ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2000. Серия 1. Том 7, № 2, 75–85

УДК 510.644

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ*)

А. С. Тонис, И. Г. Перфильева

Рассматривается задача описания функциональной системы бесконечнозначной логики с единичным вещественным отрезком в качестве множества истинностных значений и системой логических связок Лукасевича. Основной результат: функции, реализуемые формулами бесконечнозначной логики, — это кусочно линейные функции с целыми коэффициентами и только они. Аналогичная задача была рассмотрена в [1]. В отличие от [1] множество используемых констант расширено до отрезка $[0, 1]$. Особенностью данной работы является конструктивность всех доказательств, что позволяет получить для каждой кусочно линейной функции стандартную реализацию ее формулой (каноническую форму).

Введение

Данная работа посвящена описанию функциональной системы бесконечнозначной (нечеткой) логики. Имеется в виду описание множества всех функций, представимых формулами исчисления высказываний с бесконечным числом истинностных значений. В качестве такого исчисления будем рассматривать нечеткое пропозициональное исчисление, имеющее отрезок $[0, 1]$ в качестве множества истинностных значений и систему логических связок Лукасевича. Аксиоматический подход к построению этого и других нечетких исчислений высказываний, отличающихся различными свойствами базисных связок, развит в [2]. В настоящей работе мы не будем использовать логический формализм, а ограничимся рассмотрением множества формул указанного выше исчисления.

По аналогии с классическим случаем введем понятия функции бесконечнозначной (нечеткой) логики (сокращенно FL-функции**)), а также FL-функции, реализуемой некоторой формулой нечеткого исчисления

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00989).

**) FL — аббревиатура слов «fuzzy logic».

© 2000 Тонис А. С., Перфильева И. Г.

высказываний над множеством связок Лукасевича. Будет получена характеризация всех FL-функций, реализуемых формулами, и доказано, что не всякая FL-функция допускает такую реализацию.

Проблема характеризации всех функций, реализуемых формулами алгебры Лукасевича с двумя константами 0 и 1, была решена Р. Мак-Нотоном в [1]. А именно, было доказано, что функция f_A может быть реализована формулой A тогда и только тогда, когда она непрерывна, кусочно линейна и каждая ее линейная часть имеет вид линейной функции с целыми коэффициентами. Такую функцию принято называть *функцией Мак-Нотона.*

Приведенное в [1] доказательство являлось неконструктивным и положило начало дальнейшим исследованиям. Известное конструктивное доказательство было получено Д. Мундичи в [3]. Его особенностью является то, что множество констант расширено до множества всех рациональных чисел из отрезка $[0,1]$. Мы предлагаем другое доказательство теоремы о функциях бесконечнозначной логики для случая, когда множество констант есть отрезок $[0,1]$. Это доказательство является также конструктивным и позволяет построить каноническую форму для функций, реализуемых формулами, аналогичную совершенной дизъюнктивной нормальной форме булевых функций.

1. Формулы и их связь с FL-функциями

Начнем с определения алгебры Лукасевича, задающей семантику бесконечнозначного (нечеткого) исчисления высказываний.

Определение 1. Алгеброй Лукасевича называется алгебра

$$\mathscr{L} = \langle [0,1]; \oplus, \otimes, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle,$$

в которой $\oplus$ и $\otimes$ — бинарные операции, $\neg$ — унарная операция такие, что

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (a+b)^*, \\ a \otimes b &= (a+b-1)^*, \\ \neg a &= 1 - a, \end{aligned}$$

где

$$x^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Множество констант алгебры $\mathscr{L}$ расширим включением всех элементов из L, а множество бинарных операций — включением четырех

производных операций:

$$
\begin{aligned}
a \vee b &= (a \otimes \neg b) \oplus b, \\
a \wedge b &= (a \oplus \neg b) \otimes b, \\
a \to b &= \neg a \oplus b, \\
a \leftrightarrow b &= (\neg a \oplus b) \otimes (\neg b \oplus a).
\end{aligned}
$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — конечный, или счетный, алфавит переменных. Всюду в этой работе в качестве формул будем рассматривать формулы, использующие переменные из X, над расширенными множествами операций $\{\oplus, \otimes, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \neg\}$ и констант алгебры $\mathscr{L}$. Для записи констант будем использовать полужирные строчные буквы латинского алфавита $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots\}$. Формулу вида $(x \otimes (x \otimes \cdots (x \otimes x) \cdots))$, в которую x входит n раз, будем сокращенно записывать x^n.

