

О ДИАГНОСТИЧЕСКИХ И УСТАНОВОЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СХЕМ ИЗ НЕНАДЕЖНЫХ АВТОМАТОВ*)

В. Н. Носков

Рассматривается представление конечного автомата схемой в базисе, состоящем из сильно связанных конечных автоматов Мили. Предлагается метод преобразования любой части произвольной схемы в подсхему, для которой возможна диагностика с хорошей локализацией возникающих в ней неисправностей из широкого класса. При некоторых ограничениях на используемый базис предложенные преобразования позволяют получать схемы, которые не только удобны для диагностики неисправностей, но и позволяют переводить схемы из состояния в состояние с помощью коротких входных последовательностей. Описаны тестовые последовательности и последовательности, устанавливающие схему в заданное состояние. Получены верхние оценки длин таких последовательностей и верхние оценки сложности преобразованных схем.

Введение

Поиск методов синтеза схем, удобных для диагностики неисправностей и реализующих булевы и автоматные функции, представляется важным и перспективным направлением в теории контроля и надежности дискретных устройств. С. Редди [14], В. И. Шевченко [12], А. П. Горяшко [2] и Н. П. Редькин [10] разработали несколько методов построения удобных для тестирования схем из функциональных элементов. Авторы этих методов рассматривают неисправности, связанные с неправильной работой базисных элементов в схемах (чаще всего это константные неисправности на входах и выходах элементов схемы). При этом обычно накладываются ограничения на выбор элементного базиса.

Нами в [3–7] также предложены новые методы синтеза схем из функциональных элементов, когда допускаются неисправности более

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00593) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО-110).

разнообразные, а элементный базис является полным и произвольным. Главным достоинством этих методов является то, что они позволяют строить схемы, в которых с помощью тестовых процедур можно добиться детальной локализации неисправностей, т. е. достаточно точно указать в схеме те области, в которых имеются неисправные элементы.

В [8, 9] мы рассмотрели представления конечного автомата схемой S в базисе, состоящем из сильно связанных конечных автоматов Мили и элементов, реализующих булевы функции. Описано преобразование произвольной схемы S в схему S' . При этом преобразовании произвольная заданная часть B схемы S преобразуется в схему C , а оставшаяся часть схемы не меняется. Новая схема имеет больше входов и выходов, чем схема S (рис. 1; здесь и ниже полагаем $\tilde{x}_r = (x_1, \dots, x_r)$). Исправная схема S' при подаче нулей на дополнительные входы x_{n+1}, \dots, x_{n+w} на выходах a_1, \dots, a_q реализует те же функции от своих основных входов, что и схема S . Выходы b_1, \dots, b_p схемы S' используются при тестировании схемы. В [8] найдена входная последовательность $\vec{\mathcal{U}}$, подав которую на входы схемы и наблюдая реакцию схемы на входную последовательность, удастся обнаружить и достаточно точно указать места в подсхеме C , в которых находятся неисправные элементы.

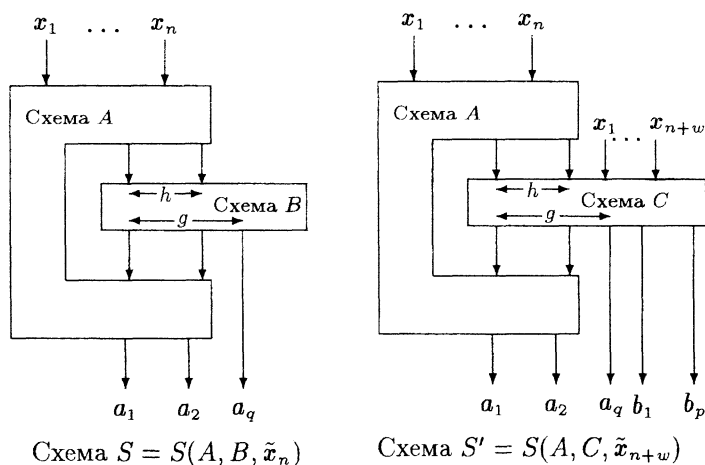


Рис. 1

В настоящей статье мы модифицируем предложенные в [8] методы преобразования схем. Описываются преобразования, позволяющие получить схемы, для которых, как и в [8], с помощью входной тестовой последовательности $\vec{\mathcal{U}}$ можно обнаружить и локализовать неисправности в преобразованной части схемы. Но теперь после преобразований получается схема, обладающая следующим дополнительным свойством.

Если с помощью $\vec{\mathcal{U}}$ установлено, что преобразованная часть схемы исправна, то можно указать весьма короткую входную последовательность $\vec{\mathcal{W}}$, поступление которой на вход схемы S' вслед за последовательностью $\vec{\mathcal{U}}$ переведет S' в произвольно заданное внутреннее состояние.

В конце введения эти результаты сформулированы более четко в виде теоремы. Перейдем к точной постановке задачи.

БАЗИС СХЕМ. Пусть Φ — семейство таких неинициальных конечных автоматов Мили, которые удовлетворяют следующим требованиям.

◊ Каждый автомат из Φ имеет r входов и один выход. Входным алфавитом для автоматов из Φ служит множество r -разрядных булевых векторов (r — произвольное натуральное число), выходным алфавитом — множество $\{0, 1\}$.

◊ Все автоматы из Φ являются минимальными, сильно связными автоматами не более чем с k состояниями. (Автомат называется *сильно связным*, если для любой упорядоченной пары (σ', σ'') его внутренних состояний существует входное слово, которое переводит автомат из состояния σ' в состояние σ'' . Автомат называется *минимальным*, если в нем нет двух эквивалентных между собой состояний.)

◊ В Φ содержатся и тривиальные автоматы, т. е. автоматы с одним внутренним состоянием, причем набор тривиальных автоматов в Φ образует полный базис в классе всех булевых функций.

◊ Каждый автомат φ из Φ обладает следующим свойством: если φ находится в произвольном состоянии σ и на его вход подается r -разрядный вектор, все компоненты которого равны 0, то автомат φ остается в том же состоянии σ .

СХЕМЫ $S(A, B, \tilde{x}_n)$ и $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$. Пусть S — схема в базисе Φ с n входами x_1, \dots, x_n и q выходами a_1, \dots, a_q (n и q — произвольные натуральные числа). Пусть в S содержится N нетривиальных элементов. Если каждый нетривиальный элемент схемы находится в одном (любом) из своих состояний, то схема S представляет собой инициальный автомат Мили и реализует некоторую ограниченно-детерминированную (автоматную) функцию. Пусть B — произвольная часть (подсхема) схемы S , содержащая все нетривиальные элементы из S и, быть может, еще некоторые тривиальные элементы. Обозначим через A часть схемы S , образованную элементами схемы S , не вошедшими в B . Схему S с выделенными в ней частями A и B будем обозначать через $S(A, B, \tilde{x}_n)$. На рис. 1 слева изображено взаимное положение схем A и B .

Пусть C — некоторая схема в базисе Φ , полученная из B добавлением некоторых тривиальных элементов. Схема C имеет больше входов, чем схема B . Если схему B заменить на схему C , то получится схема $S' = S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ (см. схему в правой части рис. 1). Ниже будут

рассматриваться схемы S' при $w = 4$. Полагаем, что в $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ кроме выходов a_1, \dots, a_q есть дополнительные выходы b_1, \dots, b_p . Рассматриваемая ниже схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ такова, что в ней *выходами являются выходы всех элементов схемы C* . Кроме того, выходы тех элементов в A , которые в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ были выходами всей схемы, тоже являются выходами схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$.

Состояния схем B и C . Нумерация элементов. В дальнейшем внутренние состояния автомата будем кратко называть *состояниями автомата*. Пусть схема B содержит N нетривиальных элементов. Занумеруем их в произвольном порядке числами $1, 2, \dots, N$. Зафиксируем это соответствие номеров и элементов в B и назовем его *нумерацией $\mathcal{N}(B)$* . Если ниже будет сказано, что i — номер в нумерации $\mathcal{N}(B)$, то будет подразумеваться установленное соответствие. Полагаем, что в любой момент времени состояние схемы B можно описать N -разрядным вектором, каждый разряд которого есть символ состояния того нетривиального элемента схемы, номер которого совпадает с номером разряда. Таким образом, состояние схемы B есть макросостояние, образованное состояниями ее нетривиальных базисных элементов.

Условимся, что в C все нетривиальные элементы занумерованы теми же номерами, которыми занумерованы соответствующие элементы в B . Таким образом, при преобразовании схемы B в схему C все нетривиальные элементы из B «переходят» в схему C вместе с присвоенными им в B номерами. Это соответствие номеров и элементов в C назовем *нумерацией $\mathcal{N}(C)$* .

Полагаем, что в каждый момент времени схема C находится в макросостоянии, образованном совокупностью состояний ее нетривиальных элементов. Состояние схемы C можно описать N -разрядным вектором, в каждом разряде которого находится символ состояния нетривиального элемента, номер которого совпадает с номером разряда.

Допустимые неисправности. Обозначим через β произвольный базисный элемент схемы S .

(а) Пусть β — тривиальный элемент с r входами и v_1, \dots, v_r — входные полюсы элемента β , на которые в схеме могут поступать 0 и 1. Полюсы v_1, \dots, v_r будем отождествлять с одноименными булевыми переменными. В схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \dots, v_r)$, а при появлении в $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^* , реализующий произвольную булеву функцию $\beta^*(v_1, \dots, v_r)$.

