ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2000. Серия 1. Том 7, № 3, 72–85

УДК 519.174

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РАСКРАСКИ РЕБЕР МУЛЬТИГРАФОВ*)

В. А. Ташкинов

Пусть $n(G)$, $m(G)$, $\Delta(G)$ и $q(G)$ обозначают соответственно число вершин, число ребер, максимальную степень вершин и хроматический класс мультиграфа G. М. К. Гольдберг [5] предположил, что существует эффективный алгоритм раскраски ребер произвольного мультиграфа G в $\max\{q(G), \Delta(G)+1\}$ цветов. Он же в [3] предположил, что для любого мультиграфа G с хроматическим классом $q(G) > \Delta(G)+1$ справедливо равенство

$$q(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{m(H)}{\left\lfloor \frac{n(H)}{2} \right\rfloor} \right\rceil.$$

Т. Нишизеки и К. Кашиваги [7] доказали это равенство для мультиграфов с $q(G) > \frac{11\Delta(G)+8}{10}$ при помощи эффективного алгоритма раскраски ребер произвольного мультиграфа G в $\max\{q(G), \lfloor\frac{11\Delta(G)+8}{10}\rfloor\}$ цветов. В данной статье строится простой эффективный алгоритм раскраски ребер произвольного мультиграфа, с помощью которого дается более короткое доказательство этих результатов.

Введение

Пусть $V(G)$ и $E(G)$ — множества вершин и ребер мультиграфа G соответственно, $m(G) = |E(G)|$ и $n(G) = |V(G)|$. Мультиграф H называется *частью* мультиграфа G (этот факт обозначается через $H \subseteq G$), если $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Часть $P = \langle v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$ мультиграфа G называется (простой) *цепью* длины $t = n(P) - 1 \geqslant 0$, если для любого i, $1 \leqslant i \leqslant t$, ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i. Число $s_G(v)$ ребер мультиграфа G, инцидентных вершине $v \in V(G)$, называется *степенью* вершины v. *Максимальной степенью* вершин мультиграфа G называется величина $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} s_G(v)$.

Пусть $E \subseteq E(G)$ непусто. Отображение $\Phi : E \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ называется (правильной) *раскраской* ребер множества E в k цветов,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99–01–00581 и 00–01–00916).

если $\Phi(e_1) \neq \Phi(e_2)$ для любой пары различных ребер $e_1, e_2 \in E$, инцидентных общей вершине. Всякое ребро цвета φ будем называть также φ-ребром. В дальнейшем определения «правильная» перед словом «раскраска» и «простая» перед словом «цепь» будут опускаться. Если $E = E(G)$, то Φ называется *раскраской* ребер мультиграфа G в k цветов. Наименьшее $q(G)$, для которого существует раскраска ребер мультиграфа G в $q(G)$ цветов, называется *хроматическим классом* мультиграфа G. Связный мультиграф G называется *критическим*, если $q(G) > \Delta(G)$ и $q(H) < q(G)$ для любого $H \subset G$.

Ясно, что $q(G) \geqslant \Delta(G)$ для любого мультиграфа G. Для получения верхних оценок хроматического класса обычно предлагаются алгоритмы раскраски ребер. Классическим примером является алгоритм, с помощью которого В. Г. Визинг в [1] доказал, что $q(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$ для любого мультиграфа G с максимальной кратностью ребер $\mu(G)$. Изящный алгоритм предложил Х. Кирстед [6] при доказательстве верхней оценки хроматического класса мультиграфов специального вида. Наконец, М. К. Гольдберг в [5] обратил внимание на то, что предложенный им в [4] алгоритм раскраски ребер произвольного мультиграфа в $\max\{q(G), \lfloor\frac{9\Delta(G)+6}{8}\rfloor\}$ цветов эффективен, и высказал следующее предположение.

Гипотеза 1. Существует эффективный алгоритм раскраски ребер произвольного мультиграфа G в $\max\{q(G), \Delta(G)+1\}$ цветов.

Параллельно изучалась связь хроматического класса мультиграфа с его структурой. Эту связь часто выражают через понятие элементарности. Мультиграф G называется *элементарным* [4], если $q(G) = w(G)$, где величина

$$w(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{m(H)}{\lfloor\frac{n(H)}{2}\rfloor} \right\rceil$$

есть нижняя граница для хроматического класса произвольного мультиграфа G. Любой из известных примеров неэлементарного мультиграфа G с $qG) > \Delta(G)$ имеет $q(G) = \Delta(G) + 1$. В связи с этим М. К. Гольдберг в [3] высказал следующее предположение.

Гипотеза 2. Всякий мультиграф G с $q(G) > \Delta(G) + 1$ элементарен.

Первым приближением к доказательству этого предположения можно считать результат В. Г. Визинга, доказавшего в [2] элементарность мультиграфов G с $q(G) = \lfloor\frac{3\Delta(G)}{2}\rfloor$. М. К. Гольдберг [4] доказал элементарность мультиграфов с $q(G) > \frac{9\Delta(G)+6}{8}$. Наконец, Т. Нишизеки и К. Каշиваги [7] доказали элементарность мультиграфов G с $q(G) > \frac{11\Delta(G)+8}{10}$ при помощи эффективного алгоритма раскраски ребер произвольного мультиграфа G в $\max\{q(G), \lfloor\frac{11\Delta(G)+8}{10}\rfloor\}$ цветов.

