ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2000. Серия 1. Том 7, № 2, 12–20

УДК 519.14

ДОМИНИРОВАНИЕ И НЕПРИВОДИМОСТЬ В ГРАФАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА БЛОКИ*)

В. В. Кабанов

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством ребер E, $N(v)$ — множество всех вершин в G, смежных с вершиной v, и $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Множество $\mathrm{PN}(v) = N[v] \setminus N[X \setminus \{v\}]$, где v — вершина из подмножества $X \subseteq V$, называется *X-приватной окрестностью* вершины v в G, а его элементы — *X-приватными соседями* для v. Вершина v из X *неприводима* относительно X, если ее X-приватная окрестность не является пустым множеством. В противном случае v называется *приводимой* относительно X. Множество вершин X называется *неприводимым* в G, если все его вершины неприводимы относительно X в G. Наименьшее число вершин в максимальном неприводимом множестве графа G называется *нижним параметром неприводимости* для графа G и обозначается через $\mathrm{ir}(G)$. Минимальное число элементов в доминирующем множестве вершин графа G обозначается через $\gamma(G)$ и называется *нижним параметром доминирования* графа G. В статье изучается соотношение нижних параметров доминирования и неприводимости графов, в которых все блоки не содержат порожденных $K_{1,3}$ подграфов и точки сочленения каждого блока образуют клику. Полученные результаты обобщают и расширяют результаты Л. Фолькмана о блок-графах и графах с числом циклов не более 2.

Введение

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. *Окрестностью* вершины v в графе G называется множество $N(v)$ всех вершин в G, смежных с v. *Замкнутой окрестностью* вершины v в графе G называется множество $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Если $X \subseteq V$, то $N(X) = \bigcup\limits_{v \in X} N(v)$ и $N[X] = \bigcup\limits_{v \in X} N[v]$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00462).

Подграф графа G, порожденный множеством X, обозначим через $G\langle X\rangle$. Если граф G зафиксирован, то $G\langle X\rangle = \langle X\rangle$.

Множество X вершин в G называется *доминирующим*, если $N[X] = V$. Наименьшее число элементов в доминирующем множестве графа G называется *нижним параметром доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$.

Если v — вершина некоторого подмножества X из V, то множество $\mathrm{PN}(v) = N[v] \setminus N[X \setminus \{v\}]$ называется *X-приватной окрестностью* вершины v, а его элементы — *X-приватными соседями* вершины v. Обратим внимание на то, что вершина v принадлежит своей X-приватной окрестности тогда и только тогда, когда она изолирована в $\langle X\rangle$. Если вершина v не принадлежит своей X-приватной окрестности, то все X-приватные соседи вершины v находятся вне X. Мы будем постоянно пользоваться этим свойством X-приватной окрестности. Вершина v из X называется *неприводимой* относительно X, если ее X-приватная окрестность не является пустым множеством. В противном случае вершина v называется *приводимой* относительно X. Множество вершин X называется *неприводимым* в G, если все вершины из X неприводимы относительно X в G. Ясно, что если D — минимальное доминирующее множество в некотором графе G, то оно неприводимо в G. Более того, множество D является максимальным (относительно включения) неприводимым множеством в графе G. Этот факт послужил основой для введения и изучения понятия неприводимости.

Среди всех максимальных неприводимых множеств выберем множество X с наименьшим числом вершин. Это число назовем *нижним параметром неприводимости* графа G и обозначим через $\mathrm{ir}(G)$. Поскольку каждое минимальное доминирующее множество является максимальным неприводимым, то $\mathrm{ir}(G) \leqslant \gamma(G)$ для любого графа G. Неравенство $\gamma(G) < 2\mathrm{ir}(G)$ было установлено в [1] и [2]. Параметры доминирования и неприводимости графов из разных классах изучались в [1–4, 7]. Чтобы привести основные результаты этих работ, определим некоторые классы графов.

Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если $G - v$ является несвязным графом. *Блоком* графа G называется связный подграф без точек сочленения, который не содержится в большем подграфе без точек сочленения. *Блок-граф* — это граф, в котором все блоки являются кликами, т. е. полными подграфами.

П. Дамашке в [3] получил оценку $\frac{\gamma(G)}{\mathrm{ir}(G)} < \frac{3}{2}$ в случае, когда граф G является деревом. Этот результат был расширен Л. Фолькманом в [7]. Он доказал неравенство $\frac{\gamma(G)}{\mathrm{ir}(G)} \leqslant \frac{3}{2}$ в случае, когда G является блок-графом, и в случае, когда в графе G имеется не более двух циклов.

Граф $K_{1,n}$ будем называть *n-лапой,* если $n \geqslant 2$. Известно, что среди графов без 3-лап содержатся все реберные графы. З. Рячек в [6] рассматривал реберные графы для графов без треугольников. В любом таком графе окрестность каждой вершины является кликой или объединением двух клик. В [6], в частности, доказано, что это свойство характеризует данный класс графов, т. е. если в некотором графе G окрестность каждой вершины является кликой или объединением двух клик, то существует граф без треугольников, реберный граф которого изоморфен графу G. Параметры доминирования и неприводимости для графов без 3-лап и двух указанных подклассов изучались в [5].

Пусть $\mathscr{B}(G)$ — множество всех блоков в графе G и $\mathscr{C}(G)$ — множество всех точек сочленения в G. Граф G назовем *кликово сочлененным,* если все вершины из $B \cap \mathscr{C}(G)$ образуют клику для каждого блока B из $\mathscr{B}(G)$. Очевидно, что любой блок-граф является кликово сочлененным графом.

Продолжая исследование из [7], мы изучаем нижние параметры доминирования и неприводимости в кликово сочлененных графах. В частности, мы показываем, что неравенство

$$\frac{\gamma(G)}{\mathrm{ir}(G)} \leqslant \frac{5}{3}$$

справедливо для любого кликово сочлененного графа G, в котором все блоки не содержат 3-лап, и неравенство

$$\frac{\gamma(G)}{\mathrm{ir}(G)} \leqslant \frac{3}{2}$$

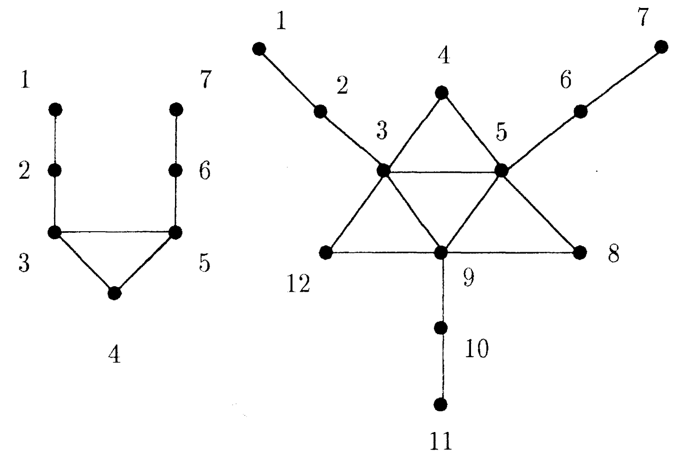
справедливо для любого кликово сочлененного графа G, в котором все блоки являются реберными графами графов без треугольников. Последнее утверждение обобщает результат из [5].

Теорема. *Пусть $G = (V, E)$ — кликово сочлененный граф и X — максимальное неприводимое подмножество вершин в G. Тогда*

1) *если все блоки в G не содержат 3-лап, то в G существует такое доминирующее множество D, что $|D|/|X| \leqslant 5/3$;*

2) *если все блоки в G являются реберными графами графов без треугольников, то в G существует такое доминирующее множество D, что $|D|/|X| \leqslant 3/2$.*

Известные примеры графов, изображенные на рисунке, показывают достижимость верхней границы в первом и втором случаях. Действительно, в правом графе доминирующее множество с наименьшим числом вершин содержит вершины 2, 3, 5, 6, 10, а максимальное неприводимое множество с наименьшим числом вершин состоит из вершин 3, 5, 9. Доминирующее множество с наименьшим числом вершин в левом графе состоит, например, из вершин 2, 3, 6, а максимальное неприводимое множество с наименьшим числом вершин состоит из вершин 3, 5.