(б) Пусть β — нетривиальный автомат с r булевыми входами и числом состояний $k(\beta)$. Полагаем, что в неисправной схеме автомат β может превратиться в произвольный автомат Мили β^* с теми же

входным и выходным алфавитами, что и у автомата β , и не более чем с $k(\beta)$ состояниями.

Итак, во всех случаях полагаем, что появление неисправностей в автомате не увеличивает числа его состояний. Это касается как тривиальных, так и нетривиальных автоматов.

Число неисправностей. Полагаем, что число неисправных элементов в схеме C не превышает m (m — произвольное фиксированное натуральное число).

Аналогично определяются допустимые неисправности в схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$.

Введем следующие обозначения:

- ◇ A^* и C^* — схемы, в которые преобразуются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей; $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$, когда ее под-схемы A и C преобразуются в схемы A^* и C^* .
- ◇ $L(F)$ — сложность схемы F , т. е. число ее элементов.
- ◇ Пусть $\vec{\mathcal{P}}$ — последовательность n -разрядных булевых векторов. Обозначим через $\vec{\mathcal{P}}_{(0000)}$ последовательность, полученную из $\vec{\mathcal{P}}$ заменой каждого n -разрядного вектора на $(n+4)$ -разрядный: значения первых n разрядов в новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние 4 разряда имеют нулевые значения.
- ◇ $S_a(A, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}})$ — последовательность, реализуемая на выходах a_1, \dots, a_q схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, если на ее входы подается последовательность $\vec{\mathcal{P}}$ и в начальный момент подсхема B находилась в состоянии $\sigma(B)$. Аналогично определяются последовательности $S_a(A, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$, $S_b(A, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$, $S_a(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$ и $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$. Здесь $S_b(\dots)$ обозначает последовательность векторов, появляющихся в соответствующей схеме на выходах b_1, \dots, b_p (p — число дополнительных выходов в $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$).
- ◇ $\sigma(\vec{\mathcal{R}}, \sigma(C^*))$ — состояние схемы C^* , в которое она переходит после подачи на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ последовательности $\vec{\mathcal{R}}$, состоящей из булевых $(n+4)$ -разрядных векторов при условии, что перед поступлением этой последовательности схема находилась в состоянии $\sigma(C^*)$.
- ◇ Если $\vec{\mathcal{U}}$ и $\vec{\mathcal{W}}$ — две последовательности, то через $\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}$ обозначим их конкатенацию, т. е. последовательность, началом которой является последовательность $\vec{\mathcal{U}}$, а продолжением — последовательность $\vec{\mathcal{W}}$.

Теорема. Пусть $S(A, B, \tilde{x}_n)$ — произвольная схема в автоматном базисе Φ , входными наборами которой являются n -разрядные булевы векторы и $r < n$. Существуют такая последовательность $\vec{\mathcal{U}}$ длины $[6 \cdot 4^{rk+1} k^2 \times \ln(2k)]$ $(n+4)$ -разрядных булевых векторов и такая схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ над автоматным базисом Φ с выделенными в C частями $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_s$ (где $s < \sigma L(B)$ и s — константа, зависящая лишь от базиса), что

- (а) любой элемент из C содержится по крайней мере в одной из частей \mathcal{D}_i , $1 \leq i \leq s$, при этом $L(C) < \sigma L(B)$, $L(D_i) \leq s$ и $r < \sigma L(B)$;
- (б) для любого состояния $\sigma(B)$ схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C , что для любой последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ n -разрядных булевых векторов справедливо равенство

$$S_a(A, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) = S_a(A, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)});$$

- (с) при любых $A^*, C^*, \sigma(C^*)$ по последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{U}})$ множество частей $\{\mathcal{D}_i\}_{1 \leq i \leq s}$ в схеме C^* можно разбить на два класса $\mathcal{D}(1, C^*)$ и $\mathcal{D}(2, C^*)$ такие, что

(с.1) если множество $\mathcal{D}(1, C^*)$ непусто, то любая часть \mathcal{D}_i из $\mathcal{D}(1, C^*)$ содержит неисправный элемент из C^* ;

(с.2) если множество $\mathcal{D}(1, C^*)$ пусто, то

(i) для любого состояния $\sigma(B)$ схемы B по последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{U}})$ можно указать такую последовательность $\vec{\mathcal{W}}$, состоящую из $(n+4)$ -разрядных булевых векторов, что $|\vec{\mathcal{W}}| < kN$, и для любой последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ n -разрядных булевых векторов справедливо равенство $S_a(A^*, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}, \sigma(C^*)), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$;

(ii) для произвольных $\sigma'(C^*)$ и $\sigma''(C^*)$ можно указать такую последовательность $\vec{\mathcal{Z}}$ $(n+4)$ -разрядных булевых векторов, что $|\vec{\mathcal{Z}}| < kN$ и $\sigma(\vec{\mathcal{Z}}, \sigma''(C^*)) = \sigma'(C^*)$.

КОММЕНТАРИИ К ТЕОРЕМЕ.

◊ Неравенства из (а) ограничивают сложность схемы C и размеры частей \mathcal{D}_i . Эти размеры характеризуют степень точности, с которой указывается место неисправного элемента в схеме.

◊ Утверждение (б) означает, что при $x_{n+1} \equiv \dots \equiv x_{n+4} \equiv 0$ схема C моделирует схему B , т. е. $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ превращается в схему, функционально эквивалентную схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$.

◊ Утверждение (с) дает представление о полноте диагностики схемы: указываются места расположения неисправных элементов (с точностью

до нескольких элементов, расположенных с неисправным элементом в одной из частей \mathcal{D}_i). Если во всех частях из $\mathcal{D}(1, C^*)$ провести замену всех неисправных элементов на исправные, то схема C^* превратится в такую схему C^{**} , что класс $\mathcal{D}(1, C^{**})$ окажется пустым. В случае, когда класс $\mathcal{D}(1, C^{**})$ пустой, согласно утверждению (i) из (с.2) можно указать такую последовательность \vec{W} , что если ее подать на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ после последовательности \vec{U} , то \vec{W} переведет схему C^{**} в такое состояние, что при фиксировании нулевых значений на последних четырех ее входах схема C^{**} будет моделировать на своих выходах a_1, \dots, a_q работу автомата B с начальным состоянием $\sigma(B)$. Отметим, что для нахождения последовательности \vec{W} на входы схемы $S(A^*, C^{**}, \tilde{x}_{n+4})$ достаточно подать последовательность \vec{U} . Вся необходимая информация для нахождения последовательности \vec{W} будет получена, если доступна выходная последовательность $S_b(A^*, C^{**}, \sigma(C^{**}), \vec{U})$. При этом не требуется иметь информацию о том, какие неисправности имеются в этот момент в схеме $S(A^*, C^{**}, \tilde{x}_{n+4})$ и в каком состоянии $\sigma(C^{**})$ находится схема C^{**} .

◇ Состояния схемы C задаются N -разрядным вектором, каждый разряд которого может принимать не более k значений. Из предложения (ii) в (с.2) следует, что

- схема C является сильно связным автоматом;
- все кратчайшие переходы из состояния в состояние осуществляются значительно быстрее, чем в наихудшем случае (в терминах из [11] можно сказать, что степень достижимости автомата C не превышает kN).

Схема C может иметь k^N состояний. Нетрудно задать сильно связный автомат M с k^N состояниями, среди которых есть два таких состояния σ' и σ'' , что любая последовательность, которая переводит M из состояния σ' в состояние σ'' , имеет длину, не меньшую $k^N - 1$. Таким образом, степень достижимости для автомата C существенно ниже точной верхней оценки степени достижимости для автоматов с k^N состояниями.

◇ Доказательство теоремы конструктивно:

- указывается последовательность преобразований, которые превращают схему $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$, обладающую свойствами (а), (б) и (с) из утверждения теоремы;
- приведен алгоритм, позволяющий с использованием лишь последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{U})$ разбить множество частей схемы C^* на классы $\mathcal{D}(1, C^*)$ и $\mathcal{D}(2, C^*)$;
- описана процедура построения последовательности \vec{W} .

Доказательству теоремы посвящена оставшаяся часть настоящей статьи. Всюду через c_1, c_2, \dots обозначаются константы, зависящие лишь от базиса.

§ 1. Конструкция схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$

Схема C получается из схемы B описанными ниже преобразованиями $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ и \mathcal{W}_3 . Они состоят в том, что к схеме B подключаются вспомогательные схемы E, F (при преобразовании \mathcal{W}_1), Q и D (при преобразовании \mathcal{W}_2) и K (при преобразовании \mathcal{W}_3). Вспомогательные схемы строятся из тривиальных элементов базиса.

1.1. \mathcal{W}_1 -преобразование. При этом преобразовании к схеме B добавляется одна схема E и rN схем F .

СХЕМА E . Эта схема имеет $\lceil \log_2(N+3) \rceil$ входов и N выходов (рис. 2).

