ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2000. Серия 1. Том 7, № 4, 5–19

УДК 519.172.2

ОБ ОДНОМ СТРУКТУРНОМ СВОЙСТВЕ ПЛОСКИХ ГРАФОВ*)

В. А. Аксенов, О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Если в плоском графе ребро инцидентно двум треугольным граням, то оно называется слабым, а если только одной треугольной грани — то полуслабым. Вес ребра есть сумма степеней его концевых вершин. Доказано существование в связном плоском графе не менее чем с двумя вершинами либо двух вершин с суммой степеней не более 4, либо двух вершин степени 3, находящихся на расстоянии 2, либо слабого ребра веса не более 11, либо полуслабого ребра веса не более 9, либо ребра веса не более 7. Все оценки неулучшаемы.

Введение

В настоящей статье под плоским графом понимается обыкновенный плоский граф без петель и кратных ребер.

Если в плоском графе ребро инцидентно двум треугольным граням, то оно называется *слабым*, а если только одной треугольной грани — то *полуслабым*. *Вес* ребра есть сумма степеней его концевых вершин. A. Kotzig в [3] доказал, что любой эйлеров многогранник содержит ребро веса не более 13 и эта оценка является неулучшаемой. О. В. Бородин в [2] доказал, что любой непустой плоский граф содержит либо слабое ребро веса не более 13, либо полуслабое ребро веса не более 10, либо ребро веса не более 8, причем все оценки точны.

В [1] был доказан другой похожий факт: каждый связный плоский граф не менее чем с двумя вершинами содержит либо две вершины с суммой степеней не более 5, либо две вершины, находящиеся на расстоянии 2, с суммой степеней не более 7, либо слабое ребро веса не более 11,

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00916), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581) и INTAS (проект 97–1001), третьего автора — при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (проект 047–008–006).

либо полуслабое ребро веса не более 9, либо ребро веса не более 7. Данная структурная теорема использовалась в [1] для доказательства того, что из любого плоского графа удалением не более 5 ребер можно получить граф, обладающий нетривиальным автоморфизмом. Однако сама эта структурная теорема не является неулучшаемой в том смысле, что не все указанные в ней оценки достижимы. В настоящей статье мы докажем следующий усиленный вариант данной теоремы с неулучшаемыми оценками.

Теорема 1. *Каждый связный плоский граф не менее чем с двумя вершинами содержит либо две вершины с суммой степеней не более* 4, *либо две вершины степени* 3, *находящиеся на расстоянии* 2, *либо слабое ребро веса не более* 11, *либо полуслабое ребро веса не более* 9, *либо ребро веса не более* 7. *Все оценки неулучшаемы.*

Точный смысл того, что здесь следует понимать под неулучшаемостью оценок, разъяснен в разд. 2.

1. Доказательство верхних оценок из теоремы 1

Пусть граф G является контрпримером к теореме 1. Очевидно, что G обладает следующими свойствами:

K1: G не содержит изолированных вершин и содержит не более одной вершины степени не более 2;

K2: окружение любой вершины в G содержит не более одной вершины степени 3;

K3: вес любого ребра в G не меньше 8;

K4: вес любого полуслабого ребра в G не меньше 10;

K5: вес любого слабого ребра в G не меньше 12.

Цель дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы убедиться в несовместимости структурных свойств K1–K5 для графа G.

Будем называть *k-вершиной* в G вершину степени k, а *r-гранью* — грань ранга r.

Формула Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для графа G может быть переписана в виде $(2|E| - 6|V|) + (4|E| - 6|F|) = -12$. Отсюда следует, что

$$\sum_{v\in V}(d(v) - 6) + \sum_{f\in F}(2r(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Зарядом вершины $v \in V(G)$ назовем число $M(v) = d(v) - 6$, а *зарядом грани* $f \in F(G)$ — число $M(f) = 2r(f) - 6$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\sum_{x\in V\cup F} M(x) = -12. \tag{2}$$

Перераспределим заряды, не меняя их суммы, таким образом: для каждого элемента $x \in V \cup F$, не являющегося 1- или 2-вершиной, его новый заряд $M^*(x)$ станет неотрицательным, а заряд вершины степени не более 2 останется неизменным. Поскольку в G может быть лишь одна такая вершина z (свойство К1) и $M(z) = M^*(z) \geqslant -5$, это приведет нас к противоречию с (2).

Определим следующие правила перераспределения зарядов.

П1: Пусть $f \in F$ — нетреугольная грань. Тогда возможны следующие случаи.

- $r(f) = 4$, $f = v_1v_2v_3v_4$ и f содержит 3-вершину v_1. Тогда по свойству К3 имеем $d(v_2) \geqslant 5$, $d(v_4) \geqslant 5$, а по свойству К2 имеем $d(v_3) \neq 3$. Если $d(v_3) \leqslant 2$, то f передает заряд 1 на вершину v_1 и по $\frac{1}{2}$ на вершины v_2 и v_4; если $d(v_3) = 4$, то f передает 1 на вершину v_1, $\frac{1}{2}$ на вершину v_3 и по $\frac{1}{4}$ на вершины v_2 и v_4; если $d(v_3) \geqslant 5$, то f передает 1 на вершину v_1, $\frac{2}{5}$ на вершину v_3 и по $\frac{3}{10}$ на вершины v_2 и v_4 (рис. 1).