Введем понятие FL-функции, обобщающее понятие булевой функции.

Определение 2. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geqslant 0$, определенная на n-мерном кубе $[0,1]^n$ и принимающая значения из $[0,1]$, называется *FL-функцией.*

Определение 3. Будем говорить, что FL-функция f_A реализуется формулой A или, что то же самое, формула A реализует функцию f_A, если связь между ними задается следующей индуктивной процедурой:

(i) Если A — атомарная формула, т. е. $A = x_i$ или $A = \boldsymbol{a}$ и $a \in [0,1]$, то $f_A(x_i) \equiv x_i$ или $f_A \equiv a$ соответственно.

(ii) Если A, B — формулы, а f_A, f_B — реализуемые ими функции, то между формулами и FL-функциями имеются следующие соответствия:

$$
\begin{array}{ll}
\neg A \text{ реализует } 1 - f_A, & \\
(A \oplus B) \text{ реализует } (f_A + f_B)^*, & (A \otimes B) \text{ реализует } (f_A + f_B - 1)^*, \\
(A \vee B) \text{ реализует } \max(f_A, f_B), & (A \wedge B) \text{ реализует } \min(f_A, f_B), \\
(A \to B) \text{ реализует } (1 - f_A + f_B)^*, & (A \leftrightarrow B) \text{ реализует } 1 - |f_A - f_B|.
\end{array}
$$

Обозначим через **RF** множество всех FL-функций, реализуемых формулами, а через $\mathbf{RF}_n$ множество всех n-местных FL-функций, реализуемых формулами. Отметим, что элементы множества **RF** являются функциями истинности формул соответствующего исчисления в интерпретации, определяемой алгеброй Лукасевича.

Ниже мы покажем, что FL-функции, реализуемые формулами, являются кусочно линейными функциями с целыми коэффициентами. Дадим строгое определение этого класса функций.

Определение 4. Непустое множество $D \subseteq [0,1]^n$ называется *выпуклым многогранником*, если оно является множеством решений системы линейных неравенств

$$D = \{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}\},$$

где $\boldsymbol{A}$ — целочисленная матрица размера $m \times n$, $\boldsymbol{x}$ — вещественный вектор-столбец длины n, $\boldsymbol{b}$ — вещественный вектор-столбец длины m, а отношение $\leqslant$ определяется покомпонентно. Будем говорить, что выпуклый многогранник D задается парой $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \rangle$.

Пример 1. n-мерный куб (n-куб) $[0,1]^n$ является выпуклым многогранником, так как в соответствии с определением 4 он может быть задан при помощи матрицы и вектора

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n \\ -\boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}_n \\ \boldsymbol{0}_n \end{pmatrix}$$

соответственно, где $\boldsymbol{E}_n$ — единичная матрица, $\boldsymbol{1}_n$ и $\boldsymbol{0}_n$ — вектор-столбцы длины n, состоящие из единиц и нулей соответственно.

Замечание 1. Если отбросить требование целочисленности, то в силу теоремы Вейля — Минковского определение 4 выпуклого многогранника эквивалентно более известному варианту, когда выпуклый многогранник определяется как выпуклая оболочка некоторого конечного множества точек.

Определение 5. Непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n) : [0,1]^n \to [0,1]$ называется кусочно линейной (с целыми коэффициентами), если существует конечное число выпуклых многогранников $D_1, \ldots, D_r$ таких, что $\bigcup\limits_{i=1}^{r} D_i = [0,1]^n$ и $f|D_1, \ldots, f|D_r$ — линейные функции с целыми коэффициентами, т. е.

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} + d_i \text{ при } \boldsymbol{x} \in D_i,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ — вещественный вектор-столбец, $\boldsymbol{c}_i$ — целочисленный n-мерный вектор-строка, d_i — вещественное число, $1 \leqslant i \leqslant r$. Выпуклые многогранники $D_1, \ldots, D_r$ будем называть областями линейности функции f.

Пример 2. В качестве примера кусочно линейной функции рассмотрим функцию $f_\to(x, y)$, реализуемую формулой $(x \to y)$. По определению

$$f_\to(x,y) = \min(1, 1 - x + y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant y, \\ 1 - x + y & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрев два многогранника $D_1 = \{(x,y) \mid x - y \leqslant 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid -x + y \leqslant 0\}$ и две линейные функции с целыми коэффициентами

$f_1(x, y) = 1$, $f_2(x, y) = 1 - x + y$, нетрудно видеть, что $f_{\to}|D_1 = f_1$ и $f_{\to}|D_2 = f_2$.