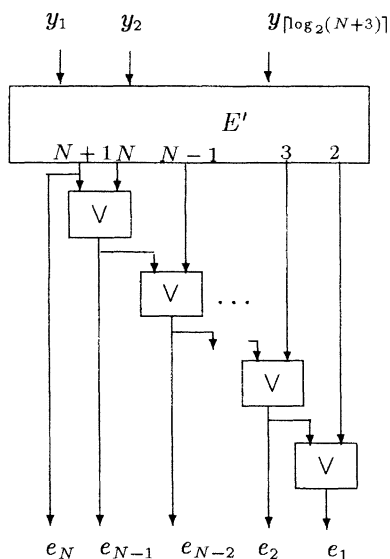


Рис. 2. Схема E

Пусть $t = \lceil \log_2(N+3) \rceil$ и $\mu(y_1, \dots, y_t) = \sum_{i=1}^t y_i 2^{t-i}$. При любом j , $1 \leq j \leq N$, на j -м выходе схемы E реализуется функция

$$e_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu(y_1, \dots, y_t) \geq j+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Эту функцию можно представить так:

$$e_j = \bigvee_{\mu(\delta_1, \dots, \delta_t) \geq j+1} y_1^{\delta_1} \& \dots \& y_t^{\delta_t}. \quad (1.2)$$

В базисе $\{\vee, \wedge, -\}$ схема E может быть реализована со сложностью, не большей чем $5N + \log_2(N+3) + 7$. Пользуясь представлением (1.2), это можно сделать так. Сначала

строится схема E' , реализующая все 2^t элементарных конъюнкций вида $y_1^{\delta_1} \& \dots \& y_t^{\delta_t}$ (для этого достаточно $2 \cdot 2^{\lceil \log_2(N+3) \rceil} + \lceil \log_2(N+3) \rceil - 4$ элементов базиса $\{\vee, \wedge, -\}$ (см. [13, с. 353])). Пусть на выходе схемы E' с номером i , $i = 2, \dots, N+1$, реализуется конъюнкция $y_1^{\delta_1} \& \dots \& y_t^{\delta_t}$ такая, что $\mu(\delta_1, \dots, \delta_t) = i$. Построив схему E' и присоединив к ее выходам $N-1$ элементов \vee так, как изображено на рис. 2, получим схему E , реализующую систему функций e_1, \dots, e_N , определенную равенствами (1.1). Ясно, что $L(E) \leq 5N + \log_2(N+3) + 7$. Отсюда получаем, что для

реализации отображения (1.1) схемой E в произвольном базисе понадобится не более $c_1 N$ элементов, т. е.

$$L(E) < c_1 N. \quad (1.3)$$

СХЕМА F . Эта схема имеет 4 входа и 1 выход (рис. 3). Функция, реализуемая этой схемой, определяется так.

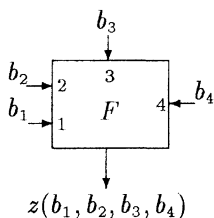


Рис. 3

Если на входы схемы F подаются значения переменных b_1, b_2, b_3, b_4 , как изображено на рис. 3, то на выходе схемы F реализуется функция

$$z(b_1, b_2, b_3, b_4) = \bar{b}_1 b_3 \vee b_1 \bar{b}_2 b_4. \quad (1.4)$$

В произвольном базисе схему F можно реализовать так, чтобы выполнялось неравенство

$$L(F) < c_2. \quad (1.5)$$

Присоединим к схеме B схему E . Пусть β_1 — нетривиальный элемент из B . Индекс обозначает номер в нумерации $\mathcal{N}(B)$.

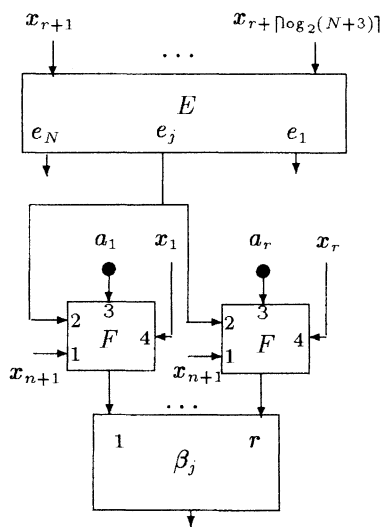


Рис. 4. Фрагмент схемы B_0

Предположим, что в схеме B входы элемента β_1 присоединены к узлам a_1, \dots, a_r , каждый из которых есть либо выход элемента схемы B , либо входной полюс схемы B . К схеме B присоединим r схем F так, как изображено на рис. 4. Подобное преобразование повторим для всех нетривиальных элементов β_2, \dots, β_N из B . В результате к схеме B присоединятся одна схема E и rN схем F . Полученную схему обозначим через B_0 . Так как в схеме B содержится N нетривиальных элементов, то из неравенств (1.3) и (1.5) следует, что $L(B_0) < c_3 N + L(B)$. Поэтому

$$L(B_0) < c_4 L(B). \quad (1.6)$$

1.2. \mathcal{W}_2 -преобразование. Рассмотрим схему R , изображенную на рис. 5, и опишем ее подсхемы Q и D .

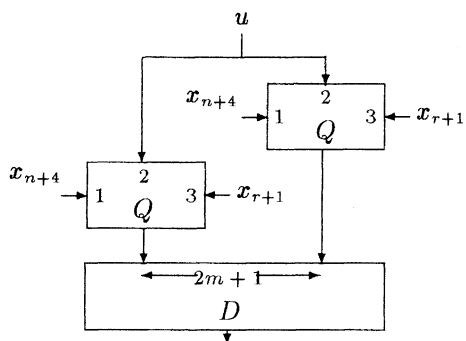


Рис. 5. Схема R

СХЕМА Q . Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются значения переменных k , v и w , то на ее выходе реализуется функция $\bar{k}v \vee kw$.

СХЕМА D . Эта схема осуществляет отображение

$$(a_1, \dots, a_{2m+1}) \rightarrow b(a_1, \dots, a_{2m+1}),$$

где

$$b(a_1, \dots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть w_{i_1}, \dots, w_{i_s} — узлы схемы A , не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B_0, \tilde{x}_n)$, и пусть к узлам w_{i_1}, \dots, w_{i_s} схемы $S(A, B_0, \tilde{x}_n)$ подключены входные полюсы схемы B_0 . Выполним следующие преобразования. Вход схемы B_0 , подключенный к w_{i_1} , переключим на выход схемы R , а к w_{i_1} подключим вход схемы R . Аналогичные переключения выполним для w_{i_2}, \dots, w_{i_s} , используя каждый раз новый экземпляр схемы R . В результате между узлами w_{i_1}, \dots, w_{i_s} и входными полюсами схемы B_0 появятся s одинаковых схем R .

На этом \mathcal{W}_2 -преобразование схемы $S(A, B_0, \tilde{x}_n)$ заканчивается. Схеме, в которую превратилась схема B_0 после \mathcal{W}_2 -преобразования, обозначим через B_1 .

1.3. \mathcal{W}_3 -преобразование. Это преобразование схемы $S(A, B_1, \tilde{x}_n)$ связано с размещением схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в подсхеме B_1 . При этом схема B_1 преобразуется в схему C . Эти преобразования изображены на рис. 6. Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_g\}$ — базис, в котором построена схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$ (нумерация элементов в Φ произвольна, она не связана с нумерациями $\mathcal{N}(B)$ и $\mathcal{N}(C)$). На рис. 6 справа приведены фрагменты схемы C , в которые преобразуются соответствующие фрагменты схемы B_1 , изображенные на рис. 6 слева. При этом во всех фрагментах схемы B_1 , указанных в левых частях рис. 6, и схемах, полученных из B_1 после таких преобразований, проводятся аналогичные преобразования до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, показанные в левых частях. Преобразования проводятся при условии, что базисные элементы φ_i и φ_q , изображенные в левых частях рис. 6, находятся вне схем Q и K .

