ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2000. Серия 1. Том 7, № 3, 6-16

УДК 519.174

РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ И ВЕРШИН ОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг

Приводится новый простой вывод формулы Пяткина [6] для минимального числа цветов, необходимых для p-раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа. Изучается тотальная p-раскраска, при которой инциденторы p-раскрашены, а вершины раскрашены правильно; в случае $p = 0$ дается точная формула для минимального числа цветов.

1. Основные понятия

Под мультиграфом $G = (V, E)$, если не оговорено противное, понимается конечный ориентированный мультиграф [3, 4] с непустым множеством вершин $V = V(G)$ и непустым множеством дуг $E = E(G)$. Через $s(V)$, $s^+(V)$ и $s^-(V)$ обозначаются соответственно степень, полустепень исхода и полустепень захода вершины $v \in V$. Максимальные значения этих величин для мультиграфа G обозначаются соответственно через $\sigma(G)$, $\sigma^+(G)$ и $\sigma^-(G)$.

Если дуга e инцидентна вершине v, то пара (v, e) называется инцидентором, *примыкающим* к вершине v (или содержащим вершину v). Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначается через $I = I(G)$. Инцидентор (v, e) называется *начальным* и обозначается через $i_1(e)$, если дуга e исходит из вершины v; если же дуга e заходит в вершину v, то инцидентор (v, e) называется *конечным* и обозначается через $i_2(e)$. Множества начальных и конечных инциденторов мультиграфа G обозначаются соответственно через $I_1 = I_1(G)$ и $I_2 = I_2(G)$. Два инцидентора называются *однотипными*, если оба они принадлежат либо I_1, либо I_2; в противном случае инциденторы называются *разнотипными*. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной и той же вершине.

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество этих чисел обозначим через C.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект INTAS–OPEN–97–1001).

Определение 1. Раскраской φ всех инциденторов мультиграфа G называется однозначное отображение $I(G)$ в C. Величина $h(e,\varphi) = \varphi(i_1(e)) + \varphi(i_2(e))$ называется *высотой* дуги $e \in E(G)$ при раскраске φ, а величина $\eta(\varphi) = \max_{e\in E(G)} h(e,\varphi)$ называется *высотой раскраски* φ.

Определение 2. Раскраска инциденторов мультиграфа называется *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены различно. Раскраска инциденторов называется *полуправильной*, если любые два смежных однотипных инцидентора окрашены различно.

Замечание 1. В работе [2] правильная раскраска инциденторов называлась примитивной.

Пусть p — целое неотрицательное число.

Определение 3. Будем говорить, что при раскраске φ всех инциденторов мультиграфа G инциденторы дуги $e \in E(G)$ раскрашены с шагом p, если $\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e)) \geqslant p$.

Определение 4. Раскраску φ всех инциденторов мультиграфа назовём p-раскраской, если φ — правильная раскраска, при которой инциденторы любой дуги раскрашены с шагом p. Наименьшее число цветов, необходимое для p-раскраски инциденторов мультиграфа G, назовем *инциденторным p-шаговым хроматическим числом* мультиграфа G и обозначим через $\chi I(p,G)$.

Определение 5. Пусть φ — раскраска инциденторов и вершин мультиграфа G, т. е. однозначное отображение множества $I(G) \cup V(G)$ в C. Раскраска φ называется *тотальной p-раскраской мультиграфа* G, если выполняются следующие условия:

1) φ является p-раскраской инциденторов;

2) φ является правильной раскраской вершин (т. е. смежные вершины при раскраске φ окрашены в различные цвета);

3) любая вершина окрашена в цвет, отличный от цветов всех инциденторов, которые к ней примыкают.

Наименьшее число цветов, необходимых для тотальной p-раскраски, назовем *тотальным p-шаговым хроматическим числом* мультиграфа G и обозначим через $\chi\tau(p,G)$.

