вершины x и y графа G соединены ребром $e = xy \in EG$, то мы говорим, что e покрывает x и y. Кроме того, $N(x) = \{y \mid xy \in EG\}$ обозначает окрестность вершины $x \in VG$, $d(x) = |N(x)|$ — степень вершины x, $G[U]$ — подграф графа G, порожденный множеством вершин $U \subseteq VG$, $G - U$ — подграф графа G, порожденный множеством $VG - U$. Как обычно, K_n, P_n, C_n и $K_{n,m}$ обозначают соответственно полный граф, бесхордовую цепь, бесхордовый цикл с n вершинами и полный двудольный граф с долями мощности n и m.

Граф G назовем *H-свободным*, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных графу H. В настоящей работе исследуется класс E-свободных двудольных графов, где через E обозначен граф с вершинами a, b, c, d, e, f и ребрами ab, bc, cd, de, cf (рис. 1).

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00792).



Граф $E(a, b, c, d, e, f)$

Рис. 1

Класс E-свободных двудольных графов является расширением нескольких хорошо изученных подклассов двудольных графов (рис. 2). В качестве первого примера отметим, что данный класс включает все P_5-свободные двудольные графы. Легко проверяется тот факт, что любой связный P_5-свободный двудольный граф является $2K_2$-свободным. Класс $2K_2$-свободных двудольных графов вводился разными авторами неоднократно под различными именами (chain graphs [27], difference graphs [19], bisplit graphs [15]). Он имеет многочисленные приложения ввиду замечательных свойств этих графов.

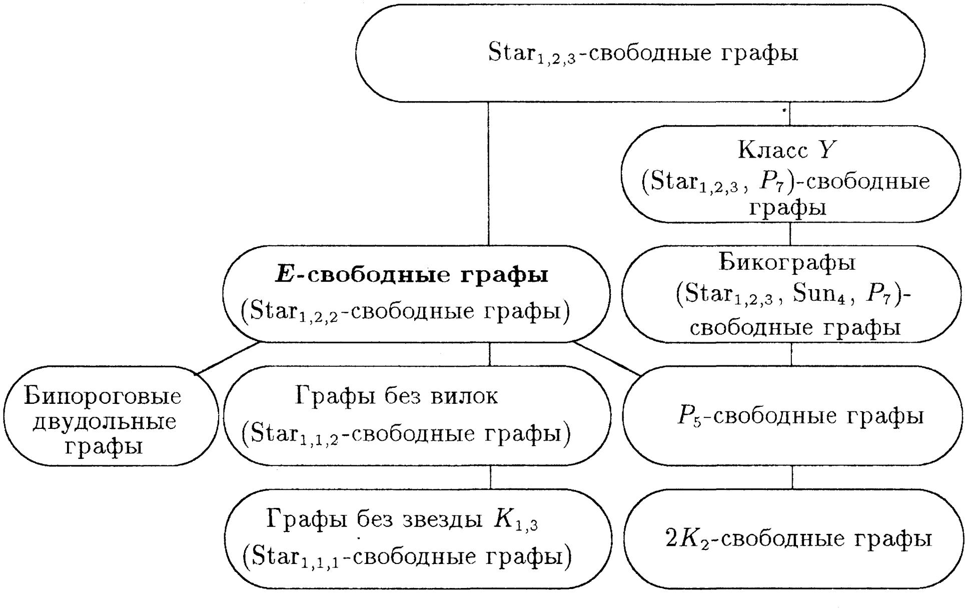


Рис. 2. Классы двудольных графов

Нетрудно убедиться, что вершины каждой доли $2K_2$-свободного двудольного графа можно линейно упорядочить по включению их окрестностей. Благодаря этому свойству $2K_2$-свободные двудольные графы могут рассматриваться как двудольный аналог пороговых графов, введенных в [7] в связи с изучением пороговых функций (см. [3, 19] для определения и характеризации пороговых графов и их связи с пороговыми функциями). В [15] было показано, что любой $2K_2$-свободный двудольный граф может быть разбит на независимое множество и биклику (полный двудольный подграф). Данное свойство позволяет считать $2K_2$-свободные двудольные графы двудольным аналогом расщепляемых графов. Еще одно важное свойство $2K_2$-свободных, а следовательно, и P_5-свободных, двудольных графов состоит в том, что каждый такой граф либо несвязен, либо является двудольным дополнением к несвязному графу. Данное свойство роднит P_5-свободные двудольные графы с общими P_4-свободными графами, известными также как кографы. Недавно [16] бикографы — двудольный аналог кографов — были полностью охарактеризованы тремя запрещенными двудольными графами (определения этих графов приведены в заключении). Позже [14] этот результат был расширен до более представительного класса графов, обозначенного на рис. 2 через Y.

Характеризация E-свободных двудольных графов, предложенная в настоящей работе, приводит к идее о структуре расширения, которому, наряду с E-свободными двудольными графами, принадлежат и графы из Y. Данная идея представлена в качестве гипотезы в заключительной части работы.

Замечательные свойства P_5-свободных двудольных графов были использованы в [22] для получения полиномиальных алгоритмов решения задачи о независимом множестве в некоторых подклассах общих P_5-свободных графов. Эти алгоритмы основаны на поиске двудольных подграфов, увеличивающих текущее независимое множество в графе. Впервые техника увеличивающих графов была использована в [21, 25] для графов без звезды $K_{1,3}$. Недавно эта техника была эффективно применена к более широкому классу графов, так называемым графам без вилок [1] (вилка — это граф, который может быть получен из графа E удалением вершины a). Алгоритм решения задачи о независимом множестве в графах без вилок обобщает, наряду с графами без звезды $K_{1,3}$, еще несколько частных результатов (см., например, [12, 13, 18]). Данный алгоритм основан на следующей характеризации двудольных графов без вилок: каждый связный двудольный граф без вилок является либо графом без звезды $K_{1,3}$, либо двудольным дополнением к $K_{1,2}$-свободному графу.