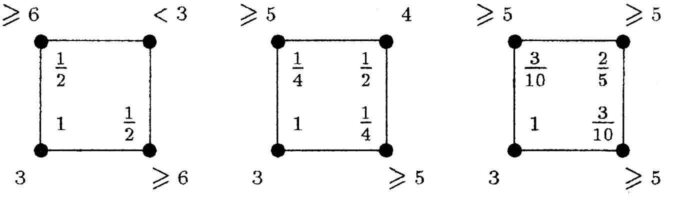


Рис. 1

- $r(f) = 4$ и f не инцидентна 3-вершинам. В этом случае f передает по $\frac{1}{2}$ на каждую инцидентную ей вершину степени не менее 4.

- $r(f) \geqslant 5$. В этом случае f передает по 1 на каждую инцидентную ей 3-вершину и по $\frac{1}{2}$ на каждую из оставшихся инцидентных f вершин.

Для каждого элемента $x \in V \cup F$ обозначим через $M_1(x)$ заряд элемента x после выполнения правила П1. Назовем 5-вершину v *сытой*, если $M_1(v) \geqslant 0$, *полуголодной*, если $-\frac{1}{10} \leqslant M_1(v) < 0$, и *голодной*, если $M_1(v) < -\frac{1}{10}$.

П2: Пусть $e = (w, v)$ — ребро с $d(w) \geqslant 6$ и $d(v) \leqslant 5$. Тогда от w на v («вдоль» e) передается следующий заряд:

- если $d(v) = 3$, а e — слабое (в этом случае согласно К5 имеем $d(w) \geqslant 9$);
- $\frac{1}{2}$, если $d(v) = 3$, а e — полуслабое ($d(w) \geqslant 7$);
- $\frac{1}{2}$, если $d(v) = 4$, а e — слабое ($d(w) \geqslant 8$);
- $\frac{1}{4}$, если $d(v) = 4$, а e — полуслабое ($d(w) \geqslant 6$);

- $\frac{1}{5}$, если $d(v) = 5$, e — слабое, а v — голодная ($d(w) \geqslant 7$);
- $\frac{1}{10}$, если $d(v) = 5$, e — слабое, а v — полуголодная ($d(w) \geqslant 7$).

Полученный в результате выполнения правил П1 и П2 заряд элемента $x \in V \cup F$ обозначим через $M_2(x)$. Заметим, что $M_2(f) = M_1(f)$ для любой грани $f \in F$, поскольку правило П2 не меняет заряда граней.

Лемма 1. *Если $x \in V \cup F$ и x не является вершиной степени* 1, 2 *или* 7, *то $M_2(x) \geqslant 0$.*

Доказательство. Если $r(f) = 3$, то $M_2(f) = M(f) = 0$.

Пусть $r(f) = 4$. Тогда $M(f) = 2$ и утверждение леммы следует из правила П1.

Если $r(f) = 5$, то $M(f) = 4$. Согласно свойству К2 грань f инцидентна не более чем одной вершине степени 3. Эта вершина получает от f заряд 1, а остальные инцидентные ей вершины — не более чем по $\frac{1}{2}$. Поэтому $M_2(f) \geqslant 4 - 1 - 4 \times \frac{1}{2} > 0$. Если $r(f) \geqslant 6$, то $M_2(f) \geqslant 2r(f) - 6 - r(f) \geqslant 0$.

Пусть теперь $v \in V$. Если v — вершина степени 3 или 4, то непосредственный перебор случаев показывает, что $M_2(v) = 0$. В дальнейшем вершины, смежные с v, будем обозначать в циклическом порядке через $v_1, v_2, \ldots$

Случай 1. $d(v) = 5$.

В этом случае $M(v) = -1$ и согласно К3 все вершины в окружении v имеют степень не менее 3.

Если v инцидентна пяти 3-граням, то каждая смежная с v вершина имеет степень не менее 7 и передает $\frac{1}{5}$ вершине v по правилу П2. Поэтому $M_2(v) \geqslant -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$.

Отметим, что каждая вершина, входящая с 5-вершиной в общую 3-грань, имеет степень не менее 5 по свойствам К4 и К5.

Если v инцидентна ровно одной нетреугольной грани f, то v получает от f не менее $\frac{2}{5}$ согласно П1 и по $\frac{1}{5}$ вдоль трех слабых ребер, не инцидентных грани f. Поэтому $M_2(v) \geqslant -1 + \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 0$.

Если v инцидентна ровно двум смежным по циклу нетреугольным граням, $f_1 = v_1vv_5\ldots$ и $f_2 = v_1vv_2\ldots$, то v получает от f_1 и f_2 не менее чем по $\frac{3}{10}$ согласно П1, а также по $\frac{1}{5}$ (при необходимости) вдоль двух слабых ребер (v, v_3) и (v, v_4) согласно П2. Следовательно, $M_2(v) \geqslant 0$.

Если v инцидентна ровно двум несмежным по циклу нетреугольным граням, $f_1 = v_1vv_2\ldots$ и $f_2 = v_4vv_5\ldots$, то v получает от f_1 и f_2 не менее чем по $\frac{2}{5}$ согласно П1 и (при необходимости) $\frac{1}{5}$ или $\frac{1}{10}$ от v_3 согласно П2. Поэтому $M_2(v) \geqslant 0$.