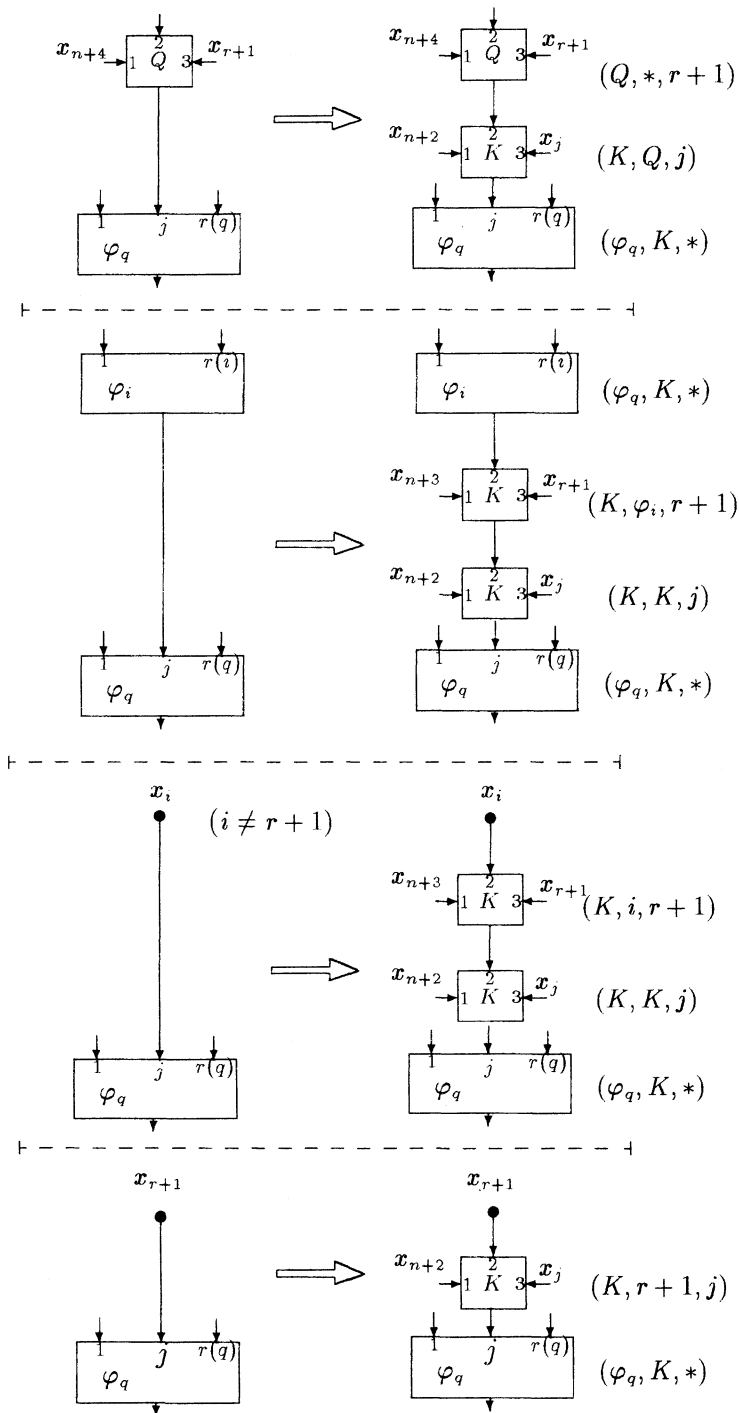


Рис. 6

СХЕМА K . Эта схема имеет три входа и один выход. Если на ее входы с номерами 1, 2, 3 подаются x, y, z , то на выходе схемы K реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Схемы K и Q реализуют одно и то же отображение. Можно было бы обозначить их одним символом. Однако удобно использовать оба символа, так как это позволяет избежать пояснений, связанных с расположением элементов в схеме. В отличие от K один из входов элемента Q обязательно подключен к выходу элемента схемы A .

Схемы K и Q , а также базисные элементы схемы C , находящиеся вне схем K и Q , назовем *блоками* схемы. Всем блокам схемы присвоим метки (трехразрядные векторы) по следующему правилу (см. рис. 6).

- Каждая схема Q получает метку $(Q, *, r + 1)$.
- При любом $i, 1 \leq i \leq g$, блок φ_i получает метку $(\varphi_i, K, *)$.
- Схема K получает метку:

(K, Q, i) , если вход схемы K подключен к выходу схемы Q , а выход схемы K — к i -му входу некоторого блока;

$(K, \varphi_i, r + 1)$, если ее вход подключен к выходу блока $\varphi_i, 1 \leq i \leq g$;

$(K, i, r + 1)$, если ее вход подключен к полюсу $x_i, i \neq r + 1$;

$(K, r + 1, j)$, если ее вход подключен к полюсу x_{r+1} , а ее выход — к j -му входу некоторого блока;

(K, K, j) , если ее вход подключен к блоку с меткой $(K, i, r + 1)$ или к блоку с меткой $(K, \varphi_i, r + 1)$, а ее выход — к j -му входу некоторого блока.

ОКРЕСТНОСТЬ БЛОКА. Каждому блоку β в C поставим в соответствие множество блоков схемы C , зависящее от метки блока β так, как показано в табл. 1. Это множество блоков назовем *окрестностью* блока β .

На этом \mathcal{W}_3 -преобразование заканчивается. Схему, полученную из B преобразованиями $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ и \mathcal{W}_3 , обозначим через C , а схему, полученную из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ заменой в ней части B на C , обозначим через $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$. Входными полюсами для $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ считаем x_1, \dots, x_{n+4} . Полагаем, что выход каждого элемента в C является выходом схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$. Если в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ выход некоторого элемента, принадлежащего A , служил выходом всей схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, то выход соответствующего элемента, принадлежащего $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$, тоже служит выходом схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$.

Т а б л и ц а 1

| Метка блока β | Окрестность блока β |
|---|---|
| $(K, Q, j),$ $1 \leq j \leq r$ | Блок β и блок Q , к выходу которого подключен блок β |
| $(\varphi_i, K, *),$ $1 \leq i \leq g$ | Блок β и все блоки K , к выходам которых подключен блок β |
| $(K, \varphi_i, r+1),$ $1 \leq i \leq g$ | Блок β , блок φ_i , к выходу которого подключен блок β , и все блоки K , выходы которых подключены к рассматриваемому блоку φ_i |
| $(K, K, j),$ $1 \leq j \leq r$ | Блок β и блок K , выход которого подключен к блоку β |
| $(K, i, r+1),$ $1 \leq i \leq r-1,$ $r+1 \leq i \leq n+1$ | Блок β |
| $(K, r+1, j),$ $1 \leq j \leq r$ | Блок β |
| $(Q, *, r+1)$ | Блок β |

О сложности схемы C . В [8] показано, что если преобразования \mathcal{W}_2 и \mathcal{W}_3 применяются к схеме B' из $S(A, B', \tilde{x}_n)$ и схема B' превращается в схему C' , то $L(C') < c_4 m L(B')$. Если положить, что B' — это схема B_0 и она преобразуется в схему C , то из (1.6) следует, что $L(C) < c_4 m (L(B) + c_3 N) < c_5 m L(B)$. Таким образом,

$$L(C) < c_5 m L(B). \quad (1.7)$$

§ 2. Свойства схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$

2.1. О моделировании работы схемы B с помощью схемы C .

Лемма 1. При любом A^* для каждого состояния $\sigma(B)$ схемы B найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C , что для любой последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ n -разрядных булевых векторов справедливы равенства

$$S_a(A, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) = S_a(A, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}),$$

$$S_a(A^*, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) = S_a(A^*, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если на входы схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ подается последовательность векторов из $\vec{\mathcal{P}}_{(0000)}$, то на полюсы x_{n+1}, \dots, x_{n+4} поступают нулевые значения. В этих условиях функционирование каждого из блоков K и Q исправной схемы C эквивалентно функционированию проводника, соединяющего второй вход блока с его выходом. Схема R тоже становится эквивалентной проводнику, соединяющему ее вход u (см. рис. 5) с выходом схемы R . Исправные схемы F при $x_{n+1} = 0$ превращаются в проводники, соединяющие узлы a_1, \dots, a_r с соответствующими входами блока β_j (см. рис. 4). Если все схемы K, Q, R и F заменить проводниками, соединяющими указанные пары узлов в схеме, то схема C превратится в схему B , т. е. в схему, из которой C получена добавлением схем K, Q, R, F и E .

Последовательности $S_a(A, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}})$ и $S_a(A, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$ могут отличаться друг от друга лишь потому, что найдется пара таких нетривиальных элементов с одинаковыми номерами в $\mathcal{N}(B)$ и $\mathcal{N}(C)$ соответственно (один элемент в B , другой в C), что они находятся не в эквивалентных между собой состояниях в момент перед подачей последовательностей $\vec{\mathcal{P}}$ и $\vec{\mathcal{P}}_{(0000)}$ на входы схем $S(A, B, \tilde{x}_n)$ и $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$. Если сначала все автоматы из C перевести в состояния, эквивалентные состояниям соответствующих автоматов из B , и лишь потом подать на входы схем $S(A, B, \tilde{x}_n)$ и $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ последовательностей $\vec{\mathcal{P}}$ и $\vec{\mathcal{P}}_{(0000)}$, то последовательности $S_a(A, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}})$ и $S_a(A, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$, очевидно, совпадут.

Нетрудно убедиться, что подобное заключение можно сделать для последовательностей $S_a(A^*, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}})$ и $S_a(A^*, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)})$.

2.2. Последовательности $\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}_{cd}, \vec{\mathcal{U}}(U, V, W)$. Пусть U — множество инициальных автоматов Мили, и пусть входная последовательность $\vec{\mathcal{R}}$ такова, что для любых двух автоматов M_1 и M_2 из U справедливо утверждение: или M_1 и M_2 при подаче слова $\vec{\mathcal{R}}$ выдают различные выходные слова, или M_1 и M_2 после подачи слова $\vec{\mathcal{R}}$ реализуют одинаковые операторы. Тогда будем говорить, что входное слово $\vec{\mathcal{R}}$ *остаточно различает* автоматы из множества U .

Если множество U состоит из всех инициальных автоматов Мили, каждый из которых имеет не более k состояний, то соответствующая входная последовательность $\vec{\mathcal{R}}$ называется последовательностью, *остаточно различающей все автоматы с k состояниями*. (Подробнее об остаточной различимости см. в [11, с. 263].)

Пусть $\tilde{a}_r(1), \tilde{a}_r(2), \dots, \tilde{a}_r(t)$ — последовательность r -разрядных булевых векторов, достаточно различающая все автоматы с k состояниями. Рассмотрим табл. 2. Часть таблицы, заключенная в прямые скобки, определяет последовательность $\vec{\mathcal{U}}_{cd}$, образованную $(n+4)$ -разрядными

векторами-столбцами табл. 2. Число векторов в $\vec{\mathcal{U}}_{cd}$ равно $2t$. Слева указаны номера строк.