2. Раскраска инциденторов

Вопрос о вычислении $\chi I(p,G)$ решен исчерпывающим образом. При $p = 0$ это сделано в [5], при $p = 1$ — в [8]. В [6] А. В. Пяткин получил формулу для произвольного p; однако приведенное в [6] доказательство общей формулы достаточно сложно и существенно опирается на случаи $p = 0$ и $p = 1$. Формула Пяткина является содержанием теоремы 1.

Мы даем её простое доказательство, которое строится независимо от упомянутых результатов.

Предварительно докажем три леммы.

Лемма 1. *Пусть φ — полуправильная раскраска инциденторов мультиграфа G. Тогда существует такая полуправильная раскраска инциденторов ψ, что*

a) $\psi(i) \leqslant \varphi(i)$ *для любого инцидентора* $i \in I(G)$;

b) $\psi(i') + \psi(i'') \leqslant \sigma(G)$ *для любых двух смежных разнотипных инциденторов* i' *и* i''.

Доказательство. Раскраску ψ определим следующим образом. Пусть $i \in I(G)$ — произвольный инцидентор. Будем считать, что $\psi(i)$ равно увеличенному на единицу числу однотипных смежных с i инциденторов, цвета которых при раскраске φ меньше $\varphi(i)$. То, что полуправильная раскраска ψ обладает свойством a), очевидно. Далее, если i — инцидентор, примыкающий к вершине v, то $\psi(i) \leqslant s^+(v)$ в случае, когда i — начальный инцидентор, и $\psi(i) \leqslant s^-(v)$, если i — конечный инцидентор. Поэтому если i' и i'' — разнотипные инциденторы, примыкающие к вершине v, то $\psi(i') + \psi(i'') \leqslant s^+(v) + s^-(v) \leqslant \sigma(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого мультиграфа G существует такая полуправильная раскраска φ его инциденторов, использующая $M = \max\{\sigma^+(G), \sigma^-(G)\}$ цветов, что $\eta(\varphi) = M + 1$.*

Доказательство. Пусть $v(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Обозначим через H двудольный неориентированный мультиграф с множеством вершин $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ первой доли, множеством вершин $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ второй доли и множеством ребер $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, в котором идентичность ребер и вершин определяется так: ребро a_t инцидентно вершинам x_q и x_r тогда и только тогда, когда в мультиграфе G дуга e_t исходит из вершины v_q и заходит в вершину v_r $(1 \leqslant t \leqslant m; 1 \leqslant q, r \leqslant n)$. Очевидно, что $\sigma(H) = M$. По теореме Кёнига [3, 4] ребра мультиграфа H можно раскрасить цветами $1, 2, \ldots, M$ так, чтобы смежные ребра получили различные цвета. Пусть ξ — такая раскраска ребер мультиграфа H. Раскраску φ всех инциденторов мультиграфа G определим так: для дуги e_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ положим $\varphi(i_1(e_k)) = \xi(a_k)$, $\varphi(i_2(e_k)) = M + 1 - \xi(a_k)$. Очевидно, что $\eta(\varphi) = M + 1$. Кроме того, φ — полуправильная раскраска инциденторов мультиграфа G. Действительно, если однотипные инциденторы произвольных дуг e_f и e_g мультиграфа G смежны, то ребра a_f и a_g мультиграфа H смежны и $\xi(a_f) \neq \xi(a_g)$, $M+1-\xi(a_f) \neq M+1-\xi(a_g)$. Поэтому рассматриваемые инциденторы при раскраске φ получают различные цвета независимо от того, являются они оба начальными или конечными. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть φ — полуправильная раскраска инциденторов мультиграфа G с $\eta(\varphi) \leqslant \sigma(G) + 1$. Тогда существует правильная раскраска μ всех инциденторов мультиграфа G с использованием N цветов, где $N \geqslant \sigma(G)$, при которой для любой дуги $e \in E(G)$ выполняется неравенство*

$$\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant N + 1 - h(e, \varphi). \tag{1}$$