Если v инцидентна ровно трем не идущим подряд нетреугольным граням, $f_1 = v_1vv_2\ldots$, $f_2 = v_3vv_4\ldots$ и $f_3 = v_5vv_1\ldots$, то v получает от f_1

и f_3 не менее чем по $\frac{3}{10}$, а также не менее $\frac{2}{5}$ от f_2 согласно П1. Поэтому $M_2(v) \geqslant 0$ и v является сытой вершиной.

Пусть v инцидентна ровно трем идущим подряд нетреугольным граням $f_1 = v_1vv_2\ldots$, $f_2 = v_2vv_3\ldots$ и $f_3 = v_3vv_4\ldots$ Тогда $d(v_1) \geqslant 5$ и $d(v_4) \geqslant 5$. Если $d(v_2) = 3$, то $d(v_3) \geqslant 4$ согласно К2. В этом случае v получает от f_1 и f_2 не менее чем по $\frac{1}{4}$, а также не менее $\frac{1}{2}$ от f_3 согласно П1. Следовательно, $M_2(v) \geqslant 0$. Если же $d(v_2) \geqslant 4$ и $d(v_3) \geqslant 4$, то v получает от f_1, f_2 и f_3 не менее чем по $\frac{2}{5}$ согласно П1. Следовательно, $M_2(v) \geqslant 0$ и v — сытая вершина.

Если v инцидентна не менее чем четырем нетреугольным граням, то v получает от них не менее чем по $\frac{1}{4}$ согласно П1. Поэтому v также будет сытой и $M_2(v) \geqslant 0$.

Случай 2. $d(v) = 6$.

В этом случае $M(v) = 0$; все вершины в окружении v имеют степень не менее 2. Из-за ограничений на вес слабых и полуслабых ребер вершина v передает заряд только 4-вершинам по полуслабым ребрам. Пусть v_2 — такая 4-вершина и $f = v_1vv_2\ldots$ — нетреугольная грань. Если $d(v_1) \leqslant 3$, то v получает от f не менее $\frac{1}{4}$ по правилу П2 и ничего не отдает вершине v_1. Если же $d(v_1) \geqslant 4$, то v получает от f заряд $\frac{1}{2}$, что компенсирует возможные выплаты как вершине v_2, так и вершине v_1. Поэтому $M_2(v) \geqslant M(v) = 0$.

Случай 3. $d(v) = 8$.

Теперь $M(v) = 2$ и v осуществляет все виды передач по правилу П2 кроме передачи 3-вершине по слабому ребру. Докажем, что вершина v передает в среднем по каждому инцидентному ей ребру не более чем по $\frac{1}{4}$. Заметим, что согласно правилу П2 вершина v делает передачи, превосходящие $\frac{1}{4}$, лишь по слабым ребрам, ведущим в 4-вершину, и по полуслабым ребрам, ведущим в 3-вершину.

Предположим, что в окружении вершины v имеется 4-вершина w и ребро vw является слабым. Обозначим через x и y две вершины в окружении v, соседние с вершиной w. Каждая из вершин x, y имеет степень не меньше 6, так как входит в общую треугольную грань с 4-вершиной w (грань vwx или vwy). Следовательно, вершина v передает заряд $\frac{1}{2}$ вершине w (правило П2), но ничего не передает вершинам x и y.

Аналогично рассмотрим случай, когда в окружении вершины v имеется 3-вершина z, соединенная с v полуслабым ребром vz. В этом случае соседняя с z вершина x, входящая в треугольную грань vzx, имеет степень не меньше 7 и, следовательно, также ничего не получает от v. Назовем положительным направлением обхода вершины v направление, задаваемое от z к x, в случае, когда в окружении v имеется 3-вершина z (с полуслабым ребром vz), и направление по часовой стрелке иначе.

Проведем следующее (мысленное) усреднение передач от вершины v по инцидентным ребрам. Будем считать, что на 4-вершину w по слабому ребру, равно как и на 3-вершину z по полуслабому ребру, теперь передается лишь заряд $\frac{1}{4}$, а оставшаяся $\frac{1}{4}$ направляется на следующую в положительном направлении за w (соответственно z) вершину в окружении v. Эта вершина, как было показано выше, ранее ничего не получала от v.

В итоге усреднения каждое ребро уносит от v не более $\frac{1}{4}$, откуда $M_2(v) \geqslant 0$.

Случай 4. $d(v) \geqslant 9$.

Теперь возможны все виды передач, описанные правилом П2. Устраиваем схему усреднения так же, как в случае 3, но проще. Ограничиваем заряд, уносимый от v по каждому ребру, величиной $\frac{1}{3}$. Со слабого ребра, ведущего от v в 3-вершину, сбрасываем по $\frac{1}{3}$ на соседние ребра, а с полуслабого ребра, ведущего в 3-вершину, или со слабого ребра, ведущего в 4-вершину, сбрасываем $\frac{1}{6}$ на то соседнее ребро, по которому v ничего не передавала и на которое не сбрасывалась $\frac{1}{3}$.

Получаем $M_2(v) \geqslant d(v) - 6 - \frac{1}{3}d(v) = \frac{2}{3}(d(v) - 9) \geqslant 0$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. При доказательстве леммы в случае 1 было показано, что 5-вершина v, инцидентная трем или более нетреугольным граням, является сытой.