Для того чтобы сформулировать результаты данной работы, примем некоторые предварительные соглашения. Представим себе, что нужно выполнить очередной шаг какого-либо алгоритма раскраски ребер, заключающийся в окраске очередного ребра. В этот момент должны быть зафиксированы:

1) мультиграф G,

2) подмножество $E \subset E(G)$,

3) натуральное число $k > \Delta(G)$,

4) раскраска Φ ребер из E в k цветов и

5) неокрашенное ребро e с концами a, b.

Так как $k > \Delta(G)$, то для любой вершины v определено и непусто множество $O(v)$ цветов, отсутствующих в вершине v, т. е. множество всех цветов, которыми не окрашено ни одно ребро, инцидентное вершине v. Для любого $V \subseteq V(G)$ положим $O(V) = \bigcup\limits_{v \in V} O(v)$.

Подмножество $V \subseteq V(G)$ называется *элементарным*, если $O(v_1) \cap O(v_2) = \varnothing$ для любой пары различных вершин v_1 и v_2. Подмножество $V \subseteq V(G)$ называется *замкнутым*, если ни одно из ребер, соединяющих множества V и $V(G) \setminus V$, не окрашено никаким цветом из $O(V)$. Легко видеть, что пересечение замкнутых множеств замкнуто. Это позволяет определить *замыкание* $\overline{V}$ произвольного подмножества $V \subseteq V(G)$ как наименьшее среди замкнутых подмножеств множества $V(G)$, содержащих данное подмножество V. Теперь основной результат данной работы может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1)–5) *и замыкание* $\overline{\{a, b\}}$ *множества* $\{a, b\}$ *неэлементарно, то существует раскраска* Φ' *множества* $E \cup \{e\}$ *в* k *цветов.*

Для доказательства этого утверждения в следующем разделе предлагается эффективный алгоритм раскраски ребер произвольного мультиграфа, являющийся обобщением упомянутых выше алгоритмов В. Г. Визинга и Х. Кирстеда. Наконец, в последнем разделе из теоремы 1 в качестве следствий выводятся результаты Т. Нишизеки и К. Кашиваги [7]. Работа была выполнена независимо и практически одновременно*) с ними, но не была опубликована. Здесь публикуется новое, более простое и короткое доказательство этого результата.

*) Работа с подробными доказательствами в декабре 1989 г. докладывалась на семинаре «Экстремальные задачи на графах» в Институте математики СО АН СССР.

1. Основной результат

Предположим, что выполнены условия 1)–5). Тогда цитируемый результат Х. Кирстеда может быть сформулирован в виде следующих определения и леммы.

Определение 1. Цепь $P = \langle v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$ длины $t \geqslant 0$ будем называть *цепью Кирстеда* относительно подмножества $X \subseteq V(G)$, если

(i) $v_0 \in X$ и $v_i \notin X$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant t$;

(ii) $\Phi(e_j) \in O(X \cup \{v_1, \ldots, v_{j-2}\})$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant t$;

(iii) множество $X \cup V(P)$ неэлементарно.

Лемма 2 ([6]). *Если существует цепь Кирстеда P относительно множества $\{a, b\}$, то существует раскраска Φ' множества $E \cup \{e\}$ в k цветов.*

Для доказательства теоремы 1 введем следующее определение.

Определение 2. Часть $Q = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_T, w_T \rangle$ мультиграфа G с $T > 0$ ребрами $f_1, \ldots, f_T$ и $T + 1$ вершинами $w_0, \ldots, w_T$ называется *упорядочением* длины T, если

(I) $f_1 = e$ и $\{w_0, w_1\} = \{a, b\}$;

(II) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant T$, ребро f_i соединяет вершины w_i и w_j, где $0 \leqslant j < i$;

(III) $\Phi(f_i) \in O(\{w_0, \ldots, w_{i-1}\})$ для любого i, $1 < i \leqslant T$.

Ясно, что для любого I, $0 < I \leqslant T$, начальный отрезок $Q_I = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_I, w_I \rangle$ произвольного упорядочения $Q \subseteq G$ является упорядочением и последняя вершина w_I любого такого упорядочения Q_I имеет степень 1, а потому не принадлежит никакому циклу мультиграфа Q_I. Это означает, что всякое упорядочение не имеет циклов и, следовательно, является деревом. Из определений сразу следует, что если какая-либо цепь $P = \langle v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$ является цепью Кирстеда длины t относительно множества вершин некоторого упорядочения $Q = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_T, w_T \rangle$ длины T, то объединение $U = Q \cup P = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_T, w_T, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$ является упорядочением длины $T + t$.