Заметим, что класс двудольных графов без вилок является собственным подклассом E-свободных двудольных графов, изучаемых в настоящей работе. Мы надеемся, что предложенная характеризация E-свободных двудольных графов может быть основой для эффективного применения техники увеличивающих графов к более широким классам, чем класс графов без вилок.

Среди других интересных подклассов E-свободных двудольных графов выделим класс двудольных бипороговых графов, изучаемых в [17]. Данная работа была мотивирована исследованием структуры 2-пороговых графов, т. е. графов, которые могут быть представлены в виде объединения не более двух пороговых графов. Легко убедиться, что граф E — это минимальный двудольный граф, не являющийся 2-пороговым. Следовательно, все 2-пороговые двудольные графы являются E-свободными. Таким образом, результат, полученный в настоящей работе, может рассматриваться как еще один шаг к более глубокому пониманию структуры 2-пороговых графов.

Основываясь на предложенной характеризации, мы получаем алгоритм сложности $O(n^2)$ для распознавания E-свободных двудольных n-вершинных графов и доказываем, что кликовая ширина E-свободных двудольных графов не превосходит 4. Из последнего факта следует существование алгоритмов линейной сложности для решения ряда проблем, являющихся NP-полными в классе всех двудольных графов, таких как задача о доминирующем множестве, порожденный путь, дерево Штейнера. Кроме того, мы предлагаем линейный алгоритм для решения задачи о числе скачков (jump number problem) в классе E-свободных двудольных графов. Под линейными всюду в статье понимаются алгоритмы сложности $O(n+m)$, где n — число вершин, а m — число ребер графа.

Двудольный граф называется *примарным*, если в нем любые две вершины имеют различные окрестности. Понятие примарного графа играет в работе важную роль. Для построения алгоритмов нам необходимо будет находить максимальный порожденный примарный подграф в двудольном графе. Нетрудно видеть, что с точностью до изоморфизма такой подграф единственен и содержит одну вершину в каждом классе вершин с одинаковой окрестностью. Очевидно, что поиск максимального порожденного примарного подграфа может быть выполнен за полиномиальное время. Более того, благодаря недавним результатам из [20] этот поиск может быть осуществлен за линейное время на основе техники модулярных разбиений.

1. Характеризация E-свободных двудольных графов

Теорема 1. *Если связный E-свободный двудольный граф G является P_7-свободным, то G является $\widetilde{P_5}$-свободным.*

Доказательство. Пусть G — связный (E, P_7)-свободный двудольный граф. Предположим от противного, что вершины a, b, c, d, e порождают в G подграф $\widetilde{P_5}$ с ребрами bd и ce и вершинами a, b, c в одной доле графа G. В силу связности графа вершина a связана путями с b и c. Обозначим через P_{ab} и P_{ac} кратчайшие пути от a до b и c соответственно. Не уменьшая общности, предположим, что сумма длин этих путей минимальна среди всех порожденных подграфов $\widetilde{P_5}$ в G. Сначала докажем, что при данном предположении оба пути имеют длину 2. Ясно, что каждый из них имеет длину не более 4, иначе граф G содержал бы порожденную цепь P_7 на семи вершинах.

Предположим, что один из путей имеет длину 4, например $P_{ac} = (a, x, y, z, c)$. Тогда

$x \neq d$, поскольку a смежна с x, но не смежна с d;

$z \neq d$, поскольку c смежна с z, но не смежна с d;

$yd \notin EG$, иначе G содержит порожденный граф $E(a, x, y, z, c, d)$;

$y \neq b$, поскольку d смежна с b, но не смежна с y;

$bx \notin EG$, иначе G содержит либо порожденный граф $E(a, x, b, z, c, d)$ (если $bz \in EG$), либо $E(d, b, x, y, z, a)$ (если $bz \notin EG$);

$bz \notin EG$, иначе вершины d, b, z, y, x, c порождают подграф E в G.

Но тогда вершины a, b, d, y, z порождают еще один подграф $\widetilde{P_5}$ такой, что длина кратчайшего пути от a до y строго меньше, чем длина пути P_{ac}. Это противоречит выбору начального подграфа $\widetilde{P_5}$. Таким образом, оба пути имеют длину 2: $P_{ab} = (a, x, b)$ и $P_{ac} = (a, y, c)$. В этом случае x не смежна с c, иначе вершины d, b, x, c, e, a порождали бы граф E в G. Аналогично, y не смежна с b. Но тогда вершины d, b, x, a, y, c, e порождают P_7 в G. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Лемма 1. *Пусть E-свободный двудольный граф в качестве порожденного подграфа содержит цепь P_7, и пусть x — вершина вне этой цепи. Тогда x имеет не более двух соседей, принадлежащих цепи P_7.*

Доказательство. Без потери общности предположим, что цепь P_7 в E-свободном двудольном графе G порождается множеством $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Предположим от противного, что вершина $x \notin W$ имеет по крайней мере три соседа в W. Очевидно, что все соседи x в W имеют одинаковую четность.

Если соседи вершины x имеют четные номера, т. е. x смежна с вершинами $2, 4, 6$, то G содержит порожденный подграф $E(1, 2, x, 6, 7, 4)$. Противоречие.