Замечание 2. При доказательстве леммы в случаях 3 и 4 (при $d(v) \geqslant 8$) не был использован заряд, получаемый вершиной v от инцидентных граней.

Остается рассмотреть случай $d(v) = 7$. В этом случае $M(v) = 1$ и v может делать передачи по слабым ребрам только на 5-вершины и по полуслабым — только на 3- и 4-вершины. Назовем слабое ребро, ведущее в 5-вершину, *слабым 5-ребром.*

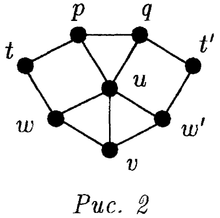


Рис. 2

Определение. Будем называть 5-вершину u *специальной*, если u инцидентна двум несмежным четырехугольным граням $uptw$ и $uqt'w'$, где $d(t) = d(t') = 3$, и трем треугольным граням upq, uvw и uvw' (рис. 2). В этом случае ребро pq будем называть *специальным ребром*, соответствующим вершине u.

Лемма 2. *Каждое специальное ребро в G соответствует ровно одной специальной 5-вершине; каждая вершина графа G инцидентна не более чем двум специальным ребрам.*

Доказательство. Пусть специальное ребро pq соответствует вершине u. Заметим, что в окружении вершины p вершина q отделена ровно одной вершиной (вершиной u) от 3-вершины t. Согласно К2 вершина t является единственной 3-вершиной в окружении p. Поэтому если pq' — второе специальное ребро, инцидентное p, то в окружении вершины p вершина q' также отделена от t ровно одной вершиной. Поэтому p инцидентна не более чем двум специальным ребрам. Дополнительно, если предположить, что $q' = q$ (т. е. ребро pq соответствует еще одной специальной 5-вершине u'), то получаем, что $d(p) = 4$. Но из определения специальной вершины следует, что ребра pu и qu полуслабые, откуда $d(p) \geqslant 5$, $d(q) \geqslant 5$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Пусть $d(v) = 7$ и ребра vv_3, vv_4, vv_5 являются слабыми 5-ребрами в G. Тогда*

a) *если v_4 не специальная вершина, то v_4 не голодная* (т. е. $M_1(v_4) \geqslant -\frac{1}{10}$);

b) *если vv_2 и vv_6 — слабые 5-ребра, то одна из вершин v_3, v_4, v_5 является сытой.*

Доказательство. По условию оба ребра v_3v_4 и v_4v_5 имеют вес 10. Следовательно, они не могут быть слабыми. Пусть $f = v_3v_4p\ldots$ и $f' = v_5v_4q\ldots$ — нетреугольные грани, инцидентные вершине v_4. Если v_4 инцидентна трем нетреугольным граням, то по замечанию 1 v_4 является сытой вершиной. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда v_4 инцидентна треугольной грани v_4pq. Каждая из граней f и f' передает вершине v_4 не менее чем по $\frac{2}{5}$. При этом если какая-то из этих граней либо имеет ранг не менее 5, либо не инцидентна 3-вершине, то эта грань дает вершине v_4 не менее $\frac{1}{2}$, что доказывает утверждение а).

При доказательстве b) можно считать, что при каждой из вершин v_3, v_4, v_5 имеется треугольная грань, не инцидентная вершине v (иначе соответствующая вершина — сытая). В этом случае каждая из граней f и f' либо имеет ранг не менее 5, либо не инцидентна 3- и 4-вершинам. В любом из этих случаев каждая рассматриваемая грань отдает вершине v_4 не менее $\frac{1}{2}$, делая ее сытой. Лемма 3 доказана.

Назовем 4-грань $f = uvwx$, инцидентную 7-вершине v, *особой*, если $d(u) = 4$, $d(w) = 3$ и ребра uv, vw являются полуслабыми.

Лемма 4. *Пусть $d(v) = 7$. Тогда $M_2(v) \geqslant -\frac{1}{10}$ и если $M_2(v) < 0$, то v инцидентна особой грани v_1vv_7x и шести треугольным граням, причем вершина v_4 является специальной 5-вершиной.*

Доказательство. По утверждению b) леммы 3 вершина v не может делать передачи по пяти подряд идущим слабым ребрам. Поэтому если v инцидентна только слабым ребрам, то она делает не более пяти передач на 5-вершины, откуда $M_2(v) \geqslant 0$.

Заметим, что если v делает передачу по полуслабому ребру на 4-вершину u, то нетреугольная грань $f = uvw\ldots$ дает вершине v заряд, достаточный для передач от v на u и w, за исключением случая, когда f является особой гранью. Действительно, если $d(w) \geqslant 4$, то v получает от f заряд $\frac{1}{2}$, а отдает не более $2 \times \frac{1}{4}$. Если же $d(w) = 3$, но ребро vw не полуслабое, то v получает от f заряд не менее $\frac{1}{4}$, а отдает ровно $\frac{1}{4}$ вершине u. Поэтому можно считать, что v больше не делает передач на 4-вершины по полуслабым ребрам, которые не инцидентны особой грани.