Т а б л и ц а 2

| | | | | | | | | |
|-------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|-----|----------|
| 1 | $a_1(1)$ | $a_1(2)$ | ... | $a_1(t)$ | $a_1(1)$ | $a_1(2)$ | ... | $a_1(t)$ |
| 2 | $a_2(1)$ | $a_2(2)$ | ... | $a_2(t)$ | $a_2(1)$ | $a_2(2)$ | ... | $a_2(t)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| r | $a_r(1)$ | $a_r(2)$ | ... | $a_r(t)$ | $a_r(1)$ | $a_r(2)$ | ... | $a_r(t)$ |
| $r+1$ | 0 | 0 | ... | 0 | 1 | 1 | ... | 1 |
| $r+2$ | $a_1(1)$ | $a_1(2)$ | ... | $a_1(t)$ | $a_1(1)$ | $a_1(2)$ | ... | $a_1(t)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n+1$ | $a_1(1)$ | $a_1(2)$ | ... | $a_1(t)$ | $a_1(1)$ | $a_1(2)$ | ... | $a_1(t)$ |
| $n+2$ | c | c | ... | c | c | c | ... | c |
| $n+3$ | d | d | ... | d | d | d | ... | d |
| $n+4$ | 1 | 1 | ... | 1 | 1 | 1 | ... | 1 |

Придавая параметрам c и d значения 0 и 1, определим последовательности $\vec{\mathcal{U}}_{01}$, $\vec{\mathcal{U}}_{10}$, $\vec{\mathcal{U}}_{11}$, каждая из которых имеет длину $2t$.

Каждой метке (U, V, W) поставим в соответствие последовательность $\vec{\mathcal{U}}(U, V, W)$ следующим образом:

$$\vec{\mathcal{U}}(U, V, W) = \begin{cases} \vec{\mathcal{U}}_{10}, & \text{если } (U, V, W) \in \{(Q, *, r+1), \\ & (\varphi_i, K, *) \mid 1 \leq i \leq p\}; \\ \vec{\mathcal{U}}_{11} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{01}, & \text{если } (U, V, W) \in \{(K, K, j), (K, Q, j), \\ & (K, r+1, j) \mid 1 \leq j \leq r\}; \\ \vec{\mathcal{U}}_{10} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{11}, & \text{если } (U, V, W) \in \{(K, \varphi_i, r+1), (K, j, r+1) \mid \\ & 1 \leq i \leq p, j = 1, \dots, r, r+2, \dots, n+1\}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь запись $\vec{\mathcal{U}}_{10} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{11}$ обозначает последовательность длины $4t$, в которой начальный отрезок длины $2t$ есть последовательность $\vec{\mathcal{U}}_{10}$, а оставшийся отрезок является последовательностью $\vec{\mathcal{U}}_{11}$. Аналогично определяется $\vec{\mathcal{U}}_{11} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{01}$.

Положим $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{U}}_{10} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{11} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{01}$. Эта последовательность играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

О длине последовательности $\vec{\mathcal{U}}$. Известно [11, с. 266], что существует входная последовательность длины $\lceil 4k^2 h^{2k} \ln(2k) \rceil$, различающая все инициальные автоматы не более чем с k состояниями (здесь h — мощность входного алфавита). Так как $h = 2^r$, из определения последовательности $\vec{\mathcal{U}}$ получаем, что в качестве последовательности $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{U}}_{10} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{11} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{01}$ можно взять такую последовательность $\vec{\mathcal{U}}$, что

$$|\vec{\mathcal{U}}| \leq \lceil 6 \cdot 4^{r^{k+1}} k^2 \ln(2k) \rceil. \quad (2.2)$$

2.3. Схема, $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенная относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$.

В схеме C выделим произвольное состояние и назовем его *каноническим состоянием*. Пусть $\hat{\sigma}(C) = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_N)$ — вектор, определяющий это состояние.

Рассмотрим произвольный нетривиальный блок с номером t в схеме C . Пусть $\{s_1, \dots, s_{k(t)}\}$ — множество всех его состояний. Определим множество N -разрядных векторов $\Delta^{(t)}$, полагая

$$\Delta^{(t)} = \{(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{i-1}, s_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \dots, \hat{\sigma}_N) \mid 1 \leq i \leq k(t)\}.$$

Пусть β — произвольный блок с меткой (U, V, W) в подсхеме C схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$. Рассмотрим варианты (а) и (б), зависящие от того, есть ли в $O(\beta)$ нетривиальный блок. (Из определения окрестности $O(\beta)$ следует, что в $O(\beta)$ содержится не более одного нетривиального блока.)

(а) В $O(\beta)$ есть нетривиальный блок. Обозначим этот блок через δ_1 , а остальные блоки из $O(\beta)$ через $\delta_2, \dots, \delta_{q(\beta)}$.

Пусть t является номером блока δ_1 в нумерации $\mathcal{N}(C)$. Предположим, что последовательность $\vec{\mathcal{U}}$ подается на входы схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ и перед ее поступлением схема C находилась в состоянии $\hat{\sigma}(C)$. Обозначим через $\delta_i(\vec{\mathcal{U}}, \hat{\sigma}(C), \beta)$ последовательность, которая в этих условиях появляется на выходе блока δ_i , $1 \leq i \leq q(\beta)$, когда на входы схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ подается подпоследовательность $\vec{\mathcal{U}}(U, V, W)$ из $\vec{\mathcal{U}}$.

Аналогичные обозначения примем и для схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$. Здесь обозначениям $\beta, O(\beta), \delta_1, \dots, \delta_{q(\beta)}$ соответствуют обозначения $\beta^*, O(\beta^*), \delta_1^*, \dots, \delta_{q(\beta)}^*$. Полагаем, что если схема C^* находится в состоянии $\sigma(C^*)$ и на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ подается последовательность $\vec{\mathcal{U}}$, то $\delta_i^*(\vec{\mathcal{U}}, \sigma(C^*), \beta^*)$ есть последовательность, появляющаяся на выходе блока δ_i^* , $1 \leq i \leq q(\beta)$, когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ подается подпоследовательность $\vec{\mathcal{U}}(U, V, W)$ из $\vec{\mathcal{U}}$.

Предположим, что в C найдется такое состояние $\sigma'(C)$, определяемое вектором из $\Delta^{(t)}$, что при любом $i \in \{1, \dots, q(\beta)\}$ справедливо равенство

$$\delta_i(\vec{\mathcal{U}}, \sigma'(C), \beta) = \delta_i^*(\vec{\mathcal{U}}, \sigma(C^*), \beta^*). \quad (2.3)$$

В этом случае схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ называется $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$.

(б) В $O(\beta)$ нет нетривиальных блоков. Пусть окрестность $O(\beta)$ есть множество блоков $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{q(\beta)}\}$. Предположим, что если схема C^* находится в произвольном состоянии $\sigma(C^*)$ и на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ подается последовательность $\vec{\mathcal{U}}$, то при любом $i \in \{1, \dots, q(\beta)\}$ выполняется равенство

$$\delta_i(\vec{\mathcal{U}}, \hat{\sigma}(C), \beta) = \delta_i^*(\vec{\mathcal{U}}, \sigma(C^*), \beta^*). \quad (2.4)$$

В этом случае схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ называется $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть имеется схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$, но неизвестно состояние $\sigma(C^*)$, в котором схема C^* находится, и неизвестно, какие неисправности есть в A^* и C^* . Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ подать последовательность $\vec{\mathcal{U}}$ и получить выходную последовательность $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{U}})$, то этой информации будет достаточно, чтобы выяснить, является ли $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно $(\beta_i^*, \sigma(C^*))$. Этот вывод непосредственно следует из определения $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемы.

2.4. Свойства последовательности $\vec{\mathcal{U}}$. Обозначим через \mathcal{E}^* совокупность блоков в C^* , не являющихся блоками типа Q .

Лемма 2. При любых C^* , $\sigma(C^*)$ и β^* , $\beta^* \in \mathcal{E}^*$, справедливы утверждения:

- (а) если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ не является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$, то в окрестности блока β^* имеется неисправный блок;
- (б) если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$, то блок β^* исправен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение (б) леммы 2. Пусть β — блок в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$, который становится блоком β^* при появлении неисправностей, переводящих схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ в схему $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$.

Предположим, что β есть нетривиальный автомат и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$. Для доказательства утверждения (б) леммы 2 достаточно убедиться в эквивалентности β и β^* как неинициальных автоматов. Из определения $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ относительно $\beta^* \in \mathcal{E}(C^*)$ следует, что автомат β имеет такое состояние, что если β установить в это состояние и на входы схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ подать последовательность $\vec{\mathcal{U}}$, то при прохождении ее отрезка $\vec{\mathcal{U}}(U, V, W)$ не различаются последовательности, возникающие на выходах любых двух соответствующих друг другу блоков из $O(\beta)$ и $O(\beta^*)$ схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$. В частности, это означает, что на входы блоков β и β^* подается одна и та же последовательность. Ее начальный отрезок $\vec{\mathcal{U}}'$ длины t является последовательностью, достаточно различающей все автоматы с k состояниями. Пусть σ'_β и σ'_{β^*} — те состояния автоматов β и β^* , в которые эти автоматы переходят после подачи на их входы последовательности $\vec{\mathcal{U}}'$. Ясно, что состояния σ'_β и σ'_{β^*} эквивалентны между собой.