Теперь предположим, что соседи x имеют нечетные номера в P_7. Если x смежна с вершинами 1 и 7, а третьим соседом вершины x является, скажем, 5, то G содержит порожденный подграф $E(2, 1, x, 5, 4, 7)$.

Противоречие. Если x не смежна, к примеру, с вершиной 7, то G содержит порожденный подграф $E(1,x,5,6,7,4)$. Вновь противоречие. Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Связный примарный E-свободный двудольный граф, содержащий P_7 в качестве порожденного подграфа, является $K_{1,3}$-свободным.*

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что в связном примарном E-свободном двудольном графе G цепь P_7 порождается множеством $W = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Предположим от противного, что G содержит вершину степени более 2. Если такая вершина не принадлежит множеству W, рассмотрим кратчайший путь P, связывающий W с ближайшей вершиной степени не менее 3. Очевидно, некоторое подмножество множества $VP \cup W$ порождает путь P_7, содержащий вершину, степень которой в G не менее трех. Следовательно, без потери общности можно предполагать, что вершина степени не менее трех содержится в W. Пусть x — сосед данной вершины, не принадлежащий множеству W. С учетом симметрии следующие четыре случая исчерпывают все возможности для x.

Случай 1: вершина x смежна с вершиной 4. Тогда, очевидно, x не смежна с вершинами, имеющими в W нечетные номера. Поэтому по лемме 1 среди вершин с четными номерами вершина x имеет не более одного соседа, исключая вершину 4. Если x не смежна с вершинами 2 и 6, то G содержит порожденный подграф $E(2,3,4,5,6,x)$. Противоречие. Предположим, что вершина x смежна с вершиной 6, но не смежна с вершиной 2. Поскольку G — примарный граф, в нем должна быть вершина $y \in N(5) \otimes N(x) = (N(5) - N(x)) \cup (N(x) - N(5))$. Предположим для определенности, что y смежна с вершиной 5, но не смежна с x (данное предположение не ограничивает общности, поскольку вершины $1,2,3,4,x,6,7$ порождают в графе P_7). Если y не смежна с вершиной 3, то в G имеется порожденный подграф $E(2,3,4,5,y,x)$. Если y смежна с вершиной 3, то y не смежна с вершиной 1 (по лемме 1). Но тогда G содержит порожденный подграф $E(1,2,3,4,x,y)$. Противоречие.

Случай 2: вершина x смежна с вершиной 3. По лемме 1 вершина x имеет не более одного соседа в множестве $\{1,5\}$. Если x не смежна с вершинами 1 и 5, то в G имеется порожденный подграф $E(1,2,3,4,5,x)$. Если x смежна с вершиной 5, но не смежна с вершиной 1, то G должен иметь вершину $y \in N(4) \otimes N(x)$, поскольку G примарный. Но тогда мы находимся в условиях случая 1. Теперь предположим, что x смежна с вершиной 1, но не смежна с вершиной 5. Тогда G должен иметь вершину $y \in N(2) \otimes N(x)$. Для определенности, пусть $y \in N(2) - N(x)$. Если y смежна с вершиной 4, то мы находимся в условиях случая 1.

Если y не смежна с вершиной 4, то в G имеется порожденный подграф $E(y, 2, 3, 4, 5, x)$.

Случай 3: вершина x смежна с вершиной 2. Если x смежна с вершиной 4, мы получаем условия случая 1. Если x смежна с вершиной 6 и не смежна с вершиной 4, то G содержит порожденный подграф $E(6, x, 2, 3, 4, 1)$. Если x не смежна с вершинами 4 и 6, то G содержит вершину $y \in N(1) \otimes N(x)$, например y смежна с 1, но не с x. Если y смежна с вершиной 3, то имеем условия случая 2. Если y не смежна с вершиной 3, то G содержит порожденный подграф $E(y, 1, 2, 3, 4, x)$.

Случай 4: вершина x смежна с вершиной 1. В силу предположения о том, что степень вершины 1 не меньше трех, должна существовать еще одна вершина смежная с 1, скажем, y. Но тогда мы приходим к условиям случая 3 относительно другой порожденной цепи с вершинами $P_7' = (y, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Теорема 2 доказана.

Суммируем результаты данного раздела следующим образом.

Связный примарный двудольный граф E-свободен тогда и только тогда, когда он $K_{1,3}$-свободен либо является двудольным дополнением P_5-свободного графа.

2. Распознавание E-свободных двудольных графов

В данном разделе полученная выше характеризация используется для построения алгоритма временной сложности $O(n^2)$ для распознавания E-свободных двудольных графов. Ради простоты предполагаем, что данный алгоритм оперирует со связными двудольными графами.

Алгоритм $\mathscr{A}$ распознавания E-свободных двудольных графов

Вход: Связный двудольный граф G.

Выход: Ответ «Да», если G является E-свободным, или «Нет» в противном случае.

Шаг 1. Найти максимальный порожденный примарный подграф H графа G.

Шаг 2. Если H не содержит вершин степени более 2, то установить ответ «Да» и остановиться.

Шаг 3. Построить двудольное дополнение $\widetilde{H}$ к H.

Шаг 4. Разбить $\widetilde{H}$ на компоненты связности.

Шаг 5. Если каждая связная компонента графа $\widetilde{H}$ является $2K_2$-свободной, то установить ответ «Да»; в противном случае установить ответ «Нет».