1. Предварительные леммы

В лемме 1 перечислены некоторые свойства максимальных неприводимых множеств (см., например, [2]).

Лемма 1. *Пусть X — максимальное неприводимое множество вершин в графе G и вершина v не доминируется множеством X. Тогда приватная окрестность $\mathrm{PN}(v')$ некоторой вершины $v' \in X$ содержится в $N(v)$. Более того, если $v' \in X$ и $\mathrm{PN}(v') \subseteq N(v)$, то для любых двух несмежных вершин $v_1, v_2 \in \mathrm{PN}(v')$ существуют вершины $v_3, v_4 \in X \setminus \{v'\}$ такие, что v_1 смежна с каждой вершиной из $\mathrm{PN}(v_3)$, а v_2 смежна с каждой вершиной из $\mathrm{PN}(v_4)$.*

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — граф и $V_1 \subset V$. Кроме того, пусть $\langle V_1 \rangle$ — клика и $|N(v) \cap V_1| \geqslant 2$ для любой вершины $v \in V_2 = V \setminus V_1$. Тогда*

(i) если G — граф без 3-лап, то существует множество $V_3 \subseteq V$ такое, что V_3 является доминирующим множеством в G и $|V_3| \leqslant \lceil |V_1|/2 \rceil$. Более того, $|V_1 \cap V_3| = 1$ и единственная вершина из $V_1 \cap V_3$ может быть любой вершиной из V_1;

(ii) если G — реберный граф графа без треугольников, то G является кликой.

Доказательство. (i) Пусть v — произвольная вершина из V_1 и $V_2 = V \setminus V_1 \subseteq N(v)$. Тогда утверждение леммы очевидно. Пусть $V_2 \not\subseteq N(v)$. Если v_1, v_2 — несмежные вершины в $V_2 \setminus N(v)$, то $N(v_1) \cap N(v_2) \cap V_1$ — пустое множество (иначе имеется 3-лапа $\{v, v_1, v_2, v_3\}$ для некоторой вершины $v_3 \in N(v_1) \cap N(v_2 \cap V_1)$. Теперь в $V_2 \setminus N(v)$ можно выбрать такое множество попарно несмежных вершин $V' = \{v'_1, \ldots, v'_k\}$, что $V_2 \setminus N(v) \subseteq N[V']$. Так как $|N(v'_i) \cap V_1| \geqslant 2$ при любом $i = 1, \ldots, k$ и $N(v'_i) \cap N(v'_j) = \varnothing$ при любых $i \neq j$, то $k - 1 \leqslant [(|V_2| - 1)/2]$. Если $V_3 = \{v, v'_1, v'_2, \ldots, v'_k\}$, то $|V_3| \leqslant \lceil |V|/2 \rceil$ и V_3 является доминирующим множеством в G.

(ii) Пусть $v' \in V_2 = V \setminus V_1$. По условию (ii) леммы 2 имеем $|N(v') \cap V_1| \geqslant 2$. Если $v, v'' \in V_1 \cap N(v')$, то V_1 и $\{v', v''\}$ содержатся в $N(v)$. Так как G является реберным графом графа без треугольников и $V_1 \cap \{v', v''\} = \{v''\}$, то ввиду характеристического свойства этих графов $\langle V_1 \cup \{v''\} \rangle$ является кликой из $N(v)$. Значит, $V_1 \subseteq N(v')$ для любого $v' \in V_2$. Пусть $u, v' \in V_2$ и u не смежна с v'. Тогда u и v' содержатся в различных кликах из $N(v)$ для любого $v \in V_1$. Значит, $|V_1| = 1$. Противоречие. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма является обобщением леммы 2.5 из [7].