Рассмотрим отдельно (вне схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$) автоматы β и β^* с начальными состояниями σ'_β и σ'_{β^*} соответственно. Пусть σ''_β — произвольное отличное от σ'_β состояние автомата β , и пусть $\vec{\mathcal{P}}$ — входная для автомата β последовательность, которая переводит его из состояния σ'_β в состояние σ''_β . Ввиду сильной связности автомата β такая последовательность существует. Предположим, что если на автомат β^* в состоянии σ'_{β^*} подается эта же последовательность, то он переходит в некоторое состояние σ''_{β^*} . Можно утверждать, что состояния σ''_β и σ''_{β^*} эквивалентны: если бы это было не так, то и состояния σ'_β и σ'_{β^*} не были бы эквивалентными. В силу произвольности состояния σ''_β можно утверждать, что для каждого состояния автомата β найдется эквивалентное состояние автомата β^* . По предположению о допустимых неисправностях число состояний автомата β^* не больше числа состояний автомата β . Отсюда следует, что для каждого состояния автомата β^* найдется эквивалентное состояние автомата β . Это означает, что β и β^* являются эквивалентными автоматами.

Справедливость утверждения (b) леммы 2 в случае, когда β является тривиальным автоматом, очевидна.

Доказательство утверждения (a) леммы 2 мы не приводим, оно содержится в [8, с. 58–61].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В [8, с. 61, 62] приведено доказательство утверждения (b) леммы 2. Оно почти совпадает с приведенным здесь. Однако в [8] говорится об эквивалентности тех состояний автоматов β и β^* , из которых они переходят в состояния σ'_β и σ'_{β^*} , тогда как автор имел в виду лишь эквивалентность состояний σ'_β и σ'_{β^*} . Автор приносит извинения за допущенную в [8] небрежность.

Лемма 3. Пусть заданы произвольные C^* , $\sigma(C^*)$ и $\sigma(C)$. Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$ при любых β^* из \mathcal{E}^* , то найдется состояние $\sigma'(C^*)$ схемы C^* такое, что для любой последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ n -разрядных булевых векторов выполняется равенство

$$S_a(A^*, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}) = S_a(A^*, C^*, \sigma'(C^*), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$ при любых β^* из \mathcal{E}^* . Тогда по лемме 2 в схеме C^* исправны все блоки β^* из \mathcal{E}^* . Это, в частности, означает что при любом i , $1 \leq i \leq N$, блоки β_i из C и β_i^* из C^* эквивалентны между собой как неинициальные автоматы, т. е. для каждого состояния автомата β_i найдется эквивалентное ему состояние автомата β_i^* и для каждого состояния автомата β_i^* найдется эквивалентное ему состояние автомата β_i . Пусть $\sigma(C) = (\sigma_1(C), \dots, \sigma_N(C))$. Обозначим через

$\sigma'(C^*) = (\sigma'_1(C^*), \dots, \sigma'_N(C^*))$ такое состояние схемы C^* , что при любом i , $1 \leq i \leq N$, состояния $\sigma_i(C)$ и $\sigma'_i(C^*)$ эквивалентны, т. е. при поступлении произвольной последовательности r -разрядных булевых векторов на вход β_i в состоянии $\sigma_i(C)$ и на вход β_i^* в состоянии $\sigma'_i(C^*)$ на выходах автоматов β_i и β_i^* появляются одинаковые последовательности. Пусть схема C^* находится в состоянии $\sigma'(C^*)$. В схеме C^* вне части $\mathcal{E}(C^*)$ находятся только тривиальные блоки Q . В условиях леммы 3 из леммы 2 следует, что только эти блоки могут работать не так, как работают соответствующие блоки в C , причем число неправильно работающих блоков Q не превышает m . Правильно работающие схемы D , состоящие из тривиальных блоков, исправляют в C^* все ошибки, связанные с неправильной работой блоков Q . Схема C в состоянии $\sigma(C)$ оказывается эквивалентной схеме C^* в состоянии $\sigma'(C^*)$. Отсюда следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. Если для каждого β^* из \mathcal{E}^* схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$, то для любого нетривиального блока β^* из C^* по последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{U}})$ можно указать состояние, в которое переходит блок β^* после подачи на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ последовательности $\vec{\mathcal{U}}$ при условии, что перед появлением этой последовательности схема C^* находилась в состоянии $\sigma(C^*)$.

Доказательство. Предположим, что β^* — нетривиальный блок. Рассмотрим фрагмент схемы C^* , содержащий блок β^* и примыкающие к нему пары блоков K^* (рис. 7). По описанию преобразования \mathcal{W}_3 (см. рис. 6) именно так в C^* выглядит соединение блока β^* с ближайшими соседями. Пусть для каждого β^* из \mathcal{E}^* схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$.

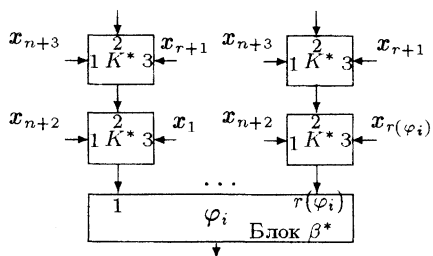


Рис. 7

Тогда по лемме 2 получаем, что в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ исправны все блоки из \mathcal{E}^* . Так как блоки β^* и K^* , изображенные на рис. 7, принадлежат множеству \mathcal{E}^* , то по утверждению (b) леммы 2 они исправны. Блок β^* имеет метку $(U, V, W) = (\varphi_i, K, *)$. Согласно (2.1) блоку с такой меткой соответствует последовательность $\vec{\mathcal{U}}(U, V, W) = \vec{\mathcal{U}}_{10}$. Из рис. 7 и табл. 1

видно, что если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ подается подпоследовательность $\vec{\mathcal{U}}_{10}$ последовательности $\vec{\mathcal{U}}$, то на входы блока β^* подается последовательность r -разрядных булевых векторов $\tilde{a}_r(1), \tilde{a}_r(2), \dots, \tilde{a}_r(t)$,

$\tilde{a}_r(1), \tilde{a}_r(2), \dots, \tilde{a}_r(t)$, остаточная различающая все автоматы с k состояниями. Отсюда следует, что по реакции исправного блока β^* на последовательность, поданную на его входы, можно остаточно отличить инициальный автомат β^* от других инициальных автоматов из рассматриваемого класса. Это, в частности, означает, что можно узнать, в какое состояние переходит β^* после подачи последовательности $\vec{\mathcal{U}}_{10}$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$. В последовательности $\vec{\mathcal{U}}$ за подпоследовательностью $\vec{\mathcal{U}}_{10}$ следует подпоследовательность $\vec{\mathcal{U}}_{11}$. Как следует из табл. 1 и рис. 7, в указанных условиях при поступлении последовательности $\vec{\mathcal{U}}_{11}$ на входы исправного блока β^* , находящегося в уже известном состоянии, подается последовательность r -разрядных векторов $\tilde{a}_r(1), \tilde{a}_r(2), \dots, \tilde{a}_r(t)$. Автомат β^* исправен, значит известна его функция переходов. Поэтому можно определить, в какое состояние переходит блок β^* после подачи подпоследовательности $\vec{\mathcal{U}}_{11}$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$.

В последовательности $\vec{\mathcal{U}}$ за подпоследовательностью $\vec{\mathcal{U}}_{11}$ следует $\vec{\mathcal{U}}_{01}$. Из рис. 7 и табл. 1 видно, что если $\vec{\mathcal{U}}_{01}$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$, то на входы блока β^* поступает последовательность $2t$ векторов, в которой первые t векторов состоят из нулей, а остальные — из единиц. Эта ситуация аналогична рассмотренной выше: на вход исправного автомата с известной функцией переходов, находящегося в известном состоянии, подается известная последовательность. Ясно, что можно определить состояние, в которое переходит автомат β^* . Лемма 4 доказана.

2.5. О переходе схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ в заданное состояние.

Для описания последовательности $\vec{\mathcal{W}}$, переводящей схему C^* в заданное состояние, введем обозначения:

◇ $\sigma_i(C)$ — состояние блока β_i схемы C , находящейся в состоянии $\sigma(C)$.

◇ $\vec{\mathcal{R}}_i(\sigma', \sigma'')$ — кратчайшая последовательность r -разрядных булевых векторов, переводящая блок β_i схемы C из состояния σ' в состояние σ'' (σ' и σ'' — произвольные состояния блока β_i).

◇ $\sigma(\vec{\mathcal{R}}, \sigma(C))$ — состояние схемы C , в которое она переходит после подачи на входы схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ последовательности $\vec{\mathcal{R}}$, состоящей из $(n+4)$ -разрядных булевых векторов, при условии, что перед появлением последовательности $\vec{\mathcal{R}}$ схема C находилась в состоянии $\sigma(C)$. (Это обозначение принято во введении, здесь оно дублируется для удобства.)

◇ Пусть $\vec{\mathcal{R}}$ есть последовательность s -разрядных векторов, а $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_t)$ является t -разрядным вектором (s и t — произвольные

натуральные числа). Обозначим через $\vec{\mathcal{R}} \otimes \vec{w}$ последовательность, полученную из $\vec{\mathcal{R}}$ следующей заменой каждого s -разрядного вектора на $(s+t)$ -разрядный: значения первых s разрядов в новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние t разрядов равны w_1, \dots, w_t .

◊ Для каждого i , $1 \leq i \leq N$, положим

$$\vec{b}(i) = \underbrace{(b_{r+1}, \dots, b_{r+\lceil \log_2(N+3) \rceil}, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0)}_{n+4-r \text{ разрядов}},$$

где $\mu(b_{r+1}, \dots, b_{r+\lceil \log_2(N+3) \rceil}) = i$ (функция μ определена в п. 1.1; $\mu(y_1, \dots, y_t) = \sum_{i=1}^t y_i 2^{t-i}$).