Конец

Теорема 3. *Алгоритм $\mathscr{A}$ корректно распознает E-свободные двудольные графы с n вершинами за время $O(n^2)$.*

Доказательство. Во-первых, докажем корректность алгоритма. Очевидно, что если граф G является E-свободным, то любой его порожденный подграф также E-свободен. С другой стороны, так как E — примарный граф, то G является E-свободным только если максимальный примарный порожденный подграф графа G является E-свободным. Таким образом, сведéние проблемы распознавания E-свободных двудольных графов к аналогичной проблеме для их максимальных порожденных примарных подграфов на шаге 1 является корректным.

В силу полученной характеризации связный примарный двудольный граф H является E-свободным тогда и только тогда, когда H либо $K_{1,3}$-свободен, либо является двудольным дополнением к P_5-свободному графу. Если H не содержит вершин степени более 2, то, очевидно, H является $K_{1,3}$-свободным и, следовательно, E-свободным.

Известно (и легко может быть проверено), что двудольный граф является P_5-свободным тогда и только тогда, когда каждая компонента связности этого графа является $2K_2$-свободной. Таким образом, алгоритм распознает E-свободные двудольные графы корректно.

Чтобы оценить временную сложность алгоритма, заметим, что шаги 2 и 4 могут быть легко реализованы за линейное время, а шаг 3 требует в худшем случае времени $O(n^2)$. Максимальный примарный подграф , полученный на шаге 1, может быть найден за линейное время посредством техники модулярных разбиений [20]. Распознавание $2K_2$-свободных примарных двудольных графов может быть выполнено за линейное время на основе характеризации этих графов, предложенной в лемме 2. Теорема 3 доказана.

Лемма 2. *Связный примарный двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$ не менее чем с двумя вершинами является $2K_2$-свободным тогда и только тогда, когда*

(a) *G сбалансирован,*

(b) *для любого $i = 1, \ldots, |V_j|$ в V_j существует единственная вершина степени i $(j = 1, 2)$.*

Доказательство. Сначала предположим, что G — связный примарный $2K_2$-свободный двудольный граф. Чтобы доказать (a), примем, без потери общности, что $k = |V_1| \geqslant |V_2|$, и пусть $a_1, \ldots, a_k$ — вершины доли V_1, упорядоченные таким образом, что $N(a_i) \subseteq N(a_{i+1})$ для каждого $i = 1, \ldots, k-1$. В силу связности G имеем $N(a_1) \neq \varnothing$, а так как G примарный граф, то $N(a_i) - N(a_{i-1}) \neq \varnothing$ для $i = 2, \ldots, k$. Таким образом, V_2 содержит k непустых непересекающихся подмножеств и, следовательно, $k \leqslant |V_2|$.

Условие (b) является следствием условия (a) и того факта, что G примарен и связен.

Пусть теперь G — связный примарный двудольный граф, удовлетворяющий (a) и (b). Докажем индукцией по $k = |V_1| = |V_2|$, что G является $2K_2$-свободным. При $k = 1$ данное утверждение тривиально. Пусть теперь $k > 1$ и u_i — вершина степени k в V_i $(i = 1, 2)$. По предположению индукции граф $G - \{u_1, u_2\}$ является $2K_2$-свободным. С другой стороны, так как вершина u_i смежна со всеми вершинами в противоположной доле, то ни одно из ребер, инцидентных вершине u_i, не может быть ребром в порожденном графе $2K_2$. Следовательно, G является $2K_2$-свободным графом. Лемма 2 доказана.

Непосредственно из леммы 2 вытекает

Следствие 1. *Проблема распознавания, является ли связный примарный двудольный граф $2K_2$-свободным, может быть решена за линейное время.*

3. Кликовая ширина E-свободных двудольных графов

Графы кликовой ширины не более k были введены в [8]. В [10] перечислены оптимизационные проблемы, которые могут быть решены за линейное время на графах с кликовой шириной не более k. В данном разделе мы покажем, что кликовая ширина E-свободных двудольных графов не превосходит 4, что влечет существование линейных алгоритмов для ряда проблем, являющихся NP-полными в классе всех двудольных графов.

Граф G назовем k-графом, если его вершины помечены натуральными числами из диапазона от 1 до k. Для k-графов G и H с $VG \cap VH = \varnothing$ обозначим через $G \oplus H$ объединение G и H. Для k-графа G через $\eta_{i,j}(G)$ $(i \neq j)$ обозначим k-граф, полученный соединением всех вершин, помеченных i, со всеми вершинами, помеченными j в G. Для k-графа G через $\rho_{i\to j}(G)$ обозначим k-граф, полученный из G переименованием i в j. Для произвольной вершины v графа G и $i \in \{1, \ldots, k\}$ через $i(v)$ обозначен k-граф, состоящий из одной вершины v, помеченной i.

С каждым графом G можно связать алгебраическое выражение, определяющее G посредством трех типов операций, упомянутых выше. Такое выражение будем называть *k-выражением*, определяющим G, если все метки в этом выражении принадлежат множеству $\{1, \ldots, k\}$. Например, граф, состоящий из двух несмежных вершин x и y, может быть определен 1-выражением $1(x) \oplus 1(y)$, а граф, состоящий из двух смежных вершин x и y, — 2-выражением $\eta_{1,2}(1(x) \oplus 2(y))$.

Кликовая ширина графа G, обозначаемая $cwd(G)$, определяется следующим образом:

$$cwd(G) = \min\{k : G \text{ может быть определен } k\text{-выражением}\}.$$

Для определения кликовой ширины графа полезны следующие леммы.