Лемма 3. *Пусть G — граф и V_1 — такое подмножество множества V_2, что $|V_1 \cap N(v)| \geqslant 2$ для любой вершины $v \in V_2 = V \setminus V_1$. Пусть также $\langle (V_1 \cup \mathscr{C}(G)) \cap V(B) \rangle$ — клика для любого блока $B \in \mathscr{B}(G)$.*

(i) *Если все блоки из $\mathscr{B}(G)$ не содержат 3-лап, то существует подмножество $V_3 \subseteq V$ такое, что $V_2 \subseteq N[V_3]$ и $3|V_3| \leqslant 2|V_1|$.*

(ii) *Если любой блок B из $\mathscr{B}(G)$ является реберным графом некоторого графа без треугольников, то существует такое подмножество $V_4 \subseteq V$, что $V_2 \subseteq N[V_4]$ и $2|V_4| \leqslant |V_1|$.*

Доказательство. (i) Пусть r — число всех блоков в G. Докажем лемму индукцией по r. Если G является блоком, то утверждение непосредственно следует из утверждения (i) леммы 2. Если G содержит $r \geqslant 2$ блоков и граф G несвязен, то (i) следует из предположения индукции. Пусть G связен и содержит более одного блока. Тогда в G существует блок B, содержащий только одну вершину v из $\mathscr{C}(G)$.

Пусть эта вершина принадлежит множеству V_1.

Рассмотрим подграф $G_1 = G - (V(B) \cup (N(v) \cap V_2))$. По условию порожденный подграф графа G на множестве вершин $(V_1 \cup \mathscr{C}(G)) \cap V(B')$ является кликой для каждого блока $B' \in \mathscr{B}(G)$ и каждая вершина из $V(B') \setminus (V_1 \cup \mathscr{C}(G))$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из $V_1 \cup \mathscr{C}(G)$. Если в подграфе $B' - (N[v] \cap V_2)$ содержится более одной вершины, то он является блоком в G_1. Значит, G_1 содержит менее r блоков и поэтому удовлетворяет предположению индукции. Следовательно,

существует подмножество $V_6 \subseteq V(G_1)$ такое, что $V_2 \cap V(G_1) \subseteq N[V_6]$ и $3|V_6| \leqslant 2|V_1 \cap V(G_1)|$.

Пусть $V(B) \subseteq N[v]$. Если $V_2 \cap V(B) \neq \varnothing$, то $|V_1 \cap V(B)| \geqslant 2$ и в качестве доминирующего множества можно взять $V_3 = V_6 \cup \{v\}$. Если $V_1 \cap V(B) = \varnothing$, то можно взять $V_3 = V_6$. В обоих случаях $3|V_3| \leqslant 2|V_1|$ и утверждение (i) леммы 3 выполняется для подмножества V_3 из V.

Пусть $V(B) \nsubseteq N[v]$. По утверждению (i) леммы 2 существует подмножество V_7 из $V(B)$ такое, что $V_1 \cap V(B) \subseteq N[V_7]$, $3|V_3| \leqslant 2|V_1 \cap V(B)|$, и можно взять вершину v в V_7. Если $V_3 = V_6 \cup V_7$, то $V_2 \subseteq N[V_3]$ и $3|V_3| \leqslant 2|V_1|$, что и требовалось доказать.

Предположим, что вершина v содержится в V_2.