С другой стороны, если множество вершин $V(Q)$ некоторого упорядочения Q длины T не замкнуто, то для некоторого $\varphi \in O(V(Q))$ существует φ-ребро f_{T+1}, соединяющее $V(Q)$ с некоторой вершиной $w_{T+1} \in V(G) \setminus V(Q)$. По определению 2 это упорядочение можно удлинить, добавив в его конец ребро f_{T+1} и вершину w_{T+1}. Поэтому всякое упорядочение Q является начальным отрезком некоторого максимального упорядочения Q' с $V(Q') = \overline{\{a, b\}}$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что выполнены условия 1)–5) и множество $\overline{\{a, b\}}$ неэлементарно. Если неэлементарно

множество $\{a, b\}$, то существует цвет $\varepsilon \in O(a) \cap O(b)$. Окрасим этим цветом ребро e. Теорема доказана.

Пусть множество $\{a, b\}$ элементарно. Так как множество вершин $\{a, b\}$ любого максимального упорядочения неэлементарно, то по индукции легко строится такое упорядочение $U = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_T, w_T, e_1, v_1 \rangle$ длины $T + 1 \geqslant 2$ с неэлементарным множеством вершин, что его начальный отрезок Q длины T имеет элементарное множество вершин. По определению 2 ребро e_1 цвета $\Phi(e_1) \in O(V(Q))$ соединяет вершину v_1 с некоторой вершиной $v_0 \in V(Q)$. Пусть $P = \langle v_0, e_1, v_1 \rangle$. По определению 1 P является цепью Кирстеда длины $t = 1$ относительно множества $V(Q)$.

Таким образом, во-первых, существуют натуральные числа T и t, упорядочение Q длины T с элементарным множеством вершин и цепь Кирстеда длины t относительно множества $V(Q)$. Во-вторых, из неэлементарности произвольного упорядочения длины больше 1 следует существование упорядочения меньшей длины с элементарным множеством вершин и цепи Кирстеда относительно множества вершин этого меньшего упорядочения. Доказательство теоремы 1 будем проводить индукцией по T. При этом словосочетания «База индукции», «Индукционное предположение» и «Шаг индукции» будем заменять аббревиатурами БИ, ИП и ШИ соответственно.

БИ1. Пусть $T = 1$. Тогда $V(Q) = \{a, b\}$, т. е. P является цепью Кирстеда относительно множества $\{a, b\}$. В этом случае утверждение теоремы 1 следует из леммы 2.

ИП1. Предположим, что P является цепью Кирстеда относительно элементарного множества вершин упорядочения Q длины $T > 1$ и для всех значений длины, меньших T, утверждение теоремы доказано.

ШИ1. Пусть $U = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_T, w_T, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$, $Q = \langle w_0, f_1, w_1, \ldots, f_T, w_T \rangle$ и $P = \langle v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$. Обозначим через Q' и U' начальные отрезки упорядочения U длины $T - 1$ и $T + 1$ соответственно. Так как $T - 1 > 0$, то оба отрезка являются упорядочениями. Заметим, что если $v_0 = w_T$, то цепь $P' = \langle x, f_T, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t \rangle$, где $x \in V(Q')$ — второй конец ребра f_T, является цепью Кирстеда относительно множества $V(Q')$. В этом случае утверждение теоремы следует из ИП1.

Пусть $v_0 \in V(Q')$. Доказательство ШИ1 будем проводить индукцией по t.

БИ2. Пусть $t = 1$. Тогда множество $V(U) \setminus \{v_1\} = V(Q)$ элементарно, а потому существуют вершина $x \in V(Q)$ и цвет $\varepsilon \in O(v_1) \cap O(x)$. Рассмотрим дерево Q', состоящее из неокрашенного ребра, $T - 2$ окрашенных ребер и T вершин. Так как множество $V(Q')$ элементарно

и для концов a, b неокрашенного ребра $|O(a)| \geqslant 2$ и $|O(b)| \geqslant 2$, то $|O(V(Q'))| \geqslant T + 2$, т. е. в $O(V(Q'))$ имеется по меньшей мере четыре цвета, не используемых для раскраски ребер дерева Q'. По меньшей мере два из них не используются для раскраски ребер дерева U. Следовательно, существуют вершина $z \in V(Q')$ и цвет $\omega \in O(z)$, $\omega \neq \varepsilon$, не используемый для раскраски ребер упорядочения U.

Если $\varepsilon, \Phi(e_1) \in O(V(Q'))$, то P является цепью Кирстеда относительно множества $V(Q')$, поскольку $v_0 \in V(Q')$. В этом случае утверждение теоремы следует из ИП1. Покажем, как с помощью перекрасок к этому случаю сводятся остальные. Пусть цвета γ и δ, $\gamma \neq \delta$, произвольны. Цепь $P \subseteq G$ будем называть (двухцветной) (γ, δ)-цепью, если все ребра цепи P поочередно окрашены цветами γ и δ и ее нельзя удлинить с сохранением этого свойства, т. е. в каждом из двух концов цепи P нет хотя бы одного из цветов γ или δ. Перекраской такой цепи будем называть одновременную замену всех ее γ-ребер δ-ребрами и наоборот.

Если $x = w_T$, то в силу определения 2 и поскольку $\varepsilon \in O(v_1)$ цвет ε тоже не используется для раскраски ребер упорядочения U. Если вершины x и z не соединены (ε, ω)-цепью, то после перекраски (ε, ω)-цепи с началом в вершине x цвет ω попадает в $O(x) \cap O(z)$, т. е. множество $V(Q)$ становится неэлементарным. В этом случае существуют упорядочение меньшей длины с элементарным множеством вершин и цепь Кирстеда относительно этого множества, т. е. утверждение теоремы следует из ИП1. Если же вершины x и z соединены (ε, ω)-цепью, то после ее перекраски и переименования вершин x и z цвет ε останется неиспользуемым, в то время как $x \in V(Q')$.