Лемма 3. *Если $G_1, \dots, G_k$ — компоненты связности графа G, то* $cwd(G) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\{cwd(G_i)\}$.

Лемма 4. *Если H — максимальный примарный порожденный подграф графа G, то $cwd(G) = cwd(H)$.*

Доказательство. Лемма 3 очевидна. Чтобы доказать лемму 4, заметим, во-первых, что множество вершин с одинаковой окрестностью порождает в графе пустой подграф. Во-вторых, как отмечено во введении, максимальный примарный порожденный подграф графа является единственным с точностью до изоморфизма и содержит ровно одну вершину из каждого класса вершин с одинаковой окрестностью. Таким образом, k-выражение для графа G может быть получено из k-выражения T для графа H следующим образом. Предположим, что вершина x графа H появляется в k-выражении T для H с меткой j, и пусть $x_1, x_2, \dots, x_l$ — вершины графа G, имеющие ту же окрестность, что и x. Заменим подвыражение $j(x)$ в T выражением $j(x_1) \oplus j(x_2) \oplus \dots j(x_l)$. Выполняя то же самое с каждой вершиной графа H, получим k-выражение для G. Следовательно, $cwd(G) \leqslant cwd(H)$. Обратное неравенство очевидно. Лемма 4 доказана.

Благодаря леммам 3 и 4 мы можем ограничиться случаем, когда E-свободный двудольный граф G является связным и примарным.

Если G не содержит порожденной цепи P_7 на семи вершинах, то он является бикографом (см. заключительный раздел настоящей работы для определения и характеризации бикографов). Как заявлено в [14], кликовая ширина бикографов (и даже более общих графов) не превосходит 4.

Если G содержит P_7 в качестве порожденного подграфа, то по теореме 2 граф G является $K_{1,3}$-свободным графом. Отсюда с учетом связности графа G следует, что G является либо бесхордовой цепью, либо бесхордовым циклом. Для деревьев, а следовательно, и для цепей кликовая ширина не превосходит 3 (см., например, [9]).

Пусть теперь G — цикл длины не менее 8. 4-выражение, определяющее G, может быть построено следующим образом.

Процедура построения 4-выражения, определяющего цикл

Вход: Цикл $G = (c_1, \dots, c_n)$ с $n > 7$.

Выход: 4-выражение T, определяющее G.

1. Установить $T = \eta_{2,3}(3(c_3) \oplus \eta_{1,2}(1(c_1) \oplus 2(c_2)))$.
2. Для каждого $i=4,\ldots,n-1$ установить $T=\rho_{4\to3}(\rho_{3\to2}(\eta_{3,4}(4(c_i)\oplus T)))$.
3. Установить $T = \eta_{1,4}(\eta_{3,4}(4(c_n) \oplus T)))$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Кликовая ширина E-свободных двудольных графов не превосходит 4.*

Из теоремы 4 и результатов работы [10] получаем оптимальные решения для ряда проблем, являющихся NP-полными в классе всех двудольных графов (формальное определение этих проблем может быть найдено в [2]).

Следствие 2. *Следующие проблемы могут быть решены за линейное время в классе E-свободных двудольных графов: доминирующее множество, порожденный путь, не взвешенное дерево Штейнера.*

4. Задача о числе скачков

В данном разделе мы предлагаем алгоритм линейной сложности для решения задачи о числе скачков (the jump number problem) в классе E-свободных двудольных графов.

Пусть $P = (X, <)$ — частичный порядок на конечном множестве X и $L = x_1x_2\ldots x_n$ — линейное расширение порядка P. Пара последовательных элементов x_ix_{i+1} в L называется *скачком*, если и только если x_i несравним с x_{i+1} в P. Число скачков частичного порядка P — это минимальное число скачков в его линейных расширениях. Задача о числе скачков заключается в определении числа скачков частичного порядка P и поиске оптимального линейного расширения.

Задача о числе скачков введена в [6]. Было установлено, что она является NP-полной даже для двудольных порядков [24]. Известно также, что для двудольных порядков эта задача полиномиально эквивалентна проблеме поиска в двудольном графе наибольшего паросочетания без чередующихся циклов [5].

Паросочетание в графе G — это подмножество ребер M такое, что никакие два ребра в M не инцидентны одной вершине. Цикл $C = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ является *чередующимся* относительно паросочетания M тогда и только тогда, когда $v_{i-1}v_i \in M$ и $v_iv_{i+1} \notin M$ при всех $i = 1, 3, \ldots, k-1 \pmod{k}$, где k четно. Паросочетание M называется *паросочетанием без чередующихся циклов* (БЧЦ-поросочетанием, для краткости), если не существует чередующихся циклов относительно M. Число ребер в БЧЦ-паросочетании наибольшей мощности в графе G будет обозначаться через $J(G)$.

В [23] показано, что проблема поиска БЧЦ-паросочетания наибольшей мощности NP-полна даже для хордальных двудольных графов. Тем не менее эффективные методы решения данной задачи были найдены для нескольких подклассов двудольных графов, таких как двудольные графы перестановок [26], биконвексные [4], конвексные [11] и дистанционно наследственные двудольные графы [23]. Теперь, основываясь на полученной характеризации, этот список может быть дополнен классом E-свободных двудольных графов. В отличие от перечисленных классов, которые являются подклассами двудольных хордальных графов и, следовательно, не содержат порожденных циклов длины более четырех, класс E-свободных двудольных графов включает все возможные двудольные циклы.

Применительно к задаче о числе скачков можно, очевидно, ограничиться связными графами. Более того, благодаря следующей лемме можно ограничиться примарными графами.