Аналогичные рассмотрения приводят нас к следующему утверждению.

Лемма 1. *Формулы $(x \oplus y)$, $(x \otimes y)$, $(x \vee y)$, $(x \wedge y)$, $(x \to y)$, $(x \leftrightarrow y)$, $\neg x$ реализуют кусочно линейные функции.*

Обозначим через $\mathbf{PL}$ класс всех кусочно линейных функций, а через $\mathbf{PL}_n$ класс всех n-местных кусочно линейных функций. Заметим, что $\mathbf{PL}_0$ состоит из констант.

Лемма 2. *Пусть $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{PL}_n$. Тогда существуют выпуклые многогранники $D_1, \ldots, D_r$ такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{r} D_i = [0, 1]^n$ и каждое множество D_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, является областью линейности для всех функций $f_1, \ldots, f_p$.*

Доказательство. Пусть $D_1, \ldots, D_p$ — произвольная совокупность областей линейности функций $f_1, \ldots, f_p$ соответственно. Возьмем их пересечение $D = D_1 \cap \ldots \cap D_p$. Пусть $D \neq \varnothing$. Тогда область D является выпуклым многогранником, так как задается парой $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \rangle$ следующего вида:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_p \end{pmatrix},$$

где пары $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle, \ldots, \langle \boldsymbol{A}_p, \boldsymbol{b}_p \rangle$ задают выпуклые многогранники $D_1, \ldots, D_p$ соответственно.

Так как $D \subseteq D_j$ для каждого $j = 1, \ldots, p$ и D_j есть область линейности функции f_j, то D является областью линейности для всех функций $f_1, \ldots, f_p$.

Чтобы завершить доказательство леммы, возьмем объединение всех непустых пересечений многогранников $D_1, \ldots, D_p$, являющихся областями линейности функций $f_1, \ldots, f_p$ соответственно. Из определенности функций $f_1, \ldots, f_p$ следует, что указанное объединение является n-мерным кубом L^n. Лемма доказана.

В следующей теореме дается требуемая характеризация FL-функций, реализуемых формулами.

Теорема 1. *Пусть f_A — FL-функция, реализуемая формулой A. Тогда f_A является кусочно линейной, т. е. $f_A \in \mathbf{PL}$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу операций в формуле A.

1. Если A — атомарная формула, то $f_A(x) \equiv x$ или $f_A \equiv a$, $a \in [0, 1]$, и, таким образом, $f_A \in \mathbf{PL}_0 \cup \mathbf{PL}_1$.

2. Предположим, что $A \stackrel{\text{def}}{=} \neg B$ или $A \stackrel{\text{def}}{=} B \circ C$, где $\circ \in \{\oplus, \otimes, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ и $f_B, f_C \in \mathbf{PL}$. В силу леммы 1 достаточно доказать, что $1 - f_B$ и $f_B \circ f_C$ являются кусочно линейными функциями.

Докажем более общее утверждение: если $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{PL}_n$ и $g \in \mathbf{PL}_p$ при $n, p \geqslant 1$, то $g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbf{PL}_n$. Для упрощения обозначений будем использовать вектор-функцию $\boldsymbol{f}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_p(\boldsymbol{x}))^{\mathsf{T}}.$$

В силу леммы 2 существуют выпуклый многогранник D_1, являющийся областью линейности всех функций $f_1, \ldots, f_p$, и выпуклый многогранник D_2, являющийся областью линейности функции g. Это означает, что существуют целочисленные матрицы $\boldsymbol{C}_1$ размера $p \times n$ и $\boldsymbol{C}_2$ размера $1 \times p$, вещественный вектор $\boldsymbol{d}_1$ длины p и вещественное число d_2 такие, что

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_1 \text{ при } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}} \in D_1,$$
$$g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{y} + d_2 \text{ при } \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_p)^{\mathsf{T}} \in D_2.$$

Положим $D = D_1 \cap \boldsymbol{f}^{-1}(D_2)$. Нетрудно проверить, что D — выпуклый многогранник. В самом деле, пусть пары $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle$ и $\langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ задают многогранники D_1 и D_2 соответственно. Тогда D задается парой $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \rangle$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{C}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{d}_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $D \neq \varnothing$ и $\boldsymbol{x} \in D$. Тогда

$$g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_1) = \boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_1) + d_2 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + d,$$

где $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{C}_1$, $d = \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{d}_1 + d_2$.