Пусть вершина v инцидентна по крайней мере одной нетреугольной грани. Если в окружении v нет вершин степени 3, то v не инцидентна особой грани. В этом случае v передает по слабым ребрам не более $5 \times \frac{1}{5}$, откуда $M_2(v) \geqslant 0$. Эта же оценка имеет место и в случае, когда в окружении v имеется 3-вершина v_1, но ребро vv_1 не является полуслабым (в этом случае на вершину v_1 ничего не передается). Пусть ребро vv_1 полуслабое и инцидентно нетреугольной грани $f = v_1vv_7\ldots$, не являющейся особой. Тогда v передает $\frac{1}{2}$ вершине v_1, но получает не менее $\frac{3}{10}$ от грани f. Кроме того, v передает не более $4 \times \frac{1}{5}$ по слабым 5-ребрам (так как $d(v_2) \geqslant 7$), откуда $M_2(v) \geqslant 0$.

Остается рассмотреть последний случай, когда $d(v_1) = 3$ и $f = v_1vv_7x$ — особая грань. В этом случае v получает заряд $\frac{1}{4}$ от f и передает его 4-вершине v_7. Кроме того, v отдает $\frac{1}{2}$ вершине v_1. Так как в рассматриваемой ситуации $d(v_2) \geqslant 7$ и $d(v_6) \geqslant 6$, то v делает не более 3 передач по слабым 5-ребрам. Поэтому $M_2(v) \geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{3}{5} = -\frac{1}{10}$. При этом если хотя бы одно из ребер vv_3, vv_4, vv_5 не является слабым 5-ребром, то $M_2(v) \geqslant 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} > 0$. Если же все указанные ребра суть слабые 5-ребра, но вершина v_4 не является специальной, то по утверждению а) леммы 3 имеем $M_2(v) \geqslant 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = 0$. Это замечание завершает доказательство леммы 4.

Лемма 5. *Для всякого специального ребра pq в G имеют место соотношения*

$$M_2(p) \geqslant 0, \quad M_2(q) \geqslant 0, \quad M_2(p) + M_2(q) \geqslant \tfrac{1}{5}.$$

Доказательство. Пусть ребро pq соответствует специальной 5-вершине u, инцидентной граням $uptw$, $uqt'w'$, upq, uvw и uvw', где $d(t) = d(t') = 3$. В этом случае вершины p и q инцидентны четырехугольным граням $uptw$ и $uqt'w'$ соответственно. Указанные грани не являются особыми, поскольку $d(u) = 5$. Отсюда и из лемм 1 и 4 следует, что $M_2(p) \geqslant 0$ и $M_2(q) \geqslant 0$.

Так как ребра up и uq являются полуслабыми, то $d(p) \geqslant 5$ и $d(q) \geqslant 5$. Кроме того, в окружении вершин p и q отсутствуют 3-вершины, отличные от t и t'.

Случай 1. $d(p) = d(q) = 5$.

Докажем, что в этом случае $M_2(p) \geqslant \frac{1}{10}$ и $M_2(q) \geqslant \frac{1}{10}$. Пусть в окружении вершины p вершины следуют в порядке q, u, t, x, y. Поскольку вес ребра pt равен 8, а вес ребра pq равен 10, то грани $tpx\ldots$ и $qpy\ldots$ не являются треугольными. При этом если грань $qpy\ldots$ является четырехугольной, то в ней отсутствуют вершины степени 3. Поэтому p получает $\frac{3}{10}$ от грани $uptw$ и $\frac{1}{2}$ от грани $qpy\ldots$. Если $d(x) \geqslant 5$, то p получает еще не менее $\frac{3}{10}$ от грани $tpx\ldots$. Если же $d(x) = 4$, то вес ребра px равен 9. Следовательно, грань $xpy\ldots$ является нетреугольной и неособой и передает вершине p не менее $\frac{2}{5}$. В любом случае p получает от инцидентных граней не менее $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} = 1\frac{1}{10}$. Поэтому $M_2(p) \geqslant \frac{1}{10}$. Аналогично доказывается, что $M_2(q) \geqslant \frac{1}{10}$.

Далее во всех случаях мы будем доказывать, что если $d(p) \geqslant 6$, то $M_2(p) \geqslant \frac{1}{5}$.

Случай 2. $d(p) = 6$.

Пусть вершины в окружении p следуют в порядке $q, u, t, x\ldots$. Поскольку вес ребра pt равен 9, то грань $tpx\ldots$ является нетреугольной и отдает вершине p не менее $\frac{1}{4}$. Грань $uptw$ по-прежнему передает вершине p заряд $\frac{3}{10}$. Если при p имеется третья нетреугольная грань, то она передает вершине p не менее $\frac{2}{5}$, и всего p получает от граней не менее $\frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10} + \frac{1}{4}$. В то же время p передает заряд по полуслабым ребрам не более чем трем 4-вершинам. Поэтому $M_2(p) \geqslant \frac{7}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$. Если же при вершине p все грани, кроме $uptw$ и $tpx\ldots$, являются треугольными, то от нетреугольных граней вершина p получает не менее $\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$ и отдает не более $\frac{1}{4}$ единственной возможной 4-вершине x. В этом случае получаем $M_2(p) \geqslant \frac{3}{10} > \frac{1}{5}$.

Случай 3. $d(p) = 7$.

Пусть вершины в окружении p следуют в порядке $q, u, t, x_1, x_2, x_3, x_4$. Заметим, что если p делает передачу на 4-вершину x_i по полуслабому ребру, то соответствующая нетреугольная грань $x_ipz\ldots$ (где $z \in \{x_{i-1}, x_{i+1}, t, q\}$) дает вершине p заряд, достаточный для передачи как на вершину x_i, так и на вершину z, если z является 4-вершиной. Поэтому можно считать, что p не делает передач на 4-вершины. При этом мы не используем заряд $\frac{3}{10}$, получаемый вершиной p от грани $uptw$.