Лемма 5. *Если H — максимальный примарный порожденный подграф графа G, то $J(G) = J(H)$.*

Доказательство. Очевидно, что $J(G) \geqslant J(H)$. С другой стороны, любое БЧЦ-паросочетание покрывает не более одной вершины из каждого класса вершин с одинаковой окрестностью, иначе существует чередующийся цикл длины 4 относительно данного паросочетания. Граф, имеющий только одну вершину в каждом классе вершин с одинаковой окрестностью, с точностью до изоморфизма единственен и является максимальным примарным порожденным подграфом графа G. Следовательно, $J(G) \leqslant J(H)$. Лемма 5 доказана.

Как отмечено во введении, максимальный примарный порожденный подграф может быть найден за линейное время. Без потери общности для цели данного раздела это позволяет ограничиться рассмотрением связных примарных графов.

Для данного E-свободного двудольного графа G за линейное время легко определить, является ли G $K_{1,3}$-свободным. Для $K_{1,3}$-свободных двудольных графов проблема о числе скачков тривиальна. Ясно, что в этом случае связный граф является либо четным циклом, либо цепью. Нетрудно видеть, что для четных циклов C_n справедливо $J(C_n) = \frac{n}{2} - 1$, а для любой цепи P_n имеем $J(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Предположим, что G является связным примарным E-свободным двудольным графом, не являющимся $K_{1,3}$-свободным. Тогда G является $\widetilde{P_5}$-свободным (см. теоремы 1 и 2). Для получения алгоритма линейной сложности, решающего рассматриваемую задачу в классе $\widetilde{P_5}$-свободных двудольных графов, докажем следующие леммы.

Лемма 6. *Если* $G = (V_1, V_2, E)$ — $\widetilde{K}_{1,n}$*-свободный двудольный граф, то* $J(G) \leqslant n$.

Доказательство. Предположим от противного, что

$$M = \{a_1 b_1, \dots, a_{n+1} b_{n+1}\}$$

является БЧЦ-паросочетанием мощности $n+1$ в графе G, где $a_i \in V_1$, $b_i \in V_2$.

Индукцией по k покажем , что вершина a_k не смежна с вершинами b_i при $i < k$ и смежна по крайней мере с одной вершиной b_i при $i > k$. Для $k = 1$ первая часть данного утверждения очевидна, а вторая следует из того факта, что граф G является $\widetilde{K}_{1,n}$-свободным. Не уменьшая общности, будем предполагать, что $a_1 b_2 \in E$.

Теперь по предположению индукции мы имеем $a_i b_{i+1} \in E$ для каждого $i < k$. Тогда $N(a_k) \cap \{b_1, \dots, b_{k-1}\} = \varnothing$, иначе G имел бы чередующийся цикл относительно M. Следовательно, чтобы граф G был $\widetilde{K}_{1,n}$-свободным, a_k должна иметь соседа b_i, где $i > k$.

Таким образом, a_{n+1} не смежна с вершинами b_i при $i < n+1$. Но тогда G не является $\widetilde{K}_{1,n}$-свободным. Противоречие. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если* $G = (V_1, V_2, E)$ — *связный примарный* $2K_2$*-свободный граф с* $n > 1$ *вершинами, то* $J(G) = \frac{n}{2}$.

Доказательство. Пусть $V_1 = \{a_1, \dots, a_l\}$ таково, что $N(a_i) \subseteq N(a_{i+1})$ при $i = 1, \dots, l-1$, и $V_2 = \{b_1, \dots, b_l\}$ таково, что $N(b_{i+1}) \subseteq N(b_i)$ при $i = 1, \dots, l-1$. Тогда в силу леммы 2 имеем $N(a_i) = \{b_1, \dots, b_i\}$. Следовательно, $\{a_1 b_1, \dots, a_l b_l\}$ является БЧЦ-паросочетанием в G. Лемма 7 доказана.

Следствие 3. *Если* G — *связный примарный* $2K_2$*-свободный двудольный граф, то задача о числе скачков в* G *может быть решена за линейное время.*

В качестве доказательства представим алгоритм линейной сложности, решающий рассматриваемую задачу в связном примарном $2K_2$-свободном двудольном графе.

Алгоритм $\mathscr{B}$

Вход: Связный примарный $2K_2$-свободный двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$ с $V_1 = \{x_1, \dots, x_l\}$ и $V_2 = \{y_1, \dots, y_l\}$.

Выход: Наибольшее БЧЦ-паросочетание M в G.

Шаг 1. Для каждого $i = 1, \dots, l$ определить степень $d(x_i)$ вершины x_i и положить $a(d(x_i)) = x_i$.

Шаг 2. Для каждого $i = 1, \dots, l$ определить степень $d(y_i)$ вершины y_i и положить $b(l - d(y_i) + 1) = y_i$.

Шаг 3. Положить $M = \{a(1)b(1), \dots, a(l)b(l)\}$.
Конец

Нетрудно видеть, что шаги 1 и 2 данного алгоритма обеспечивают упорядочивание каждой доли графа G, которое используется при доказательстве леммы 7. Следовательно, на шаге 3 получаем наибольшее БЧЦ-паросочетание в графе G.

Пусть теперь $G = (V_1, V_2, E)$ — связный примарный $\widetilde{P_5}$-свободный двудольный граф. Множество вершин графа G разобьем на подмножества $U_1, \dots, U_k$ таким образом, что каждое U_i порождает компоненту связности в двудольном дополнении к G. Обозначим $H_i = G[U_i]$ и назовем H_i кокомпонентой графа G. Поскольку $2K_2$ является самодополнительным графом (в двудольном смысле), каждая кокомпонента H_i графа G является $2K_2$-свободным графом.