По утверждению (i) леммы 2 если $|V_1 \cap V(B)| \geqslant 2$, то существует подмножество V_6 из $V(B)$ такое, что $3|V_6| \leqslant 2|V_1 \cap V(B)|$ и $V_1 \cap V(B) \subseteq N[V_6]$. Пусть $G_1 = G - V(B)$. По условию если $|V(B')| > 2$, то $B' - v$ является блоком в G_1 для каждого блока B' в G, отличного от B. В соответствии с предположением индукции существует подмножество $V_7 \subseteq V(G_1)$ такое, что $3|V_7| \leqslant 2|V_1 \cap V(G_1)|$ и $V_2 \cap V(G_1) \subseteq N[V_7]$. Поэтому утверждение (i) леммы 3 выполняется для $V_3 = V_6 \cup V_7$.

Теперь пусть $|V_1 \cap V(B)| = 1$. В этом случае $V_2 \cap V(B) = \{v\}$. Пусть $a \in (V_2 \cap N(v)) \setminus V(B)$. Рассмотрим подграф $G_1 = G - (V(B) \cup \{a\} \cup (N(a) \cap V_2))$. Пусть $\mathscr{B}'(G) = \{B' \in \mathscr{B}(G) \mid a \in B'\}$. Выберем блок B' из $\mathscr{B}'(G)$. Если $V(B') \setminus (\{a\} \cup (N(a) \cap V_2))$ состоит только из одной вершины, то эта вершина принадлежит множеству V_1. Если же $|V(B') \setminus (\{a\} \cup (N(a) \cap V_2))| > 1$, то $B' - (\{a\} \cup (N(a) \cap V_2))$ является блоком в G_1 по условию (i) леммы 3. Таким образом, в любом случае граф G_1 удовлетворяет предположению индукции и в нем содержится меньше блоков чем в G. По предположению индукции в G_1 существует подмножество $V_6 \subseteq V(G_1)$ такое, что $3|V_6| \leqslant 2|V_2 \cap V(G_1)|$ и $V_2 \cap V(G_1) \subseteq N[V_6]$.

Так как $V_2 \cap V(B) = \{v\}$, то в качестве множества V_3 можно взять $V_6 \cup \{a\}$. Утверждение (i) леммы 3 доказано.

Утверждение (ii) леммы 3 доказывается аналогично.

2. Доказательство теоремы

Пусть G является кликово сочлененным графом, в котором все блоки не содержат 3-лап. Обозначим через $\mathscr{B} = \mathscr{B}(G)$ множество всех блоков графа G, через $\mathscr{C}(G)$ множество всех точек сочленения в G. Для удобства все блоки из $\mathscr{B}$ перенумеруем так, что $\mathscr{B} = \{B_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$. Обозначим через C_i множество точек сочленения графа G, которые содержатся в блоке B_i, т. е. $C_i = \mathscr{C}(G) \cap V(B_i)$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Если X является максимальным неприводимым множеством вершин из G, то, как мы отметили во введении, его можно представить в виде $X = Y + Z$, где Y — множество всех не изолированных в $\langle X\rangle$ вершин из X и $Z = X \setminus Y$. Пусть $R = V(G) \setminus N[X]$ и $Q = \{v \in V(G) \setminus X \mid |N(v) \cap X| \geqslant 2\}$. Положим $Q_i = Q \cap V(B_i)$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$. Далее, пусть $Y_i = Y \cap V(B_i)$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$. Пусть также $Y_i^c = \{y \in Y_i \mid \mathrm{PN}(y) \cap V(B_i) = \varnothing\}$. Заметим, что $Y_i^c \subseteq C_i$, так как $\mathrm{PN}(y) \neq \varnothing$ для всех $y \in Y$. Таким образом, $\langle Y_i^c\rangle$ является кликой, $i \in \{1, \dots, r\}$.