Доказательство. По лемме 1 существует полуправильная раскраска ψ всех инциденторов мультиграфа G, обладающая свойствами a) и b). Отправляясь от раскраски ψ, используем следующую раскраску μ всех инциденторов мультиграфа G с помощью N цветов:

$$\mu(i) = \begin{cases} \psi(i), & \text{если } i \in I_1(G); \\ N + 1 - \psi(i), & \text{если } i \in I_2(G). \end{cases}$$

Покажем, что μ — правильная раскраска инциденторов. Пусть i' и i'' — смежные инциденторы. Если они являются однотипными, то $\psi(i') \neq \psi(i'')$, ибо ψ — полуправильная раскраска инциденторов; следовательно, $\mu(i') \neq \mu(i'')$. Если же i' и i'' — разнотипные инциденторы, то по свойству b) леммы 1 имеем: $\psi(i') + \psi(i'') \leqslant \sigma(G) < N + 1$. Следовательно, $\psi(i') \neq N + 1 - \psi(i'')$ и $\psi(i'') \neq N + 1 - \psi(i')$. Таким образом, действительно μ — правильная раскраска инциденторов мультиграфа G. Пусть e — произвольная дуга из $E(G)$. Тогда $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) = N + 1 - \psi(i_2(e)) - \psi(i_1(e)) = N + 1 - h(e, \psi)$. Но в силу утверждения a) леммы 1 справедливо неравенство $h(e, \psi) \leqslant h(e, \varphi)$. Поэтому $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant N + 1 - h(e, \varphi)$. Лемма доказана.

Теорема 1 (формула Пяткина [6]). *Для любого мультиграфа G справедливо равенство*

$$\chi I(p, G) = \max\{\sigma(G), \sigma^+(G) + p, \sigma^-(G) + p\}. \tag{2}$$

Доказательство. По лемме 2 существует такая полуправильная раскраска φ всех инциденторов мультиграфа G, что $\eta(\varphi) = M + 1$, где $M = \max\{\sigma^+(G)+p, \sigma^-(G)+p\}$. Пусть $N = \max\{\sigma(G), \sigma^+(G)+p, \sigma^-(G)+p\}$. По лемме 3 существует такая правильная раскраска μ всех инциденторов мультиграфа G в N цветов, что $\mu(i_2(e))-\mu(i_1(e)) \geqslant N+1-h(e,\varphi) \geqslant N + 1 - \eta(\varphi) = N - M \geqslant p$. Значит, μ является p-раскраской инциденторов мультиграфа G с помощью N цветов. Следовательно, $\chi I(p, G) \leqslant N$. Неравенство же $\chi I(p, G) \geqslant N$ очевидно. Теорема доказана.

3. Тотальная раскраска

В работе [2] рассматривалась задача тотальной p-раскраски мультиграфа в предписанные цвета, здесь же мы изучаем только свободную тотальную раскраску.

Теорема 2. *Для любого мультиграфа G справедливо неравенство*

$$\chi\tau(p,G) \leqslant \chi I(p+1,G)+1. \tag{3}$$

Доказательство. Построим $(p+1)$-раскраску μ инциденторов мультиграфа G с использованием $\chi I(p+1,G)$ цветов и правильную раскраску λ вершин мультиграфа G с использованием $\chi I(p+1,G)+1$ цветов; последнее можно сделать, так как $\chi I(p+1,G)+1 \geqslant \sigma(G)+1$. После этого построим тотальную раскраску φ так. Пусть $i \in I_2(G)$ — произвольный инцидентор, $v \in V(G)$ — вершина, к которой он примыкает. Полагаем

$$\varphi(i) = \begin{cases} \mu(i)+1, & \text{если } \mu(i) \geqslant \lambda(v); \\ \mu(i) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того, полагаем $\varphi(v) = \lambda(v)$ для любой вершины $v \in V(G)$.