Последовательность $\vec{\mathcal{W}}(\sigma'(C), \sigma''(C))$. Пусть $\sigma'(C)$ и $\sigma(C)$ — два произвольных состояния схемы C . Определим рекуррентно последовательности $\vec{\mathcal{U}}_i$, $\vec{\mathcal{M}}_i$ и $\vec{\mathcal{W}}(\sigma'(C), \sigma(C))$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathcal{U}}_1 &= \vec{\mathcal{R}}_1(\sigma'_1(C), \sigma''_1(C)) \otimes \vec{b}(i); \\ \vec{\mathcal{M}}_1 &= \vec{\mathcal{U}}_1; \\ \vec{\mathcal{U}}_i &= \vec{\mathcal{R}}_i(\sigma'_i(C), \sigma_i(\vec{\mathcal{M}}_{i-1}, \sigma''(C)) \otimes \vec{b}(i), \quad 2 \leq i \leq N; \\ \vec{\mathcal{M}}_i &= \vec{\mathcal{M}}_{i-1} \bullet \vec{\mathcal{U}}_i, \quad 2 \leq i \leq N; \\ \vec{\mathcal{W}}(\sigma'(C), \sigma''(C)) &= \vec{\mathcal{U}}_1 \bullet \vec{\mathcal{U}}_2 \bullet \dots \bullet \vec{\mathcal{U}}_N. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

О длине последовательности $\vec{\mathcal{W}} = \vec{\mathcal{U}}_1 \bullet \vec{\mathcal{U}}_2 \bullet \dots \bullet \vec{\mathcal{U}}_N$. По определению последовательности $\vec{\mathcal{U}}_i$ (см. (2.5)) ее длина равна длине последовательности $\vec{\mathcal{R}}_i(\sigma'_i(C), \sigma_i(\vec{\mathcal{M}}_{i-1}, \sigma''(C)))$, переводящей автомат β_i из состояния $\sigma_i(\vec{\mathcal{M}}_{i-1}, \sigma''(C))$ в состояние $\sigma'_i(C)$. Известно [1], что для автомата, имеющего не более k состояний, длина такой последовательности меньше k . Отсюда получаем

$$|\vec{\mathcal{W}}| < kN. \quad (2.6)$$

Лемма 5. Пусть заданы схема A^* и два состояния $\sigma'(C)$ и $\sigma''(C)$ схемы C из $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$. Если $\vec{\mathcal{W}} = \vec{\mathcal{W}}(\sigma'(C), \sigma''(C))$ является последовательностью, определенной в (2.5), то выполняется равенство $\sigma(\vec{\mathcal{W}}, \sigma''(C)) = \sigma'(C)$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\vec{\mathcal{W}}$ поступает на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$, в которой схема C находится в состоянии $\sigma''(C)$. Определим, в какие состояния переходит нетривиальный блок β_i после поступления на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$

отрезков $\vec{M}_i, \vec{M}_{i+1}, \dots, \vec{M}_{N-1}, \vec{M}_N$ последовательности \vec{W} . Все векторы последовательности \vec{W} в последних трех разрядах имеют нулевые значения. Поэтому если векторы из \vec{W} подаются на схему $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$, то на первые входы блоков K и Q поступают нулевые значения. Эти блоки в схеме C исправны (схема C с неисправностями обозначается через C^*). Блоки K , работая в таких условиях, на своих выходах просто повторяют значения, которые поступают на их вторые входы. Схемы R таковы, что в тех же условиях они на своих выходах повторяют те значения, которые появляются на их входах u (см. рис. 5). Фактически каждая схема K и R работает как проводник, соединяющий узел схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$, к которому подключен вход блока K или вход u схемы R , с входом какого-то другого блока из $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$. Поэтому для описания работы фрагмента схемы C , полученного из фрагмента схемы B_0 с помощью преобразований \mathcal{W}_2 и \mathcal{W}_3 , в условиях, когда на схему $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ подаются векторы из \vec{W} , можно использовать рис. 4, игнорируя тот факт, что при преобразованиях \mathcal{W}_2 и \mathcal{W}_3 в изображенной на рис. 4 схеме некоторые проводники заменяются на схемы K и R .

Пусть на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ поступила последовательность $\vec{M}_{i-1} = \vec{\mathcal{U}}_1 \bullet \dots \bullet \vec{\mathcal{U}}_{i-1}$, в результате чего блок β_i переходит в состояние $\sigma_i(\vec{M}_{i-1}, \sigma''(C))$. Рассмотрим последующие состояния блока β_i , если теперь на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ поступают друг за другом последовательности $\vec{\mathcal{U}}_j$, $i \leq j \leq N$. (Последовательности, появляющиеся при этом на некоторых узлах схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$, показаны в табл. 3.)

а) Пусть на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ подается $\vec{\mathcal{U}}_i$. Из (2.5) и описания подключения схемы E (см. рис. 4) следует, что на входы схемы E поступает последовательность длины $|\vec{\mathcal{U}}_i|$, каждый член которой совпадает с таким вектором $\tilde{e} = (b_{r+1}, \dots, b_{r+\lceil \log_2(N+3) \rceil})$, что $\mu(b_{r+1}, \dots, b_{r+\lceil \log_2(N+3) \rceil}) = i$. Согласно (1.1) при поступлении вектора \tilde{e} на входы схемы E на ее i -м выходе появляется 0. Если на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ подать последовательность $\vec{\mathcal{U}}_i$, то на i -м выходе схемы E появится нулевая последовательность длины $|\vec{\mathcal{U}}_i|$. Теперь выясним, какая последовательность появляется на входах блока β_i . Из соединений (см. рис. 4) видно, что это та последовательность, которая появляется на выходах блоков F , присоединенных к входам блока β_i . Из определения последовательности $\vec{\mathcal{U}}_i$ следует, что при ее поступлении на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ на полюс x_{n+1} будут поступать единичные значения. В этих условиях на входы блока β_i поступает последовательность $\vec{\mathcal{R}}_i(\sigma'(C), \sigma_i(\vec{M}_{i-1}, \sigma''(C)))$. Эта последовательность переводит β_i из состояния $\sigma_i(\vec{M}_{i-1}, \sigma''(C))$ в состояние $\sigma'_i(C)$. (В строке табл. 3, содержащей $\vec{\mathcal{U}}_i$, указаны описываемые последовательности.)

Т а б л и ц а 3

| Вход в $S(\dots)$ | i -й выход схемы E | Вход блока β_i | β_i переходит в состояние |
|---------------------------|---------------------------|---|--|
| $\vec{\mathcal{M}}_{i-1}$ | | | $\sigma_i(\vec{\mathcal{M}}_{i-1}, \sigma''(C))$ |
| $\vec{\mathcal{U}}_i$ | $0 \dots 0$ | $\vec{\mathcal{R}}_i(\sigma'_i(C), \sigma_i(\vec{\mathcal{M}}_{i-1}, \sigma''(C)))$ | $\sigma'_i(C)$ |
| $\vec{\mathcal{U}}_{i+1}$ | $1 \dots 1$ | $\tilde{0}_r \dots \tilde{0}_r$ | $\sigma'_i(C)$ |
| \dots | \dots | \dots | \dots |
| $\vec{\mathcal{U}}_N$ | $1 \dots 1$ | $\tilde{0}_r \dots \tilde{0}_r$ | $\sigma'_i(C)$ |

б) Пусть на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ подается $\vec{\mathcal{U}}_{i+1}$. В этом случае согласно (1.1) на i -м выходе схемы E появляется последовательность единиц, так как выполняется неравенство $\mu(b_{r+1}, \dots, b_{r+\lceil \log_2 N \rceil}) > i$. В моменты, когда на входы схемы $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ поступает $\vec{\mathcal{U}}_{i+1}$, на полюс x_{n+1} поступают единицы. В этом случае на входы блока β_i поступает конкатенация, состоящая из $|U_{i+1}|$ векторов $\tilde{0}_r$. Нулевые векторы сохраняют состояние $\sigma'_i(C)$, в котором блок β_i оказался после поступления на $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ последовательности U_i . (В табл. 3 в строке, содержащей $\vec{\mathcal{U}}_{i+1}$, указаны соответствующие последовательности и состояние.)

с) Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения в случаях, когда на входы схемы подаются последовательности $\vec{\mathcal{U}}_{i+2}, \vec{\mathcal{U}}_{i+3}, \dots, \vec{\mathcal{U}}_N$, убеждаемся, что после поступления каждой из них блок β_i будет оставаться в состоянии $\sigma'_i(C)$.

Лемма 5 доказана.

Правильные пары состояний. Предположим, что в схеме C^* все нетривиальные блоки исправны. В частности, это означает, что если β_i и β_i^* — блоки с номером i , $1 \leq i \leq N$, в нумерации $\mathcal{N}(C)$ в схемах C и C^* соответственно, то для каждого состояния $\sigma(\beta_i^*)$ блока β_i^* найдется такое состояние $\sigma(\beta)$ блока β , что автомат β_i с начальным состоянием $\sigma(\beta_i)$ эквивалентен автомату β_i^* с начальным состоянием $\sigma(\beta_i^*)$. Пусть $\sigma(C)$ и $\sigma(C^*)$ — два таких состояния схем C и C^* , что если C и C^* находятся в состояниях $\sigma(C)$ и $\sigma(C^*)$ соответственно, то при любом i , $1 \leq i \leq N$, блоки β_i и β_i^* находятся в эквивалентных между собой состояниях. Такую пару состояний $\sigma(C)$ и $\sigma(C^*)$ назовем *правильной парой состояний*. Аналогично определяются правильные пары состояний для состояний схем B и C , и наконец, в случае, когда в C^* исправны все нетривиальные блоки, для состояний схем B и C^* .