Лемма 4. *Пусть C_y — связная компонента $\langle Y_i \setminus Y_i^c\rangle$, содержащая y из $Y_i \setminus Y_i^c$. Тогда*

(i) *в подграфе $\langle Y_i \setminus Y_i^c\rangle$ каждая связная компонента является кликой;*

(ii) *для каждого $y \in Y_i \setminus Y_i^c$ такого, что $|V(C_y)| > 1$, подграф графа G с множеством вершин $\mathrm{PN}(y) \cap V(B_i)$ является кликой;*

(iii) *если вершина q из Q_i смежна с $y \in Y_i \setminus Y_i^c$ и $|V(C_y)| > 1$, то q смежна либо с каждой вершиной из C_y, либо с каждой вершиной из $\mathrm{PN}(y) \cap V(B_i)$.*

Доказательство. (i) По определению множества Y_i приватная окрестность $\mathrm{PN}(y)$ для любой вершины $y \in Y_i \setminus Y_i^c$ имеет непустое пересечение с блоком B_i. Пусть $y' \in \mathrm{PN}(y) \cap V(B_i)$ и $N(y) \cap (Y_i \setminus Y_i^c)$ содержит несмежные вершины y_1, y_2. Тогда $\langle y, y_1, y_2, y'\rangle$ является 3-лапой в B_i. Противоречие.

(ii) Предположим, что y' и y'' — две несмежные вершины из $\mathrm{PN}(y) \cap V(B_i)$, и пусть $y_1 \in C_y \setminus \{y\}$. Тогда $\langle y, y', y'', y_1\rangle$ является 3-лапой в B_i. Противоречие.

(iii) Предположим, что вершина q из Q_i смежна с $y \in Y_i \setminus Y_i^c$ и не смежна с некоторой вершиной y_1 из $C_y \setminus \{y\}$. Тогда q смежна с каждой вершиной $y' \in \mathrm{PN}(y) \cap V(B_i)$, иначе $\langle y, q, y_1, y'\rangle$ является 3-лапой в B_i. Противоречие. Лемма 4 доказана.

Для доказательства теоремы поэтапно будем строить некоторое множество вершин D в графе G и следить за тем, чтобы число вершин в этом множестве удовлетворяло неравенству $3|D| \leqslant 5|X|$. Затем докажем, что построенное множество является доминирующим в графе G.

Пусть $x \in X$ и $\varphi(x) = x$ в случае, когда $x \in Z$ и $\varphi(x) = x'$ для некоторой вершины $x' \in \mathrm{PN}(x)$ в случае, когда $x \in Y$.

Пусть $A_1 = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$. Очевидно, что $|A_1| = |X|$.

Далее, для каждого блока $B_i \in \mathscr{B}$ и для каждой связной компоненты $\mathscr{C}$ из $\langle Y_i \setminus Y_i^c\rangle$ такой, что $|V(C)| > 1$, выберем произвольную вершину $y_C \in C$. Положим $A_{2,i} = \bigcup\limits_C \{y_C\}$.

Пусть $A_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_{2,i}$.

Для каждого $B_i \in \mathscr{B}$ и для каждой связной компоненты C из $\langle Y_i \setminus Y_i^c \rangle$ такой, что $|V(C)| = 1$, обозначим через y_C вершину из C. Теперь рассмотрим вершину y_C такую, что $(N(y_C) \cap Q_i) \setminus N[A_1 \cup A_2] \neq \varnothing$. Заметим, что поскольку блок B_i не содержит 3-лап, любая вершина q из множества $(N(y_C) \cap Q_i) \setminus N[A_1 \cup A_2]$ смежна с теми же вершинами из Y_i^c, что и y_C. Ввиду того, что y_C — единственная вершина в связной компоненте C из $\langle Y_i \setminus Y_i^c \rangle$, а $y_C \in Y$, то пересечение $N(y_C)$ с Y_i^c не пусто по определению множества Y. Для каждого такого y_C выберем вершину $\overline{y}_C$ из $N(y_C) \cap Y_i^c$. Положим $A_{3,i} = \bigcup\limits_{C} \{\overline{y}_C\}$ и $A_3 = \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_{3,i}$. Тогда $2|A_2 \cup A_3| \leqslant \left| \bigcup\limits_{i=1}^{r} (Y_i \setminus Y_i^c) \cup A_3 \right|$.