Покажем, что φ — тотальная p-раскраска мультиграфа G. Из определения 5 следует, что для этого достаточно убедиться в том, что при раскраске φ инциденторы любой дуги раскрашены с шагом p. Пусть $e \in E(G)$ — произвольная дуга. Так как μ является $(p+1)$-раскраской инциденторов, то $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant p+1$. Но $\varphi(i_2(e)) \geqslant \mu(i_2(e))$, а $\varphi(i_1(e)) \leqslant \mu(i_1(e))+1$. Поэтому $\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e)) \geqslant \mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) - 1 \geqslant p$. Теорема доказана.

По формуле Пяткина имеем $\chi I(p+1,G) \leqslant \chi I(p,G)+1$. Учитывая еще очевидное неравенство $\chi\tau(p,G) \geqslant \chi I(p,G)$, получаем

Следствие 1. *Пусть G — мультиграф. Тогда*

$$\chi I(p,G) \leqslant \chi\tau(p,G) \leqslant \chi I(p,G)+2. \tag{4}$$

Замечание 2. Близкая к рассматриваемой задаче — задача тотальной раскраски вершин и ребер неориентированного мультиграфа изучалась достаточно интенсивно. Если обозначить через $\chi'(G)$ и $\chi''(G)$ соответственно реберное и тотальное хроматическое число мультиграфа G, то ясно, что $\chi'(G) \leqslant \chi''(G)$. Предполагается, что $\chi''(G) \leqslant \chi'(G)+2$. Однако до сих пор эта гипотеза не подтверждена и не опровергнута [7].

При $p=0$ тотальное p-шаговое хроматическое число мультиграфа можно вычислить точно.

Теорема 3. *Для любого мультиграфа G справедливо равенство*

$$\chi\tau(0,G) = \sigma(G)+1. \tag{5}$$

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $G=(V,E)$ — такой мультиграф, что $\max\{\sigma^+(G); \sigma^-(G)\} = \sigma(G)$. Пусть $B_1 = \{v \in V / s^+(v) = \sigma(G)\}$, $B_2 = \{v \in V / s^-(v) =$*

$\sigma(G)\}$. Тогда существует такая полуправильная раскраска φ всех инциденторов мультиграфа G высоты $\eta(\varphi) = \sigma(G) + 1$, что высота каждой дуги, не инцидентной ни одной вершине множества $B_1 \cup B_2$, не превосходит $\sigma(G)$.

Доказательство. Обозначим через D подграф мультиграфа G, порожденный вершинами из $B_1 \cup B_2$. Так как вершины каждого множества B_k $(k = 1, 2)$ попарно несмежны, то D является двудольным мультиграфом, в котором B_k есть множество вершин k-й доли. (Одно из множеств B_1 или B_2 может оказаться пустым; мы не будем загромождать доказательство леммы очевидными оговорками в ситуациях, когда какое-либо из определяемых в ходе доказательства множеств может оказаться пустым.) Пусть Q — наибольшее паросочетание в мультиграфе D. Обозначим через R_k подмножество вершин из B_k, не насыщенных этим паросочетанием $(k = 1, 2)$. Для каждой вершины множества $R_1 \cup R_2$ выберем по одной дуге, инцидентной этой вершине. Объединение множества выбранных таким образом дуг с множеством Q обозначим через E_1. Очевидно, что $E_1 \neq \varnothing$. Удалим из G дуги множества E_1. Получится такой мультиграф H, что $\max\{\sigma^+(H); \sigma^-(H)\} < \sigma(G)$. По лемме 2 существует полуправильная раскраска α инциденторов мультиграфа H с $\eta(\alpha) \leqslant \sigma(G)$.

Приступим к построению полуправильной раскраски φ всех инциденторов мультиграфа G. Простую цепь (без самопересечений), состоящую из дуг мультиграфа D, в которой дуги попеременно то принадлежат, то не принадлежат паросочетанию Q, назовем чередующейся цепью. Знаком "+" пометим те вершины множества $B_к$, которые достижимы чередующейся цепью хотя бы из одной вершины множества R_k $(k = 1, 2)$. Если после этого в множестве Q окажутся дуги, оба конца которых не получили знака "+", то знаком "+" пометим те концы этих дуг, которые принадлежат множеству B_1. Так как Q — наибольшее паросочетание мультиграфа D, то по лемме Бержа [3, 4] в D нет чередующейся цепи, соединяющей вершину из R_1 с вершиной из R_2. Поэтому в D не существует ни одной дуги, оба конца которой помечены знаком "+". При этом каждой вершине, помеченной знаком "+", инцидентно не более одной дуги множества E_1.