Лемма 6. Пусть в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ исправны все блоки из \mathcal{E}^* , пусть $(\sigma'(C), \sigma'(C^*))$ и $(\sigma''(C), \sigma''(C^*))$ являются правильными парами состояний и $\vec{\mathcal{W}} = \vec{\mathcal{W}}((\sigma'(C), \sigma''(C)))$ есть последовательность из (2.5). Тогда $\sigma(\vec{\mathcal{W}}, \sigma''(C^*)) = \sigma'(C^*)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда в C^* неисправными могут быть лишь блоки Q . Пусть β_i^* — нетривиальный блок из C^* . Рассмотрим его размещение в схеме B_0 (см. рис. 4). Согласно описанию преобразования \mathcal{W}_2 на линиях между узлами a_j , $1 \leq j \leq r$, и входами схемы F появляются схемы R , содержащие блоки Q . При преобразовании \mathcal{W}_3 добавляются только блоки K . Таким образом, в условиях леммы 6 схемы E и F вместе с добавленными в них блоками K исправны. В $\vec{\mathcal{W}}$ все векторы таковы, что их разряды с номерами $n+2$, $n+3$ и $n+4$ равны 0. Если такие векторы подаются на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$, то все блоки K работают как проводники, соединяющие их вторые входы с их же выходами. Все векторы в $\vec{\mathcal{W}}$ таковы, что их $(n+1)$ -е разряды равны 1. Если $\vec{\mathcal{W}}$ подается на схему $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$, то значения, реализуемые на выходах схем F , зависят от значений, появляющихся на вторых и четвертых входах схем F и не зависят от значений, появляющихся на их третьих входах. На второй и четвертый входы поступают значения, не зависящие от работы блоков Q . Таким образом, если на входы схем $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ и $S(A^*, C, \tilde{x}_{n+4})$ поступает последовательность $\vec{\mathcal{W}}$, то при любом i , $1 \leq i \leq N$, на входы блока β_i из C и на входы блока β_i^* из C^* поступают одинаковые последовательности. Отсюда, а также из предположения леммы о том, что $(\sigma'(C), \sigma'(C^*))$ и $(\sigma''(C), \sigma''(C^*))$ являются правильными парами состояний, и леммы 5 непосредственно следует утверждение леммы 6.

Заключение

Убедимся, что определенная в § 1 схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+4})$ обладает всеми свойствами, перечисленными в утверждении теоремы. Пусть $\vec{\mathcal{U}}$ (последовательность из теоремы) есть последовательность $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{U}}_{10} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{11} \bullet \vec{\mathcal{U}}_{01}$, определенная в § 2. Она образована $(n+4)$ -разрядными булевыми векторами; согласно (2.2) ее длина равна $[6 \cdot 4^{k+1} k^2 \ln(2k)]$.

а) Из (1.7) следует, что $L(C) < c_5 m L(B)$. Пусть $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_s$ — окрестности блоков из \mathcal{E}^* . Поскольку число блоков в C не превышает $L(C)$, то из (1.7) следует, что $s < c_5 m L(B)$. При любом целом $r > 1$ найдутся такие константы c_6 и c_7 , что $L(\mathcal{D}_i) < c_6 r < c_7$. Следовательно, справедливо утверждение (а) теоремы.

б) Утверждение (б) теоремы следует из леммы 1.

с) Определим разбиение множества частей $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1, \dots, s}$ на классы

$\mathcal{D}(1, C^*)$ и $\mathcal{D}(2, C^*)$ согласно следующему правилу. Пусть \mathcal{D}_i есть окрестность блока β^* . Если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной схемой относительно блока β^* , то \mathcal{D}_i относится к классу $\mathcal{D}(2, C^*)$. В противном случае \mathcal{D}_i относится к классу $\mathcal{D}(1, C^*)$.

Из замечания 2 следует, что для разбиения множества частей $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1, \dots, s}$ на классы $\mathcal{D}(1, C^*)$ и $\mathcal{D}(2, C^*)$ достаточно знать последовательность $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{U}})$ и не требуется знать, в каком состоянии находилась схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ перед поступлением на нее последовательности $\vec{\mathcal{U}}$ и какие неисправности содержатся в A^* и B^* .

Рассмотрим два варианта, зависящие от того, является ли пустым класс $\mathcal{D}(1, C^*)$.

ВАРИАНТ 1. Класс $\mathcal{D}(1, C^*)$ не является пустым. В этом случае из утверждения (а) леммы 2 непосредственно следует утверждение (с.1) теоремы.

ВАРИАНТ 2. Класс $\mathcal{D}(1, C^*)$ пуг. В этом случае из определения класса $\mathcal{D}(1, C^*)$ следует, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+4})$ является $\vec{\mathcal{U}}$ -совершенной относительно $(\beta^*, \sigma(C^*))$ при любых β^* из \mathcal{E}^* . Это предположение назовем кратко *условием \mathcal{F}* .

По лемме 1 при любом A^* для каждого состояния $\sigma(B)$ схемы B найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C , что для любой последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ булевых n -разрядных векторов выполняется равенство

$$S_a(A^*, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) = S_a(A^*, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}). \quad (2.7)$$

При условии \mathcal{F} по лемме 3 для состояния $\sigma(C)$ схемы C найдется такое состояние $\sigma'(C^*)$ схемы C^* , что для любой последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ булевых n -разрядных векторов выполняется равенство

$$S_a(A^*, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}) = S_a(A^*, C^*, \sigma'(C^*), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}). \quad (2.8)$$

Определим состояния $\sigma''(C^*)$, $\sigma''(C)$ и $\sigma'(C^*)$:

- (i) Состояние $\sigma''(C^*)$ определяется из равенства $\sigma''(C^*) = \sigma(\vec{\mathcal{U}}, \sigma(C^*))$. На основании леммы 4 можно утверждать, что состояние $\sigma(\vec{\mathcal{U}}, \sigma(C^*))$ может быть определено по последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(C^*), \vec{\mathcal{U}})$.
- (ii) $\sigma''(C)$ — состояние, образующее правильную пару с состоянием $\sigma''(C^*)$.
- (iii) $\sigma'(C^*)$ — состояние, образующее правильную пару с состоянием $\sigma'(C)$.

Пусть $\vec{\mathcal{W}} = \vec{\mathcal{W}}(\sigma'(C), \sigma''(C))$ — последовательность, определяемая равенствами (2.5). При условии \mathcal{F} из лемм 2 и 6 следует, что

$$\sigma(\vec{\mathcal{W}}, \sigma''(C^*)) = \sigma'(C^*).$$

Поэтому

$$\sigma(\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}, \sigma(C^*)) = \sigma(\vec{\mathcal{W}}, \sigma(\vec{\mathcal{U}}, \sigma(C^*))) = \sigma(\vec{\mathcal{W}}, \sigma''(C^*)) = \sigma'(C^*).$$

Отсюда следует, что выполняется равенство $\sigma(\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}, \sigma(C^*)) = \sigma'(C^*)$ и для произвольной последовательности $\vec{\mathcal{P}}$ булевых n -разрядных векторов

$$S_a(A^*, C^*, \sigma'(C^*), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}, \sigma(C^*)), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}). \quad (2.9)$$

Объединяя равенства (2.7), (2.8) и (2.9), получаем

$$\begin{aligned} S_a(A^*, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) &= S_a(A^*, C, \sigma(C), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}) \\ &= S_a(A^*, C^*, \sigma'(C^*), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}, \sigma(C^*)), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}). \end{aligned}$$

Оставив лишь крайние члены в этой цепочке равенств, имеем

$$S_a(A^*, B, \sigma(B), \vec{\mathcal{P}}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(\vec{\mathcal{U}} \bullet \vec{\mathcal{W}}, \sigma(C^*)), \vec{\mathcal{P}}_{(0000)}).$$

Вместе с неравенством (2.6) это означает, что справедливо предложение (i) из утверждения (с.2) теоремы.

При условии \mathcal{F} предложение (ii) утверждения (с.2) теоремы следует из неравенства (2.6) и лемм 2 и 6.

Все утверждения теоремы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
2. Горяшко А. П. Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. М.: Наука, 1987.
3. Носков В. Н. Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискретная математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 3–23.
4. Носков В. Н. Преобразование схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля // Дискретный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 142–165. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 27).
5. Носков В. Н. Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 60–96.
6. Носков В. Н. О преобразованиях комбинационных схем, повышающих надежность их частей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 33–61.
7. Носков В. Н. О восстановлении правильной работы неисправных частей комбинационных схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 4. С. 47–74.

8. Носков В. Н. Диагностика частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 1. С. 44–64.
9. Носков В. Н. О преобразованиях, повышающих надежность частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 3. С. 10–41.
10. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 71–76.
11. Трахтенброт Б. А., Барздин Я. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.
12. Шевченко В. И. О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоемкостью тестирования // Комбинаторно-логические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985. С. 133–143.
13. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
14. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 21, N 1. P. 124–141.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: noskov@math.nsc.ru

Статья поступила
20 апреля 2000 г.