Пусть $F = (Y \cap \mathscr{C}(G)) \setminus A_3$ и $Q' = \{q \in Q \mid |N(q) \cap F| \geqslant 2\}$. Если H — порожденный подграф из G с множеством вершин $F \cup Q'$, то H удовлетворяет условию (i) леммы 3. Применяя эту лемму, найдем подмножество A_4 из $V(H)$ такое, что $V(H) \setminus F$ содержится в $N[A_4]$ и $3|A_4| \leqslant 2|F|$, т. е. $3|A_4| \leqslant 2(|Y \cap \mathscr{C}(G) \setminus A_3|)$.

Теперь рассмотрим множество $D = \bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$. По выбору множества D имеем $|D|/|X| \leqslant 5/3$. Покажем, что D является доминирующим множеством в графе G.

По лемме 1 множество $V(G) \setminus Q$ содержится в $N[D]$. Положим $M = Q \setminus N[D]$. Пусть $q \in M$ и $y \in N(q) \cap X$. По выбору множества M вершина y принадлежит множеству $Y \setminus D$.

По утверждению (iii) леммы 4 вершина y не может принадлежать связной компоненте C из $\langle Y_i \setminus Y_i^c \rangle$, которая имеет более одной вершины для каждого i. Пусть существует i такое, что блок $B_i \in \mathscr{B}$ имеет связную компоненту C из $\langle Y_i \setminus Y_i^c \rangle$, содержащую только вершину $y = y_C \in C$. Если q не смежна с $\overline{y}_C$ и с $y' \in \mathrm{PN}(y)$, то $\langle y, y', \overline{y}_C, q \rangle$ является 3-лапой в B_i. Противоречие.

Таким образом, мы доказали, что если $q \in M$, то $N(q) \cap Y = N(q) \cap F$. Но в этом случае $|N(q) \cap F| \geqslant 2$. Это означает, что q принадлежит множеству Q'. Поскольку множество A_4 выбрано так, что оно доминирует Q', то $q \in N[A_4]$ и, значит, $q \in N[D]$. Получили противоречие с выбором вершины q. Следовательно, множество D является доминирующим в графе G. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть G — граф, который удовлетворяет условию второго утверждения теоремы. Определим множество D в графе G так же, как в первом случае, т. е. $D = \bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$. По утверждению (ii) леммы 3 имеем

неравенство $2|A_4| \leqslant |\mathscr{C}(G) \cap Y \setminus A_3|$. Значит, по выбору множества D имеем $|D|/|X| \leqslant 3/2$. Доказательство того, что множество D является доминирующим для G, совпадает с доказательством из предыдущего случая. Теорема доказана.

Автор благодарен А. Д. Коршунову за замечания, которые позволили заметно улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Allan R. B., Laskar R.** On domination and some related concepts in graph theory // Proc. of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing. Winnipeg: Utilitas Math. 1978. P. 43–56.
2. **Bollobás B., Cockayne E. J.** Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance // J. Graph Theory. 1979. V. 3, N 3. P. 241–249.
3. **Damaschke P.** Irredundance number versus domination number // Discrete Math. 1991. V. 89, N 1. P. 101–104.
4. **Favaron O.** Irredundance in inflated graphs // J. Graph Theory. 1998. V. 28, N 2. P. 97–104.
5. **Favaron O., Kabanov V., Puech J.** The ratio of three domination parameters in some classes of claw-free graphs // J. Combin. Math. Combin. Comput. 1999. V. 31. P. 151–159.
6. **Ryjáček Z.** On a closure concept in claw-free graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. V. 70, N 2. P. 217–224.
7. **Volkmann L.** The ratio of the irredundance and domination number of a graph // Discrete Math. 1998. V. 178, N 1–3. P. 221–228.

Адрес автора:

Институт математики
и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург, Россия.
E-mail: vvk@imm.uran.ru

Статья поступила
30 ноября 1999 г.