Пусть $x \in V(Q')$ и цвет ε используется для раскраски ребер упорядочения U. Рассмотрим (ε, ω)-цепь с началом в вершине v_1. Если она содержит хотя бы одну вершину из $V(Q')$, то кратчайший отрезок этой цепи от вершины v_1 до множества $V(Q')$ является цепью Кирстеда относительно множества $V(Q')$ и утверждение теоремы следует из ИП1. Если же эта цепь не содержит вершин из $V(Q')$, то она не содержит ни одного ребра упорядочения U, поскольку $\Phi(e_1) \neq \varepsilon, \omega$. Поэтому после ее перекраски и переименования цветов ε и ω и вершин x и z цвет ε станет неиспользуемым, в то время как x останется в $V(Q')$.

Таким образом, всякий раз получается случай, когда $x \in V(Q')$ и цвет $\varepsilon \in O(x) \cap O(v_1)$ не используется для раскраски ребер упорядочения U. Случай, когда $\varphi = \Phi(e_1) \in O(V(Q'))$, уже разобран. Пусть $\varphi \in O(w_T)$. Тогда цвета φ и ε не используются для раскраски ребер упорядочения Q. Если вершины x и w_T не соединены (φ, ε)-цепью, то перекраска (φ, ε)-цепи с началом в вершине w_T приводит к неэлементарности множества $V(Q)$ и, следовательно, к возможности

воспользоваться ИП1. Если же вершины x и w_T соединены (φ, ε)-цепью, то последняя не содержит вершину v_1 и, следовательно, ребро e_1. Поэтому после ее перекраски получается $x = w_T$ и $\varphi \in O(V(Q'))$, т. е. возникает уже разобранный случай. Так как при его разборе цвета ребер не менялись, повторение рассуждений не может снова привести к случаю $\Phi(e_1) \in O(w_T)$.

ИП2. Предположим, что P является цепью Кирстеда длины $t > 1$ относительно множества $V(Q)$ и для всех меньших значений ее длины утверждение теоремы доказано.

ШИ2. Если множество $V(U) \setminus \{v_t\}$ неэлементарно, то начальный отрезок цепи P длины $t-1$ также является цепью Кирстеда относительно множества $V(Q)$, т. е. утверждение теоремы следует из ИП2. Поэтому в дальнейшем будем считать, что множество $V(U) \setminus \{v_t\}$ элементарно. Тогда существуют вершина $x \in V(U) \setminus \{v_t\}$ и цвет $\varepsilon \in O(v_t) \cap O(x)$.

Случай A. $x = v_j$ для некоторого j, $0 < j < t$. По существу доказательство для этого случая (дополненное индукцией по t) представляет собой доказательство леммы 2 и проводится индукцией по величине $t-j$.

БИ3. Пусть $t - j = 1$. Тогда в силу условия (ii) определения 1 вершины v_t и v_j цепи P соединены ребром e_t цвета $\lambda = \Phi(e_t) \in O(V(U) \setminus \{v_j, v_t\})$. После перекраски ребра e_t в цвет ε получим $\lambda \in O(v_j) \cap O(V(U) \setminus \{v_j, v_t\})$, т. е. начальный отрезок P' цепи P длины $j = t - 1$ является цепью Кирстеда относительно множества $V(Q)$. Но тогда утверждение теоремы следует из ИП2.

ИП3. Предположим, что $t - j > 1$ и для всех меньших значений этой разности утверждение теоремы доказано.

ШИ3. В этом случае $v_{j+1} \neq v_t$. Пусть $\psi \in O(v_{j+1})$. Тогда $\psi \neq \varepsilon$ в силу элементарности множества $V(U) \setminus \{v_t\}$. В силу определения 1 ψ- и ε-ребра могут встретиться только среди ребер $e_{j+2}, \ldots, e_t$. Поэтому перекраска (ψ, ε)-цепей не влияет на выполнение условий этого определения. Если вершины v_j и v_{j+1} не соединены (ε, ψ)-цепью, то после перекраски (ε, ψ)-цепи с началом в вершине v_{j+1} получим $\varepsilon \in O(v_j) \cap O(v_{j+1})$. Тогда начальный отрезок цепи P длины $j + 1 < t$ будет цепью Кирстеда относительно множества $V(Q)$, т. е. теорема доказана по ИП2. Если же вершины v_j и v_{j+1} соединены (ε, ψ)-цепью, то после ее перекраски $\varepsilon \in O(v_{j+1}) \cap O(v_t)$, т. е. теорема доказана по ИП3.