Определим раскраску φ. Инциденторы дуг множества E_1, примыкающие к вершинам, помеченным знаком "+", окрашиваем в цвет 1, увеличивая при этом на 1 цвета (при раскраске α) смежных с ними однотипных инциденторов дуг из множества $E \backslash E_1$. Все остальные инциденторы дуг из $E \backslash E_1$ при раскраске φ получают тот же цвет, что и при раскраске α. Наконец, инциденторы дуг множества E_1, примыкающие к вершинам, не помеченным знаком "+", в произвольном порядке

окрашиваем в наименьшие цвета, отличные от цветов уже окрашенных смежных с ними однотипных инциденторов. Легко видеть, что φ — полуправильная раскраска инциденторов мультиграфа G. При этом $h(e,\varphi) = h(e,\alpha) \leqslant \sigma(G)$, если дуга e не инцидентна ни одной вершине множества $B_1 \cup B_2$. Если $e \in E_1$, то $h(e,\varphi) \leqslant \sigma(G)+1$. Если же $e \in E \backslash E_1$ и дуга e инцидентна хотя бы одной вершине из $B_1 \cup B_2$, то $h(e,\varphi) \leqslant h(e,\alpha)+1 \leqslant \sigma(G)+1$. Осталось показать, что $\eta(\varphi) = \sigma(G)+1$. Неравенство $\eta(\varphi) \leqslant \sigma(G)+1$ уже доказано. Неравенство же $\eta(\varphi) \geqslant \sigma(G)+1$ следует из того, что $\max\{\sigma^+(G); \sigma^- G)\} = \sigma(G)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, что $\chi\tau(0,G) \geqslant \sigma(G)+1$. Нужно доказать обратное неравенство.

Если $\max\{\sigma^+(G); \sigma^-(G)\} < \sigma(G)$, то по формуле (2) имеем $\chi I(1,G) \leqslant \sigma(G)$, а из формулы (3) следует, что $\chi\tau(0,G) \leqslant \chi I(1,G)+1$, откуда $\chi\tau(0,G) \leqslant \sigma(G)+1$.

Пусть теперь $\max\{\sigma^+(G); \sigma^-(G)\} = \sigma(G)$. Построим полуправильную раскраску φ всех инциденторов мультиграфа G, обладающую свойствами, о которых говорится в лемме 4. Затем, используя $N = \sigma(G)$ цветов, построим правильную раскраску μ всех инциденторов мультиграфа G, при которой для любой дуги $e \in E(G)$ выполняется неравенство (1) леммы 3. Тогда если дуга e не инцидентна ни одной вершине из множества $B_1 \cup B_2$, то $h(e,\varphi) \leqslant \sigma(G)$ по лемме 4, а из леммы 3 следует, что $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant N+1-\sigma(G) = 1$. Если же дуга e инцидентна хотя бы одной вершине множества $B_1 \cup B_2$, то $h(e,\varphi) \leqslant \sigma(G)+1$ и $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant 0$.

Таким образом, при раскраске μ инциденторы тех дуг, которые инцидентны хотя бы одной вершине из множества $B_1 \cup B_2$, раскрашены с шагом 0, инциденторы остальных дуг — с шагом 1.

Приступим к построению тотальной 0-раскраски γ мультиграфа G. Начнём с ситуации, когда имеется уже указанная раскраска μ всех инциденторов. Множество цветов j, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant j \leqslant \sigma(G)+1$, обозначим через F. Окрашивая последовательно вершины мультиграфа G в цвета из множества F, будем указывать перекраску (если есть необходимость) инциденторов, примыкающих к раскрашиваемой вершине. Процедура состоит из следующих этапов.