Если грань $tpx_1\ldots$ не является треугольной, то p ничего не передает вершине t и делает не более четырех передач по слабым 5-ребрам. Поэтому $M_2(p) \geqslant 1 + \frac{3}{10} - \frac{4}{5} > \frac{1}{5}$. Пусть грань tpx_1 является треугольной. В этом случае p получает $\frac{3}{10}$ от грани $uptw$ и передает $\frac{1}{2}$ вершине

t. Докажем, что p делает не более трех передач по слабым 5-ребрам. Поскольку ребро tx_1 инцидентно треугольной грани, имеем $d(x_1) \geqslant 7$. Следовательно, в окружении вершины p имеется не более четырех слабых 5-ребер: px_2, px_3, px_4 и pq.

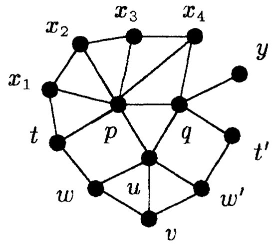


Рис. 3

Докажем, что если все указанные ребра являются слабыми 5-ребрами, то вершина q является сытой 5-вершиной. Пусть вершина y находится в окружении q между вершинами x_4 и t' (рис. 3). Нетрудно заметить, что ни одна из граней $x_4qy\ldots$ и $yqt'\ldots$ не является треугольной, поскольку вес ребра qx_4 равен 10, а вес ребра qt' равен 8. Значит, вершина q одновременно инцидентна трем различным нетреугольным граням и по замечанию 1 является сытой.

Итак, мы доказали, что вершина p осуществляет передачи не более чем по трем слабым 5-ребрам. Следовательно, $M_2(p) \geqslant 1 + \frac{3}{10} - \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

Случай 4. $d(p) \geqslant 8$.

Согласно замечанию 2 при доказательстве неравенства $M_2(v) \geqslant 0$ в случае $d(v) \geqslant 8$ никак не используется заряд, получаемый вершиной v от инцидентных ей граней. Поэтому в рассматриваемой ситуации заряд $\frac{3}{10}$, получаемый вершиной p от грани $uptw$, остается при p. Следовательно, $M_2(p) \geqslant \frac{3}{10} > \frac{1}{5}$. Лемма 5 доказана.

Теперь мы можем сформулировать последнее правило перераспределения зарядов в G, которое естественно назвать «специальным» правилом.

П3: Пусть pq — специальное ребро в G, соответствующее специальной 5-вершине u, инцидентной граням $uptw$, $uqt'w'$, upq, uvw и uvw', причем $d(v) = 7$. Тогда каждая из концевых вершин x специального ребра передает вершине v заряд, равный $\frac{1}{2}M_2(x)$.

Обозначим через $M^*(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после выполнения правил П1, П2 и П3. Докажем, что для всякого $x \in V \cup F$, отличного от 1- или 2-вершины, $M^*(x) \geqslant 0$. Действительно, для вершины, инцидентной специальному ребру, это следует из лемм 2 и 5, а для 7-вершины — из лемм 4 и 5. Для всех остальных элементов $x \in V \cup F$ данное утверждение следует из леммы 1, поскольку для таких элементов $M^*(x) = M_2(x)$. Тем самым получено противоречие с (2), т. е.

$$-5 \leqslant \sum_{x \in V \cup F} M^*(x) = \sum_{x \in V \cup F} M(x) = -12 < -5.$$

2. Неулучшаемость оценок из теоремы 1

Для плоского графа G не менее чем с двумя вершинами рассмотрим следующие инварианты:

$A(G)$ — минимальное значение суммы степеней пары вершин в G;

$B(G)$ — минимальный вес ребра в G;

$C(G)$ — минимальный вес полуслабого ребра в G;

$D(G)$ — минимальный вес слабого ребра в G.

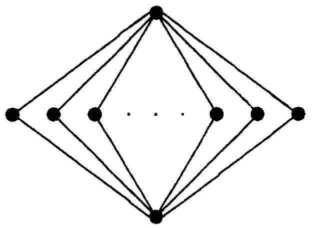


Рис. 4

В случае, когда в G нет слабых (полуслабых) ребер, значение соответствующего параметра будем считать равным бесконечности. При данных обозначениях теорема 1 утверждает, что для каждого связного плоского графа G выполняется одно из следующих условий:

a) $A(G) \leqslant A_0 = 4$;

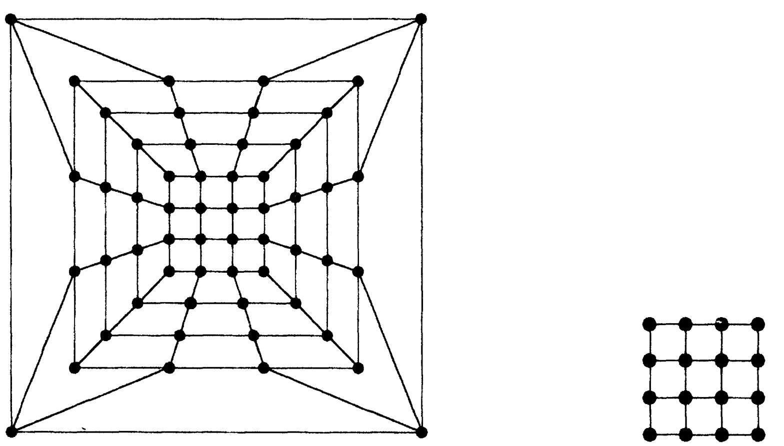
b) $B(G) \leqslant B_0 = 7$;

c) $C(G) \leqslant C_0 = 9$;

d) $D(G) \leqslant D_0 = 11$;