Случай B. $x \in V(Q)$. Как и в случае БИ2, существуют вершина $z \in V(Q')$ и цвет $\omega \in O(z)$, $\omega \neq \varepsilon$, не используемый при окраске ребер упорядочения U'. Предположим, что $x = w_T$. В этом случае цвет ε не используется для раскраски ребер упорядочения Q. Если вершины x и z не соединены (ε, ω)-цепью, то после перекраски (ε, ω)-цепи с началом

в вершине x множество $V(Q)$ станет неэлементарным, что позволяет применить ИП1. Если же вершины x и z соединены (ε,ω)-цепью, то перекрасим ее и переименуем вершины x и z. После этого $x \in V(Q')$. В то же время изменить свой цвет при перекраске могли лишь ребра цепи P, которая остается цепью Кирстеда относительно множества $V(Q)$.

Предположим теперь, что $x \in V(Q')$. Пусть вершина $z \in V(Q')$ и цвет $\omega \in O(z)$ снова выбраны так, что цвет $\omega \neq \varepsilon$ не используется для окраски ребер упорядочения U'. Рассмотрим (ε,ω)-цепь с началом в вершине v_t. Если она содержит хотя бы одну вершину из $V(Q)$, то кратчайший отрезок этой цепи от вершины v_t до множества $V(Q)$ является цепью Кирстеда относительно множества $V(Q')$ в том случае, когда его началом не является вершина w_T. В противном случае, удлиняя этот отрезок присоединением к его началу ребра e_T, снова получим цепь Кирстеда относительно множества $V(Q')$, т. е. в обоих случаях утверждение теоремы следует из ИП1. Если же рассматриваемая цепь не содержит ни одной вершины из $V(Q)$, то она не содержит ни одного ребра упорядочения U'. Поэтому после перекраски этой цепи и переименования цветов ε и ω, а также вершин x и z цвет ε станет неиспользуемым для раскраски ребер упорядочения U'.

Пусть $\psi \in O(v_1)$. Если вершины v_1 и x соединены (ψ,ε)-цепью, то после ее перекраски получаем случай A. В противном случае после перекраски (ψ,ε)-цепи с началом в вершине v_1 получаем случай БИ2. Теорема 1 доказана.

2. Некоторые следствия

Теорема 3. *Любой мультиграф G с $q(G) > \frac{11\Delta(G)+8}{10}$ элементарен.*

Доказательство. Пусть заданы произвольные мультиграф G, подмножество $E \subset E(G)$, целое число $k > \frac{11\Delta(G)-2}{10}$, раскраска $\Phi : E \longrightarrow \{1,2,\dots,k\}$ и неокрашенное ребро e с концами $a,b \in V(G)$. Пусть подмножество $W \subseteq V(G)$ элементарно и содержит вершины a и b. Обозначим $c(W) = k - |O(W)|$. Тогда $k - c(W) = |O(W)| = \sum_{v\in W} |O(v)| \geqslant (k-\Delta(G))|W| + 2$, т. е. $\Delta(G) - 2 \geqslant (k-\Delta(G))(|W|-1) + c(W)$. Но k выбрано так, что $\Delta(G) - 2 < 10(k-\Delta(G))$. Сравнивая два последних неравенства, получаем $10(k-\Delta(G)) > (k-\Delta(G))(|W|-1) + c(W)$, т. е. $(11-|W|)(k-\Delta(G)) \geqslant c(W)+1$. Таким образом, для любого элементарного W, содержащего вершины a и b, справедливо неравенство

$$|W| \leqslant 11 - \frac{c(W)+1}{k-\Delta(G)} < 11. \qquad (1)$$

Замкнутое подмножество $W \subseteq V(G)$ будем называть *сильно замкнутым*, если для любого цвета φ, $1 \leqslant \varphi \leqslant k$, множества W и $V(G) \setminus W$

соединены не более чем одним φ-ребром. Для доказательства теоремы 3 достаточно показать существование алгоритма раскраски ребер, который в начале работы окрашивает ребра в $\lfloor\frac{11\Delta(G)+8}{10}\rfloor$ цветов и увеличивает число используемых цветов лишь при обнаружении элементарного сильно замкнутого подмножества W, содержащего концы неокрашенного ребра. Действительно, в этом случае число цветов k, используемых для раскраски ребер, за время работы алгоритма ни разу не увеличивается только тогда, когда не выполнено условие $q(G) > \frac{11\Delta(G)+8}{10}$ теоремы. Если это условие выполнено, то в последний раз число k увеличивается при $k = q(G) - 1$. В этот момент определим часть H мультиграфа G следующим образом. Пусть $V(H) = W$ и $E(H)$ состоит из ребра e и всех тех окрашенных ребер, оба конца которых содержатся в W. В силу элементарности и сильной замкнутости множества W в мультиграфе G это множество будет элементарным и в мультиграфе H. Поэтому $n(H)$ нечетно и каждый цвет отсутствует ровно в одной вершине. Но тогда $m(H) = k\lfloor\frac{n(H)}{2}\rfloor + 1$, т. е. $w(G) \geqslant w(H) \geqslant k + 1 = q(G) \geqslant w(G)$. Следовательно, $q(G) = w(G)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать существование раскраски Φ' ребер множества $E \cup \{e\}$ k цветами в случае, если в $V(G)$ нет элементарного сильно замкнутого подмножества, содержащего вершины a и b. Более того, в силу теоремы 1 для этого достаточно указать способ добиться неэлементарности множества $W_0 = \overline{\{a, b\}}$. Так как мощность элементарного множества ограничена неравенством (1), для этого достаточно указать, каким образом перекрасками можно преобразовать множество W_0 из элементарного замкнутого, но не сильно замкнутого, в незамкнутое, но лежащее в $\overline{\{a, b\}}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что множество W_0 элементарно и что элементарного сильно замкнутого подмножества, содержащего W_0, нет. Тогда $\alpha \neq \beta$ для любых цветов $\alpha \in O(a)$ и $\beta \in O(b)$, а вершины a и b соединены (α, β)-цепью P_0. Так как эта цепь начинается и заканчивается ребрами разного цвета, то число ее вершин нечетно. Покажем, что в качестве цепи P_0 всегда можно выбрать цепь не менее чем с 5 вершинами.