1. Все вершины из B_1 окрашиваем в цвет $(\sigma(G)+1)$; примыкающие к ним инциденторы не перекрашиваем.

2. Все вершины из B_2 окрашиваем в цвет 1; цвета всех примыкающих к ним инциденторов увеличиваем на 1.

3. Поочередно рассматриваем вершины из $V(G)\backslash(B_1 \cup B_2)$. Каждую очередную вершину v окрашиваем в цвет $k \in F$, отличный от цветов уже окрашенных, смежных с ней вершин; для инциденторов i, примыкающих к вершине v, полагаем

$$\gamma(i) = \begin{cases} \mu(i), & \text{если } \mu(i) < k; \\ \mu(i) + 1, & \text{если } \mu(i) \geqslant k. \end{cases}$$

В результате получим раскраску γ всех вершин и инциденторов мультиграфа G. Убедимся в том, что γ — тотальная 0-раскраска. Из определения 5 следует, что для этого достаточно показать, что для любой дуги $e \in E(G)$ выполняется неравенство

$$\gamma(i_2(e)) - \gamma(i_1(e)) \geqslant 0. \tag{6}$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Дуга e инцидентна вершине из множества B_1. Тогда $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant 0$. Но $\gamma(i_1(e)) = \mu(i_1(e))$, $\gamma(i_2(e)) \geqslant \mu(i_2(e))$. Отсюда следует (6).

Случай 2. Дуга e инцидентна вершине из множества B_2. Тогда $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant 0$. Но $\gamma(i_2(e)) = \mu(i_2(e)) + 1$, $\gamma(i_1(e)) \leqslant \mu(i_1(e)) + 1$. Поэтому (6) справедливо.

Случай 3. Дуга e не инцидентна ни одной вершине из множества $B_1 \cup B_2$. Тогда $\mu(i_2(e)) - \mu(i_1(e)) \geqslant 1$, и так как $\gamma(i_2(e)) \geqslant \mu(i_2(e))$, $\gamma(i_1(e)) \leqslant \mu(i_1(e)) + 1$, то снова выполняется (6).

Таким образом, γ является тотальной 0-раскраской мультиграфа G с помощью $\sigma(G)+1$ цветов. Следовательно, $\chi\tau(0, G) \leqslant \sigma(G)+1$. Теорема доказана.

Теорема 3 позволяет дать отличную от (4) верхнюю оценку для тотального p-шагового хроматического числа при произвольном p. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Для любого мультиграфа G справедливо неравенство*

$$\chi\tau(p+1, G) \leqslant \chi\tau(p, G) + 1.$$

Доказательство. Пусть φ — тотальная p-раскраска мультиграфа G в $\chi\tau(p, G)$ цветов. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что для любой вершины выполняется условие: цвет любого начального инцидентора, примыкающего к этой вершине, меньше цвета любого примыкающего к ней конечного инцидентора. Все конечные инциденторы мультиграфа G перекрасим по правилу: цвет конечного инцидентора, примыкающего к вершине v, увеличим на 1, если при раскраске φ цвет отличен от $\varphi(v) - 1$; если же цвет этого инцидентора при

раскраске φ равен $\varphi(v) - 1$, то увеличим его на 2. Получим тотальную $(p+1)$-раскраску мультиграфа G с использованием $\chi\tau(p, G) + 1$ цветов. Лемма доказана.

Из теоремы 3 и леммы 5 вытекает

Следствие 2. *Для любого мультиграфа G*

$$\chi\tau(p, G) \leqslant \sigma(G) + p + 1.$$

4. О нижней и верхней оценках из (4)

Следствие 1 утверждает, что для любого мультиграфа G

$$\chi I(p, G) \leqslant \chi\tau(p, G) \leqslant \chi I(p, G) + 2.$$

Покажем, что нижняя оценка точна в том смысле, что она достигается на бесконечном семействе мультиграфов.