Наконец,

$$\bigcup_{(D_1, D_2)} \left(D_1 \cap f^{-1}(D_2)\right) = [0,1]^n \cap f^{-1}([0,1]^p) = [0,1]^n,$$

где объединение берется по всем возможным парам (D_1, D_2). Таким образом, $g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ есть кусочно линейная функция. Теорема доказана.

Следствие 1. *Класс FL-функций, реализуемых формулами, содержится в классе кусочно линейных функций, т. е.* $\mathbf{RF} \subseteq \mathbf{PL}$.

2. Кусочно линейные функции и их реализация формулами

Докажем утверждение, обратное теореме 1, что $\mathbf{PL} \subseteq \mathbf{RF}$, т. е. всякая кусочно линейная функция может быть реализована формулой. Как

мы уже отмечали, задача состоит в том, чтобы дать конструктивное доказательство этого факта, т. е. предъявить конкретный способ реализации произвольной кусочно линейной функции формулой бесконечнозначного исчисления высказываний. Эту реализацию можно построить, если следовать доказательствам приводимых ниже утверждений. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, как можно реализовать формулами «усеченные» линейные функции вида $(\boldsymbol{cx} + d)^*$ («линейные куски» кусочно линейной функции), а затем как «склеить» полученные формулы, чтобы получить искомую формулу для кусочно линейной функции. Начнем со второго этапа.

Пусть n — натуральное число. Определим класс $\mathbf{UL}(n)$, элементами которого являются множества единичного уровня n-местных FL-функций, реализуемых формулами. Формально $E \in \mathbf{UL}(n)$ тогда и только тогда, когда существует функция $g \in \mathbf{RF}_n$ такая, что

$$E = \{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n \mid g(\boldsymbol{x}) = 1\}.$$

Для каждого $E \in \mathbf{UL}(n)$ определим $\mathbf{RF}_E$ как множество всех n-местных FL-функций, каждая из которых совпадает на E с некоторой функцией, реализуемой формулой. Формально $f \in \mathbf{RF}_E$ тогда и только тогда, когда существует функция $h \in \mathbf{RF}_n$ такая, что $g(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \in E$. Очевидно, что $\mathbf{RF}_{[0,1]^n} = \mathbf{RF}_n$.

Лемма 3.

(i) *Пусть* $E_1, E_2 \in \mathbf{UL}(n)$ *и* $f \in \mathbf{RF}_{E_1} \cap \mathbf{RF}_{E_2}$. *Тогда* $f \in \mathbf{RF}_{E_1 \cup E_2}$, *т. е.* $\mathbf{RF}_{E_1} \cap \mathbf{RF}_{E_2} = \mathbf{RF}_{E_1 \cup E_2}$.

(ii) *Пусть* $E_1, \ldots, E_r \in \mathbf{UL}(n)$ *и* $f \in \mathbf{RF}_{E_1} \cap \cdots \cap \mathbf{RF}_{E_r}$. *Кроме того, пусть* $\bigcup\limits_{i=1}^{r} E_i = [0,1]^n$. *Тогда* $f \in \mathbf{RF}_n$.

Доказательство. (i) Поскольку $f \in \mathbf{RF}_{E_1} \cap \mathbf{RF}_{E_2}$, то по определению существуют $h_1, h_2 \in \mathbf{RF}_n$ такие, что $f|E_1 = h_1|E_1$, $f|E_2 = h_2|E_2$. Кроме того, так как $E_1, E_2 \in \mathbf{UL}(n)$, то существуют $g_1, g_2 \in \mathbf{RF}_n$ такие, что $g_1|E_1 = 1$ и $g_2|E_2 = 1$.

Определим функцию $h^{p,q} : [0,1]^n \to [0,1]$ следующим образом:

$$h^{p,q}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (h_1(\boldsymbol{x}) \otimes (g_1(\boldsymbol{x}))^p) \vee (h_2(\boldsymbol{x}) \otimes (g_2(\boldsymbol{x}))^q), \tag{1}$$

где p и q — натуральные числа.