Предположим, что для любых $\varphi \in O(a)$ и $\psi \in O(b)$ (φ, ψ)-цепь, соединяющая вершины a и b, содержит 3 вершины. Тогда $P_0 =< a, e_1, v, e_2, b >$, где $\Phi(e_1) = \beta$ и $\Phi(e_2) = \alpha$, причем для любых $\varphi \in O(a)$ и $\psi \in O(b)$, где $\varphi \neq \alpha$ и $\psi \neq \beta$, существуют φ-ребро, соединяющее вершины b и v, и ψ-ребро, соединяющее вершины a и v. Если для некоторого $\gamma \in O(v)$ имеется пара γ-ребер, соединяющих $V(P_0)$ с $V(G) \setminus V(P_0)$, то преобразуем раскраску Φ в $\Phi' : (E \setminus \{e_1\}) \cup \{e\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, обесцветив ребро e_1 и окрасив ребро e цветом β. Для новой раскраски концы a и v

неокрашенного ребра e_1 соединены (α, γ)-цепью не менее чем с 5 вершинами, что и требовалось доказать. В противном случае множество $V(P_0)$ замкнуто, т. е. $V(P_0) = W_0$. Поскольку по предположению оно не является сильно замкнутым, существует такой цвет ξ, что каждая из 3 вершин множества W_0 соединена ξ-ребром с множеством $V(G) \setminus W_0$.

Рассмотрим (α, ξ)-цепь P_1 с началом в вершине a. Если эта цепь не проходит через вершины b и v, то перекрасим ее. После перекраски цвет $\xi \in O(a)$, а поэтому множество $V(P_0)$ не замкнуто. Если теперь множество $\overline{\{a, b\}}$ неэлементарно, то теорема доказана. В противном случае (ξ, β)-цепь, соединяющая вершины a и b, содержит не менее 5 вершин, что и требовалось доказать. Пусть цепь P_1 проходит через одну из вершин b или v. Тогда она проходит через обе эти вершины. Если при движении вдоль цепи P_1 от вершины a к другому ее концу вершина v встречается раньше вершины b, то после перекраски цепи P_0 с точностью до переобозначения вершин a и b попадаем в условия только что разобранного случая. Иначе в условия этого же случая попадаем после преобразования раскраски Φ в $\Phi' : (E \setminus \{e_2\}) \cup \{e\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ обесцвечиванием ребра e_2 и окраской ребра e цветом α с последующим переименованием вершин a и v.

Таким образом, показано, что в качестве P_0 всегда можно выбрать цепь не менее чем с 5 вершинами. Далее будет предполагаться, что $|V(P_0)| \geqslant 5$. Так как множество W_0 замкнуто, но не сильно замкнуто, то существует цвет $\xi \notin O(W_0)$, которым окрашено более одного ребра, соединяющего W_0 с $V(G) \setminus W_0$. Такие ребра будем называть *пограничными*. Обозначим их через $e_1, e_2, \ldots, e_j$. Так как $|W_0|$ нечетно, то j нечетно и, следовательно, $j \geqslant 3$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant j$, концы ребра e_i обозначим через $x_i \in W_0$ и $y_i \in V(G) \setminus W_0$.

Зафиксируем произвольное максимальное упорядочение Q. Цвет $\varepsilon \in O(W_0)$ назовем *неиспользуемым*, если ни одно ребро упорядочения Q не окрашено цветом ε. При доказательстве теоремы 1 было показано, что имеется не менее 4 таких цветов. Пусть цвет $\psi \notin O(W_0)$ и неиспользуемый цвет $\varepsilon \in O(W_0)$ произвольны. Цвет $\varepsilon \in O(w)$ для некоторой вершины $w \in W_0$. Если (ε, ψ)-цепь с началом в вершине w проходит не через все пограничные ψ-ребра, то перекрасим ее. Цвета ребер упорядочения Q останутся неизменными, а множество W_0 станет незамкнутым.

Более того, пусть имеется более одного пограничного ψ-ребра и пусть пограничное ψ-ребро f встречается последним при прохождении (ε, ψ)-цепи от вершины w к другому ее концу. Если в конце $x \in W_0$ ребра f отсутствует какой-либо неиспользуемый цвет δ, то $\delta \neq \varepsilon$, поскольку $x \neq w$. Перекрасим (ε, δ)-цепь, соединяющую вершины w и x. Замыкание $\overline{\{a, b\}}$ не изменится, цвета ε и δ останутся неиспользуемыми,

а (ε,ψ)-цепь с началом в вершине x будет проходить только через одно пограничное ψ-ребро. Этот случай уже разобран.

Пусть теперь всякая такая цепь проходит через все пограничные ψ-ребра. Предположим, что в списке цветов, которые отсутствуют в конце последнего ψ-ребра, лежащем в W_0, нет неиспользуемых. В этом случае $W_0 \setminus V(P_0) \neq \varnothing$, так как иначе из цепи P_0 легко получается максимальное упорядочение, все окрашенные ребра которого имеют цвета α или β, т. е. в каждой вершине отсутствует неиспользуемый цвет.

Пусть $w \in W_0$ и $\varepsilon \in O(w)$ выбраны так, что цвет ε не используется. С точностью до переобозначений можно считать, что ребра e_i, а значит, и их концы x_i и y_i, $1 \leqslant i \leqslant j$, пронумерованы в том порядке, в каком они встречаются при прохождении (ε,ξ)-цепи P от вершины w к другому ее концу. Обозначим $W_1 = W_0 \cup \{y_1\}$. Если множество W_1 неэлементарно, то существуют вершина $x \in W_0$ и цвет $\varphi \in O(x) \cap O(y_1)$. Так как цепь P проходит через все пограничные ξ-ребра, то $\varphi \neq \varepsilon$. Так как множество W_0 замкнуто, то (ε,φ)-цепь с началом в вершине y_1 не содержит ни одной вершины из W_0. Но тогда после перекраски этой цепи (ε,ξ)-цепь, начинающаяся в вершине w, будет заканчиваться в вершине y_1 и, следовательно, проходить только через одно пограничное ξ-ребро. Снова попадаем в условия уже разобранного случая. Поэтому далее будем считать, что множество W_1 элементарно.

Так как $|W_0|$ нечетно и $|W_0| > |V(P_0)| \geqslant 5$, то в силу неравенства (1) возможны лишь два случая $|W_0| = 7$ или $|W_0| = 9$. Так как $|V(P_0)| \neq |W_0|$ и нечетно, то существуют вершина $z \in V(P_0)$ и цвет $\delta \in O(z)$ такие , что множества $V(P_0)$ и $W_0 \setminus V(P_0)$ соединены как минимум двумя δ-ребрами. Поэтому легко строится максимальное упорядочение Q', все ребра которого в случае $|W_0| = 7$ окрашены цветами α, β и δ, а в случае $|W_0| = 9$ — этими же цветами и, быть может, еще одним дополнительным цветом δ'. Так как $\xi \notin O(W_1)$, то $c(W_1) \geqslant 1$. В случае $|W_0| = 9$ из неравенства (1) получаем $k - \Delta(G) \geqslant 2$. Это неравенство означает, что, не считая цветов α и β, в каждой вершине множества W_0 отсутствуют не менее двух цветов. По предположению в вершине x_j отсутствуют только цвета, не являющиеся неиспользуемыми. Для упорядочения Q' такими цветами, кроме цветов α или β, могут быть только δ и δ'. Если $|W_0| = 7$, то, не считая цветов α и β, используется только цвет δ. Поэтому $O(x_j) \setminus \{\alpha,\beta\} = \{\delta\}$, т. е. $k - \Delta(G) = 1$. Таким образом, в обоих случаях в каждой вершине множества $W_0 \setminus \{x_j\}$ отсутствует неиспользуемый цвет.

Предположим теперь, что множество $W_2 = W_1 \cup \{y_2\}$ неэлементарно. Тогда существуют вершина $z \in W_1$ и цвет $\varphi \in O(z) \cap O(y_2)$. Пусть $\gamma \in O(x_2)$. Тогда цвет γ не используется и $\gamma \neq \varepsilon$, поскольку $x_2 \neq w$.

Если $z = y_1$, то вершины x_2 и y_1 должны быть соединены (γ, φ)-цепью, поскольку иначе перекраска (γ, φ)-цепи с началом в вершине y_1 привела бы к уже рассмотренному случаю неэлементарного множества W_1. Но тогда после перекраски (γ, φ)-цепи с началом в вершине y_2 получим $\gamma \in O(x_2) \cap O(y_2)$. К этому же случаю легко сводится случай, когда $z \in W_0$ и $\varphi \neq \gamma$. Но если $\gamma \in O(x_2) \cap O(y_2)$, то после перекраски ребра e_2 множество W_0 станет незамкнутым, т. е. $|\overline{\{a, b\}}|$ увеличится.

Пусть множество W_2 элементарно. В силу неравенства (1) это невозможно, если $|W_0| = 9$. Следовательно, этот случай разобран полностью и далее можно считать, что $|W_0| = 7$. В этом случае $k - \Delta(G) = 1$ и неравенство (1) можно переписать в виде $c(W_2) \leqslant 10 - |W_2| = 1$. Так как $\xi \notin O(W_2)$, то $c(W_2) = 1$. Заметим, что если $j > 3$, то предположение об элементарности множества $W_3 = W_2 \cup \{y_3\}$ противоречит неравенству (1). Случай же неэлементарного W_3 сводится к случаю неэлементарного W_2 точно так же, как ранее случай неэлементарного W_2 сводился к случаю неэлементарного W_1.