Лемма 8. *Если связный примарный $\widetilde{P_5}$-свободный двудольный граф G не является $2K_2$-свободным, то*

$$J(G) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{J(H_i)\} + 2.$$

Доказательство. Если G не является $2K_2$-свободным, то $\widetilde{G}$ также не является $2K_2$-свободным графом. Следовательно, $\widetilde{G}$ содержит по крайней мере две нетривиальные компоненты. Другими словами, G содержит по крайней мере две кокомпоненты более чем с одной вершиной.

Рассмотрим произвольную кокомпоненту H_i с $|VH_i| > 1$. По лемме 2 граф H_i является сбалансированным как двудольное дополнение к связному примарному $2K_2$-свободному графу. Обозначим через s_i количество вершин в каждой доле графа H_i. Из леммы 2 вытекает, что в каждой доле графа H_i содержится в точности одна изолированная вершина. Обозначим эти вершины через x_1 и x_2. Из леммы 7 следует, что $J(H_i) = s_i - 1$. Пусть теперь H_j — еще одна кокомпонента графа G с $|VH_j| > 1$, и пусть y_1 и y_2 — две произвольные вершины в H_j, принадлежащие V_1 и V_2 соответственно. Очевидно, что наибольшее БЧЦ-паросочетание M_i в H_i не покрывает x_1 и x_2. Следовательно, $M_i \cup \{x_1y_2, x_2y_1\}$ является БЧЦ-паросочетанием в G. Таким образом, $J(G) \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{J(H_i)\} + 2$.

Теперь предположим, что $J(H_m) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{J(H_i)\}$ при некотором $m \in \{1, \dots, k\}$. Тогда для каждой вершины x графа G существует не более s_m вершин в другой доле, не смежных с x, т. е. G является $\widetilde{K}_{1,s_m+1}$-свободным. Следовательно, по лемме 6 имеем $J(G) \leqslant s_m + 1$, где $s_m = J(H_m) + 1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{J(H_i)\} + 1$. Лемма 8 доказана.

Теорема 6. *Если G — связный примарный $\widetilde{P_5}$-свободный двудольный граф, то задача о числе скачков в G может быть решена за линейное время.*

Доказательство. В силу следствий 1 и 3 можно предположить, что граф $G = (V_1, V_2, E)$ удовлетворяет условиям леммы 8. Пусть x_1 — вершина наименьшей степени в V_1. Очевидно, что x_1 является изолированной вершиной в наибольшей по числу вершин кокомпоненте H_i графа G. Если x_2 — другая изолированная вершина в H_i, то по лемме 8 наибольшее БЧЦ-паросочетание M в G может быть построено следующим образом: $M = M_i \cup \{x_1y_2, x_2y_1\}$, где M_i — наибольшее паросочетание в H_i, а y_1 и y_2 — произвольные соседи вершин x_2 и x_1 соответственно. Для того чтобы найти наибольшее паросочетание в H_i, построим граф $H_i^\prime$ удалением из H_i изолированных вершин x_1 и x_2. Очевидно, что $H_i^\prime$ — связный примарный $2K_2$-свободный двудольный граф. Поэтому для него задача о числе скачков может быть решена за линейное время. Построение H_i, так же как и поиск вершин x_1 и x_2, тривиально реализуется за линейное время. Теорема 6 доказана.

Суммируем аргументы, представленные в доказательстве теоремы 6, в следующей линейной процедуре, решающей задачу о числе скачков в связном примарном $\widetilde{P_5}$-свободном двудольном графе.

Алгоритм $\mathscr{C}$

Вход: Связный примарный $\widetilde{P_5}$-свободный двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$.

Выход: Наибольшее БЧЦ-паросочетание M в G.

Шаг 1. Если G является $2K_2$-свободным, применить алгоритм $\mathscr{B}$ к G и остановиться.

Шаг 2. Найти в V_1 вершину наименьшей степени x_1.

Шаг 3. Среди вершин доли V_2, не смежных с x_1, найти вершину x_2 наименьшей степени.

Шаг 4. Посредством алгоритма $\mathscr{B}$ найти наибольшее БЧЦ-паросочетание M' в графе $H' = G[(V_1 \cup V_2) - (N(x_1) \cup N(x_2) \cup \{x_1, x_2\})]$.

Шаг 5. Положить $M = M' \cup \{x_1y_2, x_2y_1\}$, где y_1 и y_2 — произвольные соседи вершин x_2 и x_1 соответственно.

Конец

Заключение

В данной работе доказано, что любой связный E-свободный двудольный граф является либо двудольным дополнением к P_5-свободному графу, либо графом, в котором каждый примарный порожденный подграф $K_{1,3}$-свободен. Заметим, что класс $\widetilde{P_5}$-свободных двудольных графов является подклассом бикографов, введенных в [16] (двудольный граф называется бикографом, если любой его порожденный подграф не менее чем с двумя вершинами либо несвязен, либо является двудольным дополнением к несвязному графу). В [16] класс бикографов был охарактеризован тремя запрещенными порожденными подграфами: $\mathrm{Star}_{1,2,3}$, Sun_4 (рис. 3) и P_7.