Теорема 4. *Пусть G — мультиграф. Если*

$$p \geqslant 3\lfloor\sigma(G)/2\rfloor + 1, \tag{7}$$

то $\chi\tau(p, G) = \chi I(p, G)$.

Доказательство. Будем предполагать, что G — связный мультиграф; теорему достаточно доказать для этого случая. Обозначим для краткости $L = \chi I(p, G)$. Так как $\max\{\sigma^+(G), \sigma^-(G)\} \geqslant \sigma(G)/2$ для любого G, то из формулы Пяткина (2) и неравенства (7) следует, что $L \geqslant \frac{1}{2}\sigma(G) + 3\lfloor\sigma(G)/2\rfloor + 1$. Поэтому в случае четного $\sigma(G)$ имеем

$$L \geqslant 2\sigma(G) + 1. \tag{8}$$

Если же $\sigma(G)$ нечетно, то

$$L \geqslant 2\sigma(G). \tag{9}$$

Построим p-раскраску инциденторов мультиграфа G, используя L цветов из интервала $[1, L]$. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что для любой вершины $v \in V(G)$ выполняется условие: на раскраску начальных инциденторов, примыкающих к v, использованы цвета из интервала $[1, s^+(v)]$, а на раскраску конечных инциденторов, примыкающих к v, использованы цвета из интервала $[L - s^-(v) + 1, L]$ (мы считаем, что если $a > b$, то интервал $[a, b]$ пуст). Каждой вершине $v \in V(G)$ предпишем множество *цветов* $A(v) = [s^+(v) + 1, L - s^-(v)]$. Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что вершины мультиграфа можно правильно раскрасить в предписанные цвета. Для любой вершины $v \in V(G)$ имеем $|A(v)| = L - (s^+(v) + s^-(v)) \geqslant L - \sigma(G)$. Поэтому в случае четного $\sigma(G)$ из неравенства (8) следует, что $|A(v)| \geqslant \sigma(G) + 1$ для любой вершины $v \in V(G)$. Поэтому требуемая

раскраска вершин существует. В случае нечетного $\sigma(G)$ воспользуемся аналогом теоремы Брукса для раскраски вершины графа в предписанные цвета [1]: пусть H — связный граф с $\sigma(H) \geqslant 3$, отличный от полного $(\sigma(H)+1)$-вершинного графа; тогда если каждой вершине графа H предписано не менее $\sigma(H)$ цветов, то все вершины H можно правильно раскрасить в предписанные цвета. Итак, пусть $\sigma(G)$ — нечетное число. Тогда из неравенства (9) следует, что $|A(v)| \geqslant \sigma(G)$ для любой вершины $v \in V(G)$. Так как G — связный мультиграф, то в случае, когда G отличен от полного $(\sigma(G)+1)$-вершинного графа, существование правильной раскраски вершин в предписанные цвета легко доказывается с помощью указанного аналога теоремы Брукса. Пусть, наконец, G — полный $(\sigma(G)+1)$-вершинный граф. Так как число $\sigma(G)/2$ не является целым, в графе G существуют вершины v' и v'' такие, что $s^+(v') > (\sigma(G))/2, s^+(v'') < (\sigma(G))/2$. Поэтому $A(v') \neq A(v'')$. А это, очевидно, вместе с неравенством $|A(v)| \geqslant \sigma(G)$ для любой вершины $v \in V(G)$ гарантирует существование правильной раскраски вершин в предписанные цвета. Теорема доказана.

Что касается верхней оценки в (4), то автор не смог построить ни одного мультиграфа H, для которого выполнялось бы равенство $\chi_T(p,H) = \chi I(p,H)+2$.

Гипотеза. Для любого мультиграфа G справедливо неравенство

$$\chi_T(p,G) \leqslant \chi I(p,G)+1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. Вып. 29. С. 3–10.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
4. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
5. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
6. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

7. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York, N. Y.: John Wiley & Sons, 1995.

8. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.

Адрес автора:

Одесская гос. академия
пищевых технологий,
ул. Канатная, 112,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@osaft.odessa.ua

Статья поступила
13 марта 2000 г.