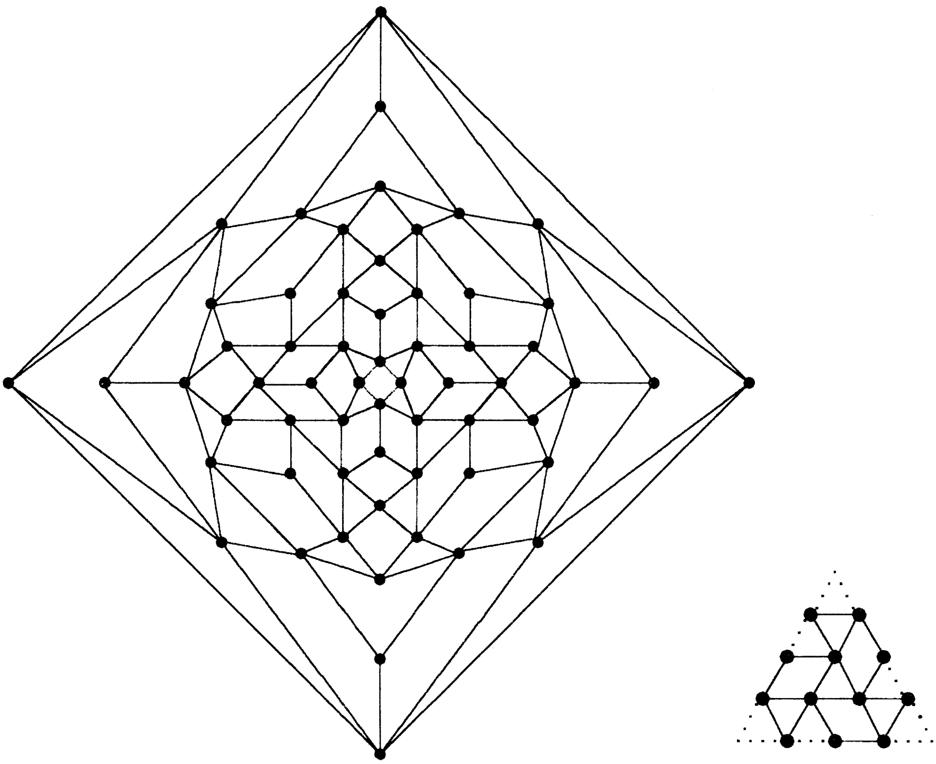
e) в G имеются две вершины степени 3 на расстоянии 2.

В этом параграфе нашей целью является доказательство неулучшаемости оценок из теоремы 1 в следующем смысле: при уменьшении



а *б*

Рис. 5

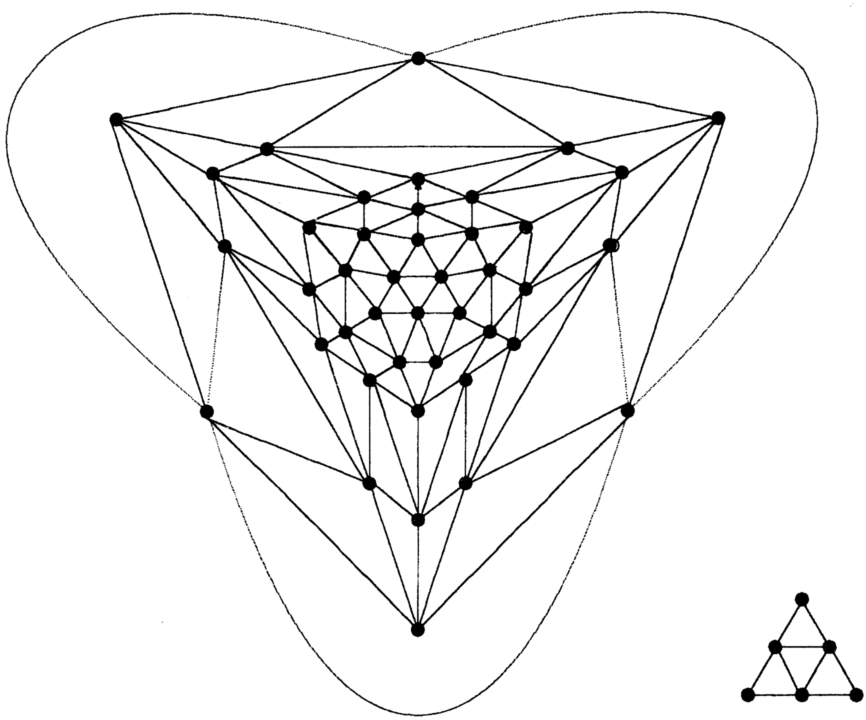


а *б*

Рис. 6

любого из параметров A_0, B_0, C_0, D_0 хотя бы на единицу или при отбрасывании пункта e) теорема становится неверной. Чтобы доказать это, для каждого из условий теоремы 1 построим бесконечную серию таких графов, что каждый граф удовлетворяет лишь данному условию теоремы, причем соответствующий параметр достигает своего предельного значения (A_0, B_0, C_0 или D_0). Тем самым мы покажем, что граничные значения во всех оценках теоремы 1 достигаются независимо. Для условия a) искомую серию образуют все полные двудольные графы $K_{2,n}$ при $n \geqslant 6$ (рис. 4); эта серия примеров относится к случаю, когда граф G не является нормальной картой.