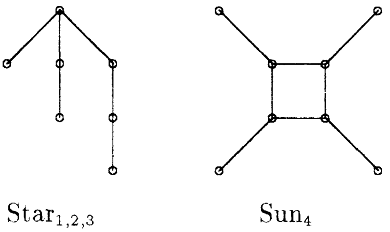


Рис. 3

Обобщение бикографов, определяемое запрещенными подграфами $\mathrm{Star}_{1,2,3}$ и P_7, было охарактеризовано в [14] следующим образом. Двудольный граф $(\mathrm{Star}_{1,2,3}, P_7)$-свободен тогда и только тогда, когда всякий его порожденный подграф не менее чем с двумя вершинами является

либо несвязным,

либо двудольным дополнением к несвязному графу,

либо графом, который может быть разбит на независимое множество и полный двудольный подграф.

Мы завершаем статью гипотезой относительно структуры $\mathrm{Star}_{1,2,3}$-свободных двудольных графов, обобщающих как $(\mathrm{Star}_{1,2,3}, P_7)$-свободные, так и E-свободные графы (см. рис. 2).

Гипотеза. Примарный двудольный граф является $\mathrm{Star}_{1,2,3}$-свободным тогда и только тогда, когда каждый его порожденный подграф является

либо несвязным,

либо двудольным дополнением к несвязному графу,

либо графом, который может быть разбит на независимое множество и полный двудольный подграф,

либо $K_{1,3}$-свободным графом,

либо двудольным дополнением к $K_{1,3}$-свободному графу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 3–19.

2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

3. **Зуев Ю. А.** Пороговые функции и пороговые представления // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 1994. Вып. 5. С. 5–61.
4. **Brandstädt A.** The jump number problem for biconvex graphs and rectangle covers of rectangular regions // Fundamentals of computing theory. Berlin: Springer-Verl., 1989. P. 68–77. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 380).
5. **Chaty G., Chein M.** Ordered matchings and matchings without alternating cycles in bipartite graphs // Utilitas Mathematica. 1979. V. 16. P. 183–187.
6. **Chein M., Martin P.** Sur le nombre de sauts d'une forêt // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1972. V. 275. P. 159–161.
7. **Chvátal V., Hammer P. L.** Set-packing and threshold graphs // Research Report, Comput. Sci. Dept. Univ. of Waterloo, Canada CORR 73–21, 1973.
8. **Courcelle B., Engelfriet J., Rozenberg G.** Handle-rewriting hypergraphs grammars // J. Comput. System Sci. 1993. V. 46, N 2. P. 218–270.
9. **Courcelle B., Olariu S.** Upper bounds to the clique-width of graphs. Submitted for publication, 1998. Available at (http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/~courcell/ActSci.html).
10. **Courcelle B., Makowsky J. A., Rotics U.** Linear time solvable optimization problems on certain structured graph families // Graph-theoretic concepts in computer science. Berlin: Springer-Verl., 1998. P. 1–16. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1517).
11. **Dahlhaus E.** The computation of the jump number of convex graphs // Orders, algorithms, and applications. Berlin: Springer-Verl., 1994. P. 176–185. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 831).
12. **De Simone C., Sassano A.** Stability number of bull- and chair-free graphs // Discrete Appl. Math. 1993. V. 41, N 2. P. 121–129.
13. **Fouquet J.-L., Giakoumakis V.** On semi P_4 sparse graphs // Discrete Math. 1997. V. 165/166. P. 277–300.
14. **Fouquet J.-L., Giakoumakis V., Vanherpe J. M.** Bipartite graphs totally decomposable by $K+S$-bidecomposition // Internal Report LARIA 98–15, Univ. de Picardie Jules Verne, Arniens, France. Submitted to IJFCS. Available at (www.laria.u-picardie.fr/~vanherpe).
15. **Frost H., Jacobson M., Kabell J., Morris F. R.** Bipartite analogues of split graphs and related topics // Ars Combinat. 1990. V. 29. P. 283–288.
16. **Giakoumakis V., Vanherpe J. M.** Bi-complement reducible graphs // Adv. in Appl. Math. 1997. V. 18, N 4. P. 389–402.
17. **Hammer P. L., Mahadev N. V. R., Peled U. N.** Bipartite bithreshold graphs // Discrete Math. 1993. V. 19, N 1–3. P. 79–96.
18. **Hertz A.** Polynomially solvable cases for the maximum stable set problem // Discrete Appl. Math. 1995. V. 60, N 1–3. P. 195–210.
19. **Mahadev N. V. R., Peled U. N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland, 1995. (Annals of Discrete Math.; V. 56).

20. **McConnell R. M., Spinrad J. P.** Modular decomposition and transitive orientation // Discrete Math. 1999. V. 201, N 1–3. P. 189–241.

21. **Minty G. J.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1980. V. 28, N 3. P. 284–304.

22. **Mosca R.** Polynomial algorithms for the maximum stable set problem on particular classes of P_5-free graphs // Inform. Processing Letters. 1997. V. 61, N 3. P. 137–144.

23. **Müller H.** Alternating cycle free matchings in chordal bipartite graphs // Order. 1990. V. 7, N 1. P. 11–21.

24. **Pulleyblank W.** On minimizing setups in precedence constrained scheduling. Unpublished manuscript, 1982.

25. **Sbihi N.** Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile // Discrete Math. 1980. V. 29, N 1. P. 53–76.

26. **Steiner G., Stewart L.** A linear time algorithm to find the jump number of 2-dimensional bipartite orders // Order. 1987. V. 4, N 4. P. 359–367.

27. **Yannakakis M.** The complexity of the partial order dimension problem // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1982. V. 3, N 3. P. 351–358.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
ГСП-20, Россия.
E-mail: lozin@unn.ac.ru

Статья поступила
7 сентября 1999 г.