ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2000. Серия 1. Том 7, № 4, 111–125

УДК 519.176

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ РАНГОВОЙ ФУНКЦИИ МАТРОИДА*)

В. В. Шенмайер

Рассматриваются две функции, являющиеся обобщениями ранговых функций системы независимости и, в частности, ранговой функции матроида. В терминах данных функций определена точность, с которой жадный алгоритм позволяет решать задачу целочисленного программирования с линейным целевым функционалом на максимум. Установлена связь между оптимальностью жадного алгоритма и субмодулярностью ранговых функций. В качестве следствия показано, что задача коммивояжера в неориентированном графе на максимум разрешима алгоритмом «иди в самый далекий непройденный город» с относительной точностью 1/2.

Введение

Рассматриваются две функции, являющиеся обобщениями функций верхнего и нижнего ранга системы независимости. Цель статьи — опираясь на свойства данных функций, определить точность, с которой жадный алгоритм (алгоритм покоординатного подъема) позволяет решать задачу целочисленного программирования с линейным целевым функционалом на максимум.

Как известно, в случае систем независимости точность жадного алгоритма оценивается через отношение ранговых функций [3–5]. Ниже аналогичный результат доказан для случая произвольных конечных систем целочисленных неотрицательных векторов.

В случае матроидов ранговая функция субмодулярна, и жадный алгоритм позