ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2000. Серия 1. Том 7, № 1, 79–93

УДК 519.95

О ДВУХ ОПЕРАЦИЯХ НАД БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ*)

Е. А. Окольнишникова

Показано, что операции геометрического проектирования и монотонного расширения булевых функций могут приводить к усложнению реализаций булевых функций в ряде классов схем, а также в классе ветвящихся k-программ. Установлено, что если существует «большой разрыв» между сложностями реализации некоторой функции в классе недетерминированных и в классе детерминированных ветвящихся программ (ветвящихся k-программ), то можно построить пример такой функции, что существует «большой» разрыв между сложностью реализации этой функции и ее проекцией в классе детерминированных ветвящихся программ (ветвящихся k-программ).

Введение

В теории сложности представляет интерес задание (определение) операций, которые позволяют из просто реализуемых функций получать сложно реализуемые функции и наоборот. В данной работе рассматриваются две такие операции — геометрического проектирования и «монотонного расширения». Кроме того, будет сказано несколько слов об операции отрицания и операции проектирования, рассматриваемых в последнее время [7, 8].

Во-первых, мы исследуем сложность реализации некоторых булевых функций и их геометрических проекций.**) В классической математике качественная возможность усложнения объектов при проектировании и взятии дополнения известна давно. (Например, в дискрептивной теории множеств.) Математическая теория сложности позволяет количественно оценивать возможность такого усложнения.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00848) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

**) Данное определение отличается от того понятия проекции, которое рассматривается в ряде работ (см., например, [7, 8]).

© 2000 Окольнишникова Е. А.

Вопрос о сравнении сложностей реализации булевых функций и их геометрических проекций был сформулирован А. К. Пулатовым. В 1976 г. Е. А. Окольнишникова построила пример последовательности булевых функций, сложность реализации которых формулами в базисе $(\&, \vee, \neg)$ в константное число раз меньше сложности реализации геометрической проекции тех же функций по некоторому подмножеству переменных (неопубликовано).

В 1977 г. А. К. Пулатовым совместно с Е. А. Окольнишниковой [5] была построена последовательность функций, сложность реализации которых формулами в базисе $(\&, \vee, \neg)$ существенно меньше сложности реализации геометрической проекции этих функций по некоторому подмножеству переменных. Позднее Е. А. Окольнишникова [4] нашла пример последовательности функций, сложность реализации которых как контактными схемами, так и формулами в любом базисе существенно меньше сложности реализации геометрической проекции этих функций по некоторому подмножеству переменных теми же схемами. Таким образом, было показано, что операция геометрического проектирования может приводить к существенному усложнению функции. В данной работе показано, что такое усложнение возможно также при реализации булевых функций ветвящимися программами и ветвящимися k-программами при $k \geqslant 2$. При реализации булевых функций синтаксическими недетерминированными ветвящимися 1-программами такого усложнения не происходит.

Пример функции, геометрическая проекция которой существенно сложнее самой функции, тот же, что и в [4]. Проекция этой функции имеет очень много различных подфункций, что позволяет успешно применить к ней метод Э. И. Нечипорука [3] и благодаря этому получить нелинейные нижние оценки сложности реализации этой функции многими управляющими системами. Вместе с тем сама исходная функция реализуется достаточно просто.

Операция отрицания также может приводить к возрастанию сложности функции. Известно, что эта операция не приводит к заметному росту сложности схем для многих классов схем без ограничений. Но в [2, 1] было показано, что операция отрицания может в константное число раз увеличить сложность контактных схем. Кроме того, имеется много работ, в которых показано, что операция отрицания может существенно увеличить сложность схем с ограничениями.

Можно указать еще одну операцию, способную привести к усложнению реализации булевых функций. Это операция «монотонного расширения». (Строгое определение этой операции будет дано ниже.) Известно, что существуют примеры функций, просто реализуемых

схемами из функциональных элементов, монотонным расширением которых являются характеристические функции NP-сложных задач (см. замечание 3 в разд. 2). Это позволяет предположить, что операция монотонного расширения может приводить к экспоненциальному росту сложности реализации функции. Тем не менее автору не известны опубликованные работы, из которых следует, что операция монотонного расширения может приводить к росту сложности реализации функций в классах схем без ограничений. Поэтому представляют интерес примеры функций, для которых доказано, что сложность их реализации различными типами управляющих систем существенно меньше сложности реализации функции, получаемой из данной с помощью операции «монотонного расширения». Возможно, что эти примеры позволят несколько по-новому взглянуть на роль отрицаний в реализации булевых функций. В работе приведен пример такой функции. Эта функция имеет линейную (относительно числа переменных функции) сложность реализации формулами в базисе $(\&, \vee, \neg)$ (и, следовательно, формулами в любом базисе, а также контактными схемами, ветвящимися программами и т. д.), а ее монотонное расширение имеет почти квадратичную (относительно числа переменных функции) сложность.

В [7, 8] также рассмотрена операция проектирования, где под проекцией функции понимается не геометрическая проекция, а замена некоторых переменных константами, другими переменными или их отрицаниями. Последовательность функций $\{f_n\}$ есть (полиномиальная) проекция последовательности $\{g_n\}$ (см. [8]), если

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = g_{p(n)}(y_1, \ldots, y_{p(n)})$$

для некоторой полиномиально ограниченной функции $p(n)$ и $y_j \in \{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n, 0, 1\}$. Число таких j, что $y_j \in \{x_i, \bar{x}_i\}$, называется *кратностью* x_i. Проекция называется 1-*проекцией* (read-once projection), если кратность любого x_i не превосходит 1.

В случае классических схем (без ограничений) рассматриваемая операция не приводит к увеличении сложности реализации функции. Но для некоторых схем с ограничениями эта операция может приводить к существенному различию сложностей. В [7] приведены примеры функций f и g, где f — полиномиальная проекция функции g, g имеет полиномиальную сложность в классе упорядоченных бинарных диаграмм решений OBDD (а также в классах FODD, k-OBDD, k-IBDD), а f имеет экспоненциальную сложность в классе упорядоченных бинарных диаграмм решений OBDD (FODD, k-OBDD, k-IBDD). Но для 1-проекций известно [7], что если f есть полиномиальная 1-проекция функции g и g имеет полиномиальную сложность в некоторых классах схем, то f имеет полиномиальную сложность в тех же классах схем.

1. Геометрическая проекция

Напомним некоторые определения и обозначения. *Детерминированная ветвящаяся программа* на множестве переменных $x_1, \dots, x_n$ — это ориентированный граф без циклов с выделенной *входной вершиной* и двумя *выходными вершинами*. Каждая вершина, отличная от выходной, помечена переменной из множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, и из нее выходят ровно две дуги, одна из которых помечено нулем, другая — единицей.

Пусть задан входной набор $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1\}$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Ветвящаяся программа по набору $\tilde{a}$ *вычисляет значение* $P(\tilde{a})$, равное 0 или 1, следующим образом. Вычисление начинается во входной вершине. Если достигнута вершина, которой приписана переменная x_i, то осуществляется переход к следующей вершине по дуге, помеченной 1 при $a_i = 1$, и по дуге, помеченной 0, если $a_i = 0$. Поскольку из каждой невыходной вершины выходят две дуги, одна из которых помечена 0, а другая — 1, и ветвящаяся программа является ориентированным графом без циклов, то в конце концов будет достигнута выходная вершина, помеченная 0 или 1. Полученное значение определяется как $P(\tilde{a})$.

Говорят, что ветвящаяся программа *вычисляет* булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если для любого набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ значений входных переменных выполняется равенство $P(\tilde{a}) = f(\tilde{a})$.

Недетерминированная программа имеет ту же структуру, что и детерминированная, но в отличие от последней в недетерминированной программе допустимы вершины, не помеченные переменными, с выходящими из них двумя непомеченными дугами (также называемые *свободными дугами*). Недетерминированная ветвящаяся программа *вычисляет* функцию $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ следующим образом. Для каждого набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ входных переменных, $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, полагаем $f(\tilde{a}) = 1$ тогда и только тогда, когда существует по крайней мере один такой (ориентированный) путь (*принимающий путь* для $\tilde{a}$) от входной к выходной вершине, помеченной 1, что все метки вдоль этого пути не противоречат набору $\tilde{a}$ (т. е. если на этом пути встретилась дуга, помеченная d и выходящая из вершины, помеченной x_i, то $a_i = d$).

Ветвящаяся программа, в которой любой путь от входной вершины к выходной вершине содержит не более k вершин, помеченных одной и той же переменной, называется *ветвящейся k-программой* (k-программой).

Под *сложностью* детерминированной ветвящейся программы понимается число помеченных вершин. Под *сложностью* недетерминированной ветвящейся программы понимается число помеченных дуг. Как

обычно, под *сложностью* реализации функции f схемами из заданного класса понимается сложность минимальной схемы из данного класса, которая реализует f.

Введем следующие обозначения: $L_B(f)$ и $L_{B_0}(f)$ — сложность реализации функции f формулами в базисе B и в базисе $B_0 = (\vee, \&, \neg)$ соответственно, $S(f)$ — сложность реализации функции f контактными схемами, $B(f)$ и $Bk(f)$ — сложность реализации функции f детерминированными ветвящимися программами и детерминированными ветвящимися k-программами соответственно, $NB(f)$ и $NBk(f)$ — сложность реализации функции f недетерминированными ветвящимися программами и недетерминированными ветвящимися k-программами соответственно.

Введем понятие *геометрической проекции.* Проекцию булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ будем обозначать через $Pf_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}})$, где $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, \subset_k\}$. Без ограничения общности можно считать, что $i_l = l$ для $l = 1, \ldots, k$. По определению положим

$$Pf_{x_1,\ldots,x_k}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

где $\sigma_i \in \{0, 1\}$ при $i = 1, \ldots, k$.

Через A_k обозначим множество наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = \lfloor k/2 \rfloor$. Ясно, что $|A_k| = \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$. Каждому набору $\widetilde{\alpha}$ из A_k поставим в соответствие переменную u_α.

Рассмотрим булеву функцию $F^{k,m}$ от множеств переменных $U = \{u_\alpha, \alpha \in A_k\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ и $X_l = \{x_{l,1}, \ldots, x_{l,k}\}$, $1 \leqslant l \leqslant m$. По определению положим

$$\begin{aligned} &F^{k,m}(U, Y, X_1, \ldots, X_m) \\ &\quad = \bigvee_{\alpha \in A_k} u_\alpha \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{\alpha_k} \left(\bigwedge_{l=1}^{m} (x_{l,1} \vee x_{l,1}^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{l,k} \vee x_{l,k}^{\alpha_k}) \right). \end{aligned}$$

Число переменных этой функции равно

$$\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + k(m+1). \tag{1}$$

Проекция этой функции по переменным Y есть функция

$$PF_Y^{k,m}(U, X_1, \ldots, X_m) = \bigvee_{\alpha \in A_k} u_\alpha \left(\bigwedge_{l=1}^{m} (x_{l,1} \vee x_{l,1}^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{l,k} \vee x_{l,k}^{\alpha_k}) \right). \tag{2}$$

Пояснение. Пусть $k = 4$. Тогда набору $\widetilde{\alpha} = (0101)$ ставится в соответствие переменная u_{0101}. В задании функции $F^{4,m}(U, Y, X_1, \ldots, X_m)$ набору $\widetilde{\alpha} = (0101)$ соответствует слагаемое $u_{0101} \cdot \bar{y}_1 y_2 \bar{y}_3 y_4 x_{1,2} \cdot x_{1,4} \cdot \ldots \cdot x_{m,2} \cdot x_{m,4}$; в проекции функции $PF_Y^{4,m}(U, X_1, \ldots, X_m)$ набору $\widetilde{\alpha}$ соответствует слагаемое $u_{0101} \cdot x_{1,2} \cdot x_{1,4} \cdot \ldots \cdot x_{m,2} \cdot x_{m,4}$.

Лемма 1. *Сложность реализации функции* $F^{k,m}(U, Y, X_1, \ldots, X_m)$ *формулами в базисе* $(\vee, \&, \neg)$ *не превышает* $5\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + k(m+2)$.

Доказательство [4]. Легко видеть, что функция $F^{k,m}$ представима в виде

$$F^{k,m}(U, Y, X_1, \ldots, X_m) = \bigvee_{\alpha \in A_k} u_\alpha \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{\alpha_k}$$
$$\times (y_1 x_{1,1} \cdot \ldots \cdot x_{m,1} \vee \bar{y}_1) \cdot \ldots \cdot (y_k x_{1,k} \cdot \ldots \cdot x_{m,k} \vee \bar{y}_k). \quad (3)$$

Оценим сложность реализации функции $\bigvee_{\alpha \in A_k} u_\alpha \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{\alpha_k}$ формулами в базисе $(\vee, \&, \neg)$. Для простоты изложения будем оценивать сложность реализации этой функции П-схемами, поскольку сложность реализации булевой функции формулами в базисе $B_0 = (\vee, \&, \neg)$ равна сложности реализации той же функции П-схемами.

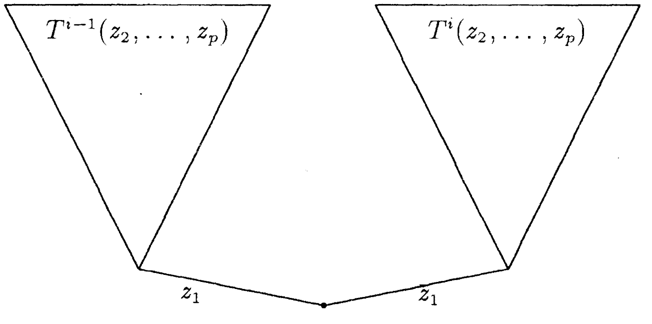

Рис. 1

Пусть $T^i(z_1, \ldots, z_p)$ — контактное дерево, которое реализует все конъюнкции $z_1^{\sigma_1}, \ldots, z_p^{\sigma_p}$ такие, что $\sum_{j=1}^{p} \sigma_j = i$. Сложность контактного дерева $T^i(z_1, \ldots, z_p)$ обозначим через $\phi^i(p)$. Индуктивное построение контактного дерева $T^i(z_1, \ldots, z_p)$ изображено на рис. 1, откуда следует, что

$$\phi^i(p) \leqslant \phi^{i-1}(p-1) + \phi^i(p-1) + 2. \quad (4)$$

Индукцией по i докажем, что

$$\phi^i(p) \leqslant \binom{p+2}{i+1} - 2. \tag{5}$$

Легко проверить, что $\phi^0(p) = p$, т. е. $\phi^0(p) = \binom{p+2}{1} - 2 = p$. Пусть утверждение выполняется для всех i, $i \leqslant i_0$. Докажем выполнимость для i_0. Из (4) и индукционного предположения следует, что

$$\phi^{i_0}(p) \leqslant \phi^{i_0-1}(p-1) + \phi^{i_0}(p-1) + 2$$
$$\leqslant \binom{p+1}{i_0} - 2 + \binom{p+1}{i_0+1} - 2 + 2 \leqslant \binom{p+2}{i_0+1} - 2.$$

Неравенство (5) доказано.

Из (5) следует, что

$$\phi^{\lfloor k/2 \rfloor}(k) \leqslant 4\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}. \tag{6}$$

Добавим контакты u_α к висячим вершинам дерева, которые соответствуют конъюнкциям $y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{\alpha_k}$, $\alpha \in A_k$. Висячие вершины полученной схемы объединим. Из (6) следует, что сложность построенной таким образом схемы не превосходит $5\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$. Из этой конструкции и представления (3) следует, что сложность функции $F^{k,m}(U, Y, X_1, \ldots, X_m)$ не превышает $5\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + k(m+2)$. Лемма 1 доказана.

Пусть n, $n \geqslant 2$, — натуральное число. Положим

$$k_0(n) = \left\lfloor \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n \right\rfloor \tag{7}$$

и

$$m_0(n) = \left\lfloor \left(n - \binom{k_0}{\lfloor k_0/2 \rfloor} \right) / k_0 \right\rfloor - 1. \tag{8}$$

Из (1) следует, что число переменных булевой функции F^{k_0,m_0} меньше n и

$$\binom{k_0}{\lfloor k_0/2 \rfloor} \sim C_0 n, \quad m_0 \sim (1 - C_0)n/\log_2 n, \tag{9}$$

где $C_0 = \sqrt{2/\pi}$.

В дальнейшем в обозначениях F^{k_0,m_0} и PF^{k_0,m_0} индексы k_0 и m_0 будем опускать.

Б. А. Субботовская [6] показала, что для каждого конечного базиса B существует константа C_B, которая зависит только от базиса и $L_B(f) \leqslant C_B \cdot L_{B_0}$ для каждой функции f.

Из этого факта, леммы 1 и (9) следует, что для значений $k_0(n)$ и $m_0(n)$, заданных в (7) и (8), справедливо

Следствие 1. $L_BF(U,Y,X_1,\dots,X_m)=O(n)$.

Лемма 2. *Для булевой функции* $PF_Y(U,X_1,\dots,X_m)$ *справедливы утверждения*:

(a) $L_B(PF_Y)\succeq n^2/\log n$ *для формул в конечном базисе* B;

(b) $S(PF_Y)\succeq n^2/\log^2 n$ *для контактных схем*;

(c) $B(PF_Y)\succeq n^2/\log^2 n$ *для детерминированных ветвящихся программ*;

(d) $NB(PF_Y)\succeq n^{3/2}/\log n$ *для недетерминированных ветвящихся программ.*

Доказательство (см. [4]). Если вместо переменных u_α, $\alpha\in A_k$, подставить всевозможные значения констант 0 и 1, а вместо переменных из X_i, $i\neq j$ подставить константу 1, то получим $2^{\binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}}$ различных функций, зависящих от переменных из X_j, $1\leqslant j\leqslant m$. Справедливость теоремы в случае контактных схем и формул следует из теоремы Э. И. Нечипорука [3]. В случае ветвящихся программ можно воспользоваться замечанием П. Пудлака [11] (см. также теорему 3 в обзоре А. А. Разборова [12]). Это позволяет применить метод Э. И. Нечипорука к функции PF_Y. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Для булевых функций* PF_Y *и* F *выполняются следующие соотношения*:

(a) $L_B(PF_Y)/L_B(F)\succeq n/\log n$ *для формул в конечном базисе* B;

(b) $S(PF_Y)/S(F)\succeq n/\log^2 n$ *для контактных схем*;

(c) $B(PF_Y)/B(F)\succeq n/\log^2 n$ *для детерминированных ветвящихся программ*;

(d) $NB(PF_Y)/NB(F)\succeq \sqrt{n}/\log n$ *для недетерминированных ветвящихся программ.*

Если $k\geqslant 2$, *то*

(e) $Bk(PF_Y)/Bk(F)\succeq n/\log n$ *для детерминированных ветвящихся* k*-программ*;

(f) $NBk(PF_Y)/NBk(F)\succeq \sqrt{n}/\log n$ *для недетерминированных ветвящихся* k*-программ.*

Доказательство. Справедливость утверждений (a)–(d) следует из следствия 1 и леммы 2.

Так как в доказательстве леммы 1 при реализации функции F в виде (3) каждая переменная в любой цепи встречается не более чем 2 раза, то из леммы 1 и следствия 1 следует, что $B2(F)=O(n)$. Поэтому утверждения (e) и (f) также справедливы. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для недетерминированных ветвящихся* 1*-программ, реализующих булеву функцию* $f(X,Y)$,

$$NB1(P_Y(f))\leqslant NB1(f).$$

Доказательство. Рассмотрим 1-программу, реализующую $f(X,Y)$. В этой программе нет нулевых цепей. Следовательно, все дуги, выходящие из вершин, помеченных переменными y_i, можно заменить свободными дугами. Полученная недетерминированная ветвящаяся программа реализует проекцию функции f по множеству переменных из Y. Теорема 2 доказана.

Следующая теорема, в частности, показывает, что если для некоторой булевой функции f существует «большой» разрыв (более чем квадратичный относительно сложности $NB(f)$) между сложностями $NB(f)$ и $B(f)$, то можно построить пример такой функции, что существует «большой» разрыв между сложностью реализации этой функции и сложностью ее проекции в классе детерминированных программ. (Аналогичное утверждение справедливо и для k-программ.)

Наоборот, если для некоторой функции существует «большой» разрыв между сложностями булевой функции и ее проекции в классе детерминированных ветвящихся 1-программ, то для проекции этой функции существует «большой» разрыв между сложностями ее реализациями в классах недетерминированных и детерминированных 1-программ.

Теорема 3. (1a) *По любой булевой функции $f(X)$ от n переменных можно построить такую булеву функцию $g(X,Y)$, которая зависит не более чем от $n+(NB(f))^2$ переменных, что*

$$B(P_Y g(X,Y)) - B(g(X,Y)) \geqslant B(f(X)) - NB(f(X)) - 8(NB(f))^2.$$

(1b) *По любой булевой функции $f(X)$ от n переменных можно построить такую булеву функцию $g(X,Y)$, которая зависит не более чем от $n+(NBk(f))^2$ переменных, что*

$$Bk(P_Y g(X,Y)) - Bk(g(X,Y)) \geqslant Bk(f(X)) - NBk(f(X)) - 8(NBk(f))^2.$$

(2) *Пусть $h(X,Y)$ — булева функция. Тогда*

$$B1(P_Y(h)) - 1/2NBP1(P_Y(h)) \geqslant BP1(P_Y(h)) - BP1(h).$$

Доказательство. (1a) Число непомеченных вершин в недетерминированной ветвящейся программе не превышает $(2NB(f))^2$ (доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 1 в [9]). Все непомеченные вершины перенумеруем числами от 1 до l и рассмотрим j-ю непомеченную вершину. Эту вершину пометим новой переменной y_j, одну из свободных дуг, выходящих из этой вершины, пометим 0, а другую — 1. Полученная ветвящаяся программа является детерминированной ветвящейся программой, которая вычисляет некоторую функцию $g(X,Y)$. Эта функция зависит не более чем от $n+(2NB1(f))^2$ переменных. В классе детерминированных программ сложность этой

функции не превосходит $NB(f) + 4(NB(f))^2$. Геометрическая проекция функции $g(X,Y)$ по множеству переменных из Y — функция $f(X)$, т. е.

$$B(g(X,Y)) \leqslant NB(f(X)) + 8(NB(f))^2, B(P_Y g(X,Y)) = B(f(X)).$$

Из этих соотношений следует утверждение теоремы в случае (1a).

Случай (1b) теоремы для k-программ доказывается аналогично.

Рассмотрим детерминированную ветвящуюся 1-программу, вычисляющую $h(X,Y)$. В этой программе нет нулевых цепей. Поэтому все ребра, выходящие из вершин, помеченных переменными y_i, можно заменить на свободные ребра. Полученная недетерминированная ветвящаяся программа вычисляет проекцию функции h по множеству переменных из Y, т. е. сложность реализации функции $P_Y(h)$ в классе недетерминированных 1-программ не больше сложности реализации функции h в классе детерминированных 1-программ. Таким образом, $NBP1(P_Y(h)) \leqslant BP1(h)$. Отсюда следует, что утверждение (2) теоремы 3 верно.

Известно, что существуют булевы функции с экспоненциальным разрывом между сложностями детерминированных и недетерминированных ветвящихся 1-программ (см., например, [10]). Следовательно, из утверждения (b) теоремы 3 следует

Следствие 2. *Существуют булевы функции с экспоненциальным разрывом между сложностями функций и их геометрических проекций в классе детерминированных 1-программ.*

Замечание 1. Поскольку сложность реализации почти всех булевых функций формулами в произвольном конечном базисе, контактными схемами, ветвящимися программами, схемами из функциональных элементов и т. д. асимптотически совпадает со сложностью самой сложной функции, то при геометрическом проектировании для почти всех булевых функций невозможно существенное усложнение. В частности, имеется $2^{2^{n-1}+1} - 1$ таких функций от n переменных, что проекция каждой такой функции по любому множеству переменных, в частности по любой переменной, тождественно равна 1. В самом деле, рассмотрим множество функций, которые равны 1 на всех двоичных наборах длины n, содержащих нечетное число единиц и принимающих произвольные значение на всех остальных наборах. Аналогично можно рассмотреть множество функций, которые равны 1 на всех двоичных наборах длины n, содержащих четное число единиц и принимающих произвольные значение на всех остальных наборах. Объединение этих двух множеств функций и даст указанную оценку.

2. Монотонное расширение

Будем говорить, что булева функция $g(x_1, \dots, x_k)$ является *монотонным расширением* функции $f(x_1, \dots, x_k)$, если $g(\beta_1, \dots, \beta_k) = 1$ тогда и только тогда, когда существует такой набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \preceq (\beta_1, \dots, \beta_k)$ и $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$. (Здесь, как обычно, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \preceq (\beta_1, \dots, \beta_k)$ означает, что $\alpha_1 \leqslant \beta_1, \dots, \alpha_k \leqslant \beta_k$.)

Будет указан пример такой булевой функции, что сложность монотонного расширения этой функции существенно превышает сложность функции.

Рассмотрим булеву функцию $H^{k,m}$ от множеств переменных $U = \{u_\alpha, \alpha \in A_k\}$ и $X_l = \{x_{l,1}, \dots, x_{l,k}\}$, $1 \leqslant l \leqslant m$. По определению положим

$$H^{k,m}(U, X_1, \dots, X_m) = \bigvee_{\alpha \in A_k} u_\alpha \left(\bigwedge_{l=1}^{m} x_{l,1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_{l,k}^{\alpha_k} \right). \tag{10}$$

Число переменных этой функции равно $\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + mk$. Монотонным расширением этой функции является функция $PF_Y^{k,m}$, рассмотренная в разд. 1 (см. (2)), т. е.

$$MH^{k,m}(U, X_1, \dots, X_m) \equiv PF_Y^{k,m}(U, X_1, \dots, X_m).$$

Лемма 3. *Сложность реализации функции $H^{k,m}(U, X_1, \dots, X_m)$ формулами в базисе $(\vee, \&, \neg)$ не превышает $5\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + 2km$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$H^{k,m}(U, X_1, \dots, X_m) \equiv \bigvee_{\alpha \in A_k} u_\alpha \cdot x_{1,1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_{1,k}^{\alpha_k}$$

$$\&(x_{1,1}x_{2,1} \cdot \ldots \cdot x_{m,1} \vee \bar{x}_{1,1}\bar{x}_{2,1} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{m,1}) \cdot \ldots \cdot (x_{1,k}x_{2,k} \cdot \ldots \cdot x_{m,k} \vee \bar{x}_{1,k}\bar{x}_{2,k} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{m,k}).$$

Следовательно, сложность этой функции не превышает $5\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} + 2km$. Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 1. Лемма 3 доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать функции H^{k_0,m_0} и MH^{k_0,m_0}, где значения k_0 и m_0 заданы в (7) и (8). Положим $H \equiv H^{k_0,m_0}$ и $MH \equiv MH^{k_0,m_0}$.

Из леммы 3, (9) и результата Б. А. Субботовской получаем

Следствие 3. *Для формул в любом конечном базисе B справедливо соотношение $L_B H(U, Y, X_1, \dots, X_m) \preceq n$.*

Теорема 4.

(a) $L_B(MH)/L_B(H) \succeq n/\log n$ *для формул в конечном базисе B;*

(b) $S(MH)/S(H) \succeq n/\log^2 n$ *для контактных схем;*

(c) $B(MH)/B(H) \succeq n/\log^2 n$ *для детерминированных ветвящихся программ;*

(d) $NB(MH)/NB(H) \succeq \sqrt{n}/\log n$ *для недетерминированных ветвящихся программ.*

Если $k \geqslant 2$, *то*

(e) $Bk(MH)/Bk(H) \succeq n/\log^2 n$ *для детерминированных ветвящихся* k*-программ;*

(f) $NBk(MH)/NBk(H) \succeq \sqrt{n}/\log n$ *для недетерминированных ветвящихся* k*-программ.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 5. *В классе недетерминированных ветвящихся* 1*-программ справедливо соотношение*

$$NB1(M(f)) \leqslant NB1(f).$$

Доказательство. Недетерминированную ветвящуюся 1-программу, вычисляющую функцию f, можно преобразовать в недетерминированную 1-программу, вычисляющую функцию $M(f)$. Рассмотрим, например, вершину **c**, помеченную переменной x, из которой выходят две дуги: дуга $(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, помеченная 1, и дуга $(\mathbf{c}, \mathbf{a})$, помеченная 0 (рис. 2).

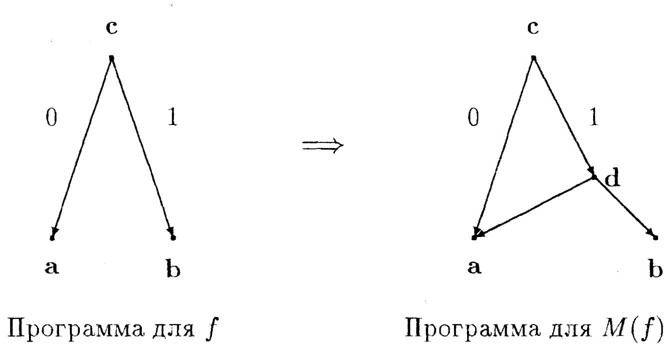

Рис. 2

Введем новую непомеченную вершину **d**, из которой выходят две непомеченные дуги $(\mathbf{d}, \mathbf{a})$ и $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$. Вместо дуги $(\mathbf{c}, \mathbf{b})$, помеченной 1, рассмотрим дугу $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, помеченную 1. Проделаем эти преобразования со всеми помеченными вершинами. Полученная недетерминированная 1-программа вычисляет монотонное расширение функции f. Сложность реализации функции $M(f)$ не больше сложности реализации функции f. Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Поскольку сложность реализации почти каждой булевой функции формулами в произвольном конечном базисе, контактными схемами, ветвящимися программами, схемами из функциональных элементов и т. д. асимптотически совпадает со сложностью самой сложной функции, то почти для каждой булевой функции при операции монотонного расширения невозможно существенное усложнение. Более того, существует 2^{2^n-1} функций от n переменных (а именно функций, которые принимают значение 1 на нулевом наборе), монотонным расширением которых является функция, тождественно равная 1.

Следующее утверждение указывает на некоторую связь между операцией геометрического проектирования и операцией монотонного расширения.

Теорема 6. *Для каждой булевой функции $f(X)$ от n переменных можно указать функцию $g(X, Y)$ от $2n$ переменных такую, что*

(a) *сложность функции $g(X, Y)$ отличается от сложности $f(X)$ не более чем на Cn в классе схем из функциональных элементов, формул, контактных схем, ветвящихся программ, ветвящихся k-программ при $k \geqslant 2$ и т. д.;*

(b) *проекция функции $g(X, Y)$ по переменным из Y совпадает с монотонным расширением функции $f(X)$.*

Доказательство. Легко проверить, что булева функция

$$g(X, Y) = f(Y) \cdot (x_1 y_1 \vee \bar{y}_1) \cdot \ldots \cdot (x_n y_n \vee \bar{y}_n)$$

удовлетворяет условию (a) теоремы.

Пусть g и h — булевы функции, зависящие от одинаковых переменных. Будем говорить, что $g \leqslant h$, если для любого набора $\tilde{a}$ выполняется соотношение $g(\tilde{a}) \leqslant h(\tilde{a})$. Без ограничения общности можно считать, что для конъюнкции $\mathscr{K} = x_1 \ldots x_p \bar{x}_{p+1} \ldots \bar{x}_q$ выполняется неравенство $\mathscr{K} \leqslant f$. Тогда $\mathscr{K}(x_1 y_1 \vee \bar{y}_1) \cdot \ldots \cdot (x_n y_n \vee \bar{y}_n) \leqslant g(X, Y)$, т. е.

$$x_1 y_1 \ldots x_p y_p \bar{y}_{p+1} \ldots \bar{y}_q (x_{q+1} y_{q+1} \vee \bar{y}_{q+1}) \ldots (x_n y_n \vee \bar{y}_n) \leqslant g(X, Y).$$

Следовательно, конъюнкция $x_1 \ldots x_p \leqslant P g_Y(X, Y)$. Очевидно, что $x_1 \ldots x_p \leqslant Mf$. Отсюда следует, что $P g_Y(X) \equiv Mf(X)$. Утверждение (b) теоремы 6 доказано.

Замечание 3. Рассмотрим булевы функции от переменных из $X_m = \{x_{i,j}\}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Пусть $\mathrm{CLIQUE}_m(X_m)$ — характеристическая функция для свойства графа с m вершинами содержать $\lfloor m/2 \rfloor$-клику, т. е. содержать полный $m/2$-вершинный подграф. $\mathrm{CLIQUE-ONLY}_m(X_m)$ — характеристическая функция для свойства графа с m вершинами содержать только ребра одного полного

$m/2$-вершинного подграфа и не содержать других ребер. Функция CLIQUE_m — монотонное расширение функции $(\mathrm{CLIQUE}-\mathrm{ONLY}_m)$. Функция $\mathrm{CLIQUE}-\mathrm{ONLY}_m$ имеет полиномиальную сложность. Функция CLIQUE_m — характеристическая функция NP-сложной проблемы. Следовательно, можно предположить возможность экспоненциального разрыва между сложностью булевой функции и ее монотонного расширения. Из этого факта и теоремы 6 следует, что существует такая булева функция полиномиальной сложности, что ее проекция по некоторому подмножеству переменных (мощность этого подмножества не больше половины мощности исходного множества переменных) есть характеристическая функция NP-сложной задачи.

Автор выражает благодарность К. Л. Рычкову за ценные замечания при обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В.** Об одном подходе к получению нижних оценок сложности для булевых функций // Методы дискретного анализа в теории булевых функций и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Вып. 35. С. 3–9.
2. **Кузнецов А. В.** Об одном свойстве функций, реализуемых неплоскими бесповторными схемами // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 174–185. (Тр. Математического ин-та им В. А. Стеклова; Т. 51).
3. **Нечипорук Э. И.** Об одной булевской функции // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169, № 4. С. 765–766.
4. **Окольнишникова Е. А.** О сравнении сложностей реализации булевых функций и их проекций // Методы дискретного анализа в теории управляющих систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Вып. 31. С. 76–80.
5. **Пулатов А. К.** О влиянии нулевых цепей на сложность реализации булевых функций контактными схемами // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Вып. 30. С. 30–37.
6. **Субботовская Б. А.** О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 4. С. 784–787.
7. **Bollig B., Wegener I.** Read-once projections and formal circuit verification with binary decision diagrams // Theoretical aspects of computer science: STACS'96. Berlin: Springer, 1996. P. 491–502. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1046).

8. **Bollig B., Wegener I.** Completeness and noncompleteness results with respect to read-once projections // Inform. and Computation. 1998. V. 143, N 1. P. 24–33.
9. **Borodin A. B., Razborov A. A., Smolensky R.** On lower bounds for read-k-times branching programs // Comput. Complexity. 1993. V. 3, N 1. P. 1–18.
10. **Jukna S., Razborov A., Savicky P., Wegener I.** On P versus NP$\cap$ co-NP for decision trees and read-once branching programs // Mathematical foundations of computer science. Berlin: Springer, 1997. P. 319–326. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1295).
11. **Pudlák P.** The hierarchy of Boolean circuits // Comput. Artificial Intelligence. 1987. V. 6, N 5. P. 449–468.
12. **Razborov A. A.** Lower bounds for deterministic and nondeterministic branching programs // Fundamentals of computation theory. Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 47–60. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 529).

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
20 декабря 1999 г.