Примерами для условия b) могут служить четыреангуляции специального вида; одна из них показана на рис. 5, *а*: она получается заменой каждой грани куба на квадратную решетку, изображенную на рис. 5, *б*. Для получения бесконечной серии четыреангуляций достаточно произвольным образом измельчать указанную решетку. В каждой полученной



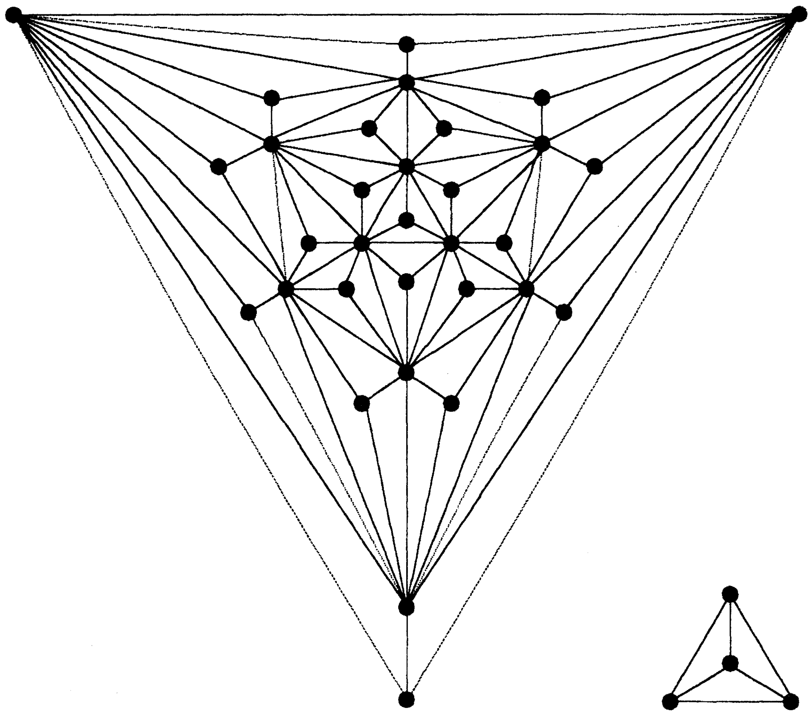
а *б*

Рис. 7

четыреангуляции все «старые» вершины куба имеют степень 3, а все «новые» вершины — степень 4.

Наиболее сложную структуру имеют примеры для случая c), один из которых приведен на рис. 6, *а*. Он получается заменой в октаэдре каждой грани на конфигурацию, показанную на рис. 6, *б* (где пунктиром изображены отсутствующие участки «старых» ребер октаэдра). В полученном таким образом графе G отсутствуют слабые ребра, а каждая треугольная грань инцидентна двум вершинам степени 5 и одной вершине степени 4. Кроме того, в G имеется 12 вершин степени 3, расположенных на расстоянии 3 друг от друга, каждая из которых смежна лишь с 5-вершинами. Для построения бесконечной серии подобных графов достаточно производить описанную замену граней в любой плоской триангуляции, все вершины которой имеют четную степень.

Одним из примеров для случая d) является триангуляция, изображенная на рис. 7, *а*; она получается заменой в икосаэдре каждой грани на треугольную решетку, показанную на рис. 7, *б*. Как и в случае b) произвольное измельчение данной решетки приводит к бесконечной серии



а *б*

Рис. 8

похожих друг на друга триангуляций. В каждой из них все «старые» вершины икосаэдра имеют степень 5, а все «новые» — степень 6.

Одним из примеров для случая е) служит триангуляция на рис. 8, *а*; она получается добавлением в каждую грань икосаэдра вершины степени 3, т. е. заменой каждой грани на конфигурацию, изображенную на рис. 8, *б*. В построенной триангуляции все «старые» вершины икосаэдра имеют степень 10.

Если вместо икосаэдра использовать любую плоскую триангуляцию с минимальной степенью 5, то получим бесконечную серию примеров, в каждом из которых вершины исходной триангуляции имеют степень не менее 10, а «новые» вершины — степень 3, что обеспечивает нужные свойства.

Итак, для каждого из пунктов а) — е) мы привели серию подкрепляющих примеров и тем самым доказали неулучшаемость и независимость оценок из теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Aksenov V. A., Borodin O. V., Mel'nikov L. S., Sabidussi G., Stiebitz M., Toft B.** Deeply asymmetric planar graphs // J. of Combin. Theory. Ser. B. (Submitted.)
2. **Borodin O. V.** Joint extension of two Kotzig's theorems on 3-polytopes // Combinatorica. 1992. V. 13, N 1. P. 121–125.
3. **Kotzig A.** Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1955. V. 5. P. 101–113.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
24 июля 2000 г.