Пусть $j = 3$. Если множество W_2 замкнуто, то оно является сильно замкнутым вопреки предположению. Пусть множество W_2 не замкнуто. Тогда существуют вершина $z' \in W_2$, цвет $\psi \in O(z')$ и по крайней мере два ψ-ребра, соединяющих W_2 с $V(G) \setminus W_2$. Как минимум одно из этих ψ-ребер соединяет вершину $x \in W_2$ с вершиной $y \in V(G) \setminus W_2$, которая не является концом (ε, ξ)-цепи P с началом в вершине w.

Если ξ — единственный цвет, отсутствующий в вершине y, то $y \notin V(P)$. Так как цепь P проходит через все пограничные ξ-ребра, то (ε, ξ)-цепь с началом в вершине y не содержит ни одной вершины из W_2. Перекрасим ее. Множество $W_3 = W_2 \cup \{y\}$ станет неэлементарным. В противном случае это множество неэлементарно и без перекрасок, т. е. во всяком случае существуют вершина $z \in W_2$ и цвет $\varphi \in O(z) \cap O(y)$. Так как в $O(W_0)$ имеется по крайней мере 6 неиспользуемых цветов, то существуют такие вершина $x' \in W_0$ и неиспользуемый цвет $\eta \in O(x')$, что $\eta \neq \varepsilon, \psi, \varphi$. Заметим, что если $z = y_1$ или $z = y_2$, то вершины z и x' должны быть соединены (φ, η)-цепью, поскольку в противном случае перекраска (φ, η)-цепи с началом в вершине z приводит к уже разобранному случаю неэлементарного множества W_2. Если же $z \in W_0$, то (φ, η)-цепь с началом в вершине y не содержит ни одной вершины из W_0 в силу его замкнутости. В обоих случаях после перекраски (φ, η)-цепи с началом в вершине y и переименования цветов φ и η и вершин z и x' получается случай, когда $z \in W_0$ и цвет $\varphi \in O(z) \cap O(y)$ не используется. Заметим еще, что если при последней перекраске изменится (ξ, ε)-цепь с началом в вершине w, то это может привести лишь к одному из ранее рассмотренных случаев.

Предположим, что $x = y_1$ или $x = y_2$. Пусть $\theta \in O(x)$. Как и в только что разобранном случае, вершины x и z должны быть соединены (φ, θ)-цепью. Но тогда после перекраски (φ, θ)-цепи с началом в вершине y получим $\theta \in O(x) \cap O(y)$. Если теперь перекрасить ψ-ребро, соединяющее вершины x и y, в цвет θ, то снова получится случай неэлементарного множества W_2.

Пусть теперь $x \in W_0$. Так как множество W_0 замкнуто, то в этом случае $\psi \notin O(W_0)$, т. е. $z' = y_1$ или $z' = y_2$. Как уже было замечено ранее, (φ, ψ)-цепь, начинающаяся в вершине z, должна проходить через все пограничные ψ-ребра и, следовательно, заканчиваться в вершине y. Но тогда после перекраски (φ, ψ)-цепи с началом в вершине z' снова получается уже разобранный случай неэлементарного множества W_2. Теорема 3 доказана.

Несколько слов о трудоемкости рассмотренных алгоритмов. Для произвольного мультиграфа G пусть $N = N(G)$ и $\Delta = \Delta(G)$. Обозначим через N_1 верхнюю границу для числа вершин в элементарном множестве. Как было показано в [4], она убывает с ростом числа используемых цветов. Нетрудно заметить, что для окраски одного ребра в соответствии с алгоритмом, рассматриваемом в теореме 1, требуется порядка $N_1^2\Delta + N_1^3 N$ элементарных операций. В силу неравенства (1) модификация этого алгоритма, рассматриваемая в теореме 3, требует выполнения порядка $N + \Delta$ элементарных операций для окраски одного ребра. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Существует эффективный алгоритм раскраски ребер произвольного мультиграфа G в $\max\{q(G), \lfloor \frac{11\Delta(G)+8}{10} \rfloor\}$ цветов.*

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. В. Косточке, без доброжелательной настойчивости которого данная работа, вероятно, никогда не была бы опубликована.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1964. Вып. 3. С. 25–30.

2. **Визинг В. Г.** Хроматический класс мультиграфа // Кибернетика. 1965. № 3. С. 29–39.

3. **Гольдберг М. К.** О мультиграфах с хроматическим классом, близким к максимальному // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1973. Вып. 23. С. 3–7.

4. **Гольдберг М. К.** Строение мультиграфов с ограничением на хроматический класс // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1977. Вып. 30. С. 3–12.

5. **Goldberg M. K.** Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique // J. Graph Theory. 1984. V. 8, N 1. P. 123–137.

6. **Kierstead H. A.** On the chromatic index of multigraphs without large triangles // J. Combin. Theory. Ser. B. 1984. V. 36, N 2. P. 156–160.

7. **Nishizeki T., Kashiwagi K.** On the 1.1 edge-coloring of multigraphs // SIAM J. Discrete Math. 1990. V. 3, N 3. P. 391–410.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
19 апреля 2000 г.