Очевидно, что $h^{p,q} \in \mathbf{RF}_n$. Докажем существование таких натуральных чисел $\bar{p}, \bar{q}$, что $f|(E_1 \cup E_2) = h^{\bar{p},\bar{q}}|(E_1 \cup E_2)$. Таким образом, формула (1) «склеивает» функции h_1 и h_2 в одну функцию $h^{\bar{p},\bar{q}}$ так, что $h^{\bar{p},\bar{q}}|E_1 = h_1|E_1$, $h^{\bar{p},\bar{q}}|E_2 = h_2|E_2$.

Из теоремы 1 следует, что $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbf{PL}_n$. В силу леммы 2 существуют выпуклые многогранники $D_1, \ldots, D_r$ $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} D_i = [0,1]^n\right)$,

задаваемые парами $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{b}_1\rangle, \ldots, \langle \boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{b}_r\rangle$, которые являются областями линейности функций g_1, g_2, h_1, h_2. Отсюда, в частности, следует, что $g_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} + d_i$ при $\boldsymbol{x} \in D_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Теперь рассмотрим новые выпуклые многогранники $D'_1, \ldots, D'_r$, задаваемые матрицами и векторами

$$\boldsymbol{A}'_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ -\boldsymbol{c}_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}'_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i - 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Нетрудно убедиться в том, что $D'_i = D_i \cap E_1$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Отсюда следует, что каждый многогранник $D'_1, \ldots, D'_r$ является областью линейности всех функций g_1, g_2, h_1, h_2. Кроме того, $\bigcup\limits_{i=1}^{r} D'_i = E_1$.

Пусть $D'_i \neq \varnothing$. Сначала покажем, что существует натуральное число q_i такое, что

$$h_2(\boldsymbol{x}) \otimes (g_2(\boldsymbol{x}))^{q_i} \leqslant h_1(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in D'_i. \tag{2}$$

Для этого оценим разность между правой и левой частями (2):

$$h_1(\boldsymbol{x}) - h_2(\boldsymbol{x}) \otimes (g_2(\boldsymbol{x}))^{q_i} = h_1(\boldsymbol{x}) - (h_2(\boldsymbol{x}) - q_i(1 - g_2(\boldsymbol{x})))^*.$$

Обозначим через $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ правую часть (3), где $\boldsymbol{x} \in D'_i$. Если $\boldsymbol{x} \in D'_i \cap E_2$, то $h_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) = h_2(\boldsymbol{x})$ и $g_2(\boldsymbol{x}) = 1$, откуда $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0$. С другой стороны, если $\boldsymbol{x} \in D'_i \setminus E_2$, то $1 - g_2(\boldsymbol{x}) > 0$ и q_i может быть выбрано столь большим, чтобы выполнялось неравенство $\varphi_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$.

Теперь сделаем выбор q_i независимым от $\boldsymbol{x}$. Известно, что всякая линейная функция на выпуклом многограннике достигает минимума в одной из его вершин. Пусть $\boldsymbol{x}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{is}$ — вершины многогранника D'_i. Выберем q_i столь большим, что $\varphi_i(\boldsymbol{x}_{ij}) \geqslant 0$ при всех $j = 1, \ldots, s$. Ниже мы будем использовать $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ именно с таким q_i.

По определению функция $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ является линейной на D'_i, и, следовательно, ее минимальное значение на D'_i достигается в какой-то из вершин $\boldsymbol{x}_{ij}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Поскольку $\varphi_i(\boldsymbol{x}_{ij}) \geqslant 0$, то $\varphi_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in D'_i$. Отсюда следует (2).

Пусть $\bar{q} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} q_i$, где q_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, удовлетворяют (2). Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{r} D'_i = E_1$, то для всех $\boldsymbol{x} \in E_1$ и для любого натурального числа p имеем

$$\begin{aligned} h^{p,\bar{q}}(\boldsymbol{x}) &= (h_1(\boldsymbol{x}) \otimes (g_1(\boldsymbol{x}))^p) \vee (h_2(\boldsymbol{x}) \otimes (g_2(\boldsymbol{x}))^{\bar{q}}) \\ &= (h_1(\boldsymbol{x}) \otimes 1) \vee (h_2(\boldsymbol{x}) \otimes (g_2(x))^{\bar{q}}) = h_1(\boldsymbol{x}) \vee (h_2(\boldsymbol{x}) \otimes (g_2(\boldsymbol{x}))^{\bar{q}}) \\ &= h_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что существует такое натуральное число $\bar{p}$, что $h^{\bar{p},\bar{q}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in E_2$. Таким образом, $f|(E_1 \cup E_2) = h^{\bar{p},\bar{q}}|(E_1 \cup E_2)$. Следовательно, $f \in \mathbf{RF}_{E_1 \cup E_2}$.

(ii) Используя утверждение (i), утверждение (ii) можно доказать индукцией по r. Лемма 3 доказана.

Следующие две леммы показывают, как можно реализовать формулами «усеченные» линейные функции вида $(\boldsymbol{cx}+d)^*$. Сначала рассмотрим случай неотрицательных целых коэффициентов, а затем общий случай.

Пусть n, k — целые неотрицательные числа, $n \neq 0$. Определим FL-функцию $s_n^k : [0,1]^n \to [0,1]$ следующим образом:

$$s_n^k(\boldsymbol{x}) = s_n^k(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - k \right)^*.$$

Нетрудно видеть, что $s_2^0(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ и $s_2^1(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2$.

Лемма 4. *Каждая функция s_n^k, $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 0$, может быть реализована формулой, т. е. $s_n^k \in \mathbf{RF}_n$.*

Доказательство. Используем индукцию по n.

1. $s_1^0 = x_1$, $s_1^k \equiv 0$, $k \geqslant 1$. В этом случае $s_1^k \in \mathbf{RF}_1$ для всех $k \geqslant 0$.

2. Пусть $s_{n-1}^k \in \mathbf{RF}_{n-1}$ для всех $k \geqslant 0$. Докажем, что $s_n^k \in \mathbf{RF}_n$, $k \geqslant 0$. По определению имеем $s_n^0(\boldsymbol{x}) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, откуда $s_n^0 \in \mathbf{RF}_n$. Пусть теперь $k \geqslant 1$. Введем обозначения $\boldsymbol{x}^n = (x_1, \dots, x_n)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{x}^{n-1} = (x_1, \dots, x_{n-1})^\mathsf{T}$. Тогда

$$s_n^k(\boldsymbol{x}^n) = \begin{cases} (x_n + s_{n-1}^{k-1}(\boldsymbol{x}^{n-1}) - 1)^* = x_n \otimes s_{n-1}^{k-1}(\boldsymbol{x}^{n-1}), & \text{если } \neg s_{n-1}^k(\boldsymbol{x}^{n-1}) = 1, \\ (x_n + s_{n-1}^k(\boldsymbol{x}^{n-1}))^* = x_n \oplus s_{n-1}^k(\boldsymbol{x}^{n-1}), & \text{если } s_{n-1}^{k-1}(\boldsymbol{x}^{n-1}) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Используя предположение индукции и лемму 3, нетрудно видеть, что $s_n^k \in \mathbf{RF}_n$. Лемма 4 доказана.

Замечание 2. Применяя «склеивающую» формулу (1) к (3), можно получить следующую рекуррентную формулу для s_n^k:

$$\begin{aligned} s_n^k(\boldsymbol{x}^n) = (x_n \otimes s_{n-1}^{k-1}(\boldsymbol{x}^{n-1}) \otimes (\neg s_{n-1}^k(\boldsymbol{x}^{n-1}))^p) \\ \vee ((x_n \oplus s_{n-1}^k(\boldsymbol{x}^{n-1})) \otimes (s_{n-1}^{k-1}(\boldsymbol{x}^{n-1}))^q). \end{aligned} \tag{4}$$

Лемма 5. *Пусть $f : [0,1]^n \to [0,1]$ — усеченная линейная функция, определяемая формулой $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{cx} + d)^*$, где $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)$ — целочисленный вектор, d — вещественное число. Тогда $f \in \mathbf{RF}_n$.*

Доказательство. Положим

$$x_i^{c_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } c_i \geqslant 0, \\ \neg x_i, & \text{если } c_i < 0, \end{cases} \qquad k = -\left\lfloor d + \sum_{c_i<0} c_i \right\rfloor, \qquad d' = \left\{ d + \sum_{c_i<0} c_i \right\},$$

где $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Тогда выражение, определяющее $f(\boldsymbol{x})$, может быть преобразовано к виду

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i| x_i^{c_i} + d' - k \right)^{*}. \tag{5}$$

Если $k < 0$, то $f(\boldsymbol{x}) \equiv 1$ и, следовательно, $f \in \mathbf{RF}$. В противном случае положим $l = \sum_{i=1}^{n} |c_i| + 1$. Перепишем выражение (5) для $f(\boldsymbol{x})$, используя функцию s_l^k:

$$f(\boldsymbol{x}) = s_l^k(\underbrace{x_1^{c_1}, \ldots, x_1^{c_1}}_{|c_1| \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{x_n^{c_n}, \ldots, x_n^{c_n}}_{|c_n| \text{ раз}}, d'). \tag{6}$$

Теперь, применяя лемму 4 к правой части (6), получаем $f \in \mathbf{RF}_n$. Лемма 5 доказана.

Основываясь на доказанных выше леммах, докажем теорему, составляющую основной результат данной работы.

Теорема 2. *Всякая кусочно линейная функция может быть реализована формулой.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — кусочно линейная функция. По определению существует выпуклый многогранник $D \subseteq [0,1]^n$, задаваемый такой парой $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \rangle$, что $f|D$ есть линейная функция. Покажем, что $f \in \mathbf{RF}_D$, т. е. $D \in \mathbf{UL}(n)$ и существует функция $h \in \mathbf{RF}_n$ такая, что $f|D = h|D$. Учитывая лемму 5, достаточно доказать, что $D \in \mathbf{UL}(n)$.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — строки матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$. Определим функцию $g : [0,1]^n \to [0,1]$ следующим образом:

$$g(\boldsymbol{x}) = \neg(\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{x} - b_1)^* \wedge \cdots \wedge \neg(\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{x} - b_m)^*. \tag{7}$$

В силу леммы 5 имеем $g \in \mathbf{RF}_n$. Так как $D = \{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n \mid g(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}\}$, то $D \in \mathbf{UL}(n)$ и, следовательно, $f \in \mathbf{RF}_D$. Поскольку D — произвольная область линейности кусочно линейной функции f, то, применяя утверждение (ii) леммы 3, получаем $f \in \mathbf{RF}_n$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2 (теорема Мак-Нотона). *Класс FL-функций, реализуемых формулами бесконечнозначного исчисления высказываний, совпадает с классом кусочно линейных функций с целыми коэффициентами, т. е.* $\mathbf{RF} = \mathbf{PL}$.

Утверждение непосредственно следует из теорем 1 и 2.

В качестве интересного следствия из теоремы 2 и предшествующих лемм можно получить единое представление произвольной кусочно линейной функции в виде формулы. Эта формула может рассматриваться как *каноническая форма кусочно линейной функции.*

Следствие 3. *Пусть $f \in \mathbf{PL}_n$ — кусочно линейная функция с такими областями линейности $D_1, \ldots, D_r$, что $\bigcup_{i=1}^{r} D_i = [0,1]^n$, причем $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} + d_i$ при $\boldsymbol{x} \in D_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Далее, пусть выпуклые многогранники $D_1, \ldots, D_r$ задаются парами $\langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle, \ldots, \langle \boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{b}_r \rangle$ соответственно, где $\boldsymbol{a}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{im_i}$ — строки матрицы $\boldsymbol{A}_i$, а $b_{i1}, \ldots, b_{im_i}$ — элементы вектора $\boldsymbol{b}_i$. Тогда функция $f(\boldsymbol{x})$ может быть представлена в следующей канонической форме:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{i=1}^{r} \left((\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x} + d_i)^* \otimes \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \neg(\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{x} - b_{ij})^* \right)^{p_i} \right), \tag{8}$$

где p_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, — некоторые натуральные числа.

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 2. Применим $n-1$ раз «склеивающую» формулу (1), используя (7) для представления областей линейности функции f как множеств единичного уровня функций из $\mathbf{RF}$. В результате получим (8).

Заметим, что выражение (8) не является формулой бесконечнозначного исчисления высказываний, но его нетрудно представить в виде такой формулы, если следовать доказательствам теоремы 2 и лемм 3–5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мак-Нотон Р.** Теорема о бесконечнозначной логике высказываний // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1961. Вып. 3. С. 59–78.
2. **Hajek P.** Metamathematics of fuzzy logic. Dordrecht: Kluwer, 1998.
3. **Mundici D.** A constructive proof of McNaughton's theorem in infinite-valued logic // J. Symbolic Logic. 1994. V. 59, N 4. P. 596–602.

Адрес авторов:

Московская государственная
академия приборостроения
и информатики,
ул. Стромынка, 20,
107846 Москва, Россия.
E-mail: atonis00@mtu-net.ru,
irina.perfilieva@osu.cz

Статья поступила
16 июня 1997 г.,
переработанный вариант —
5 июля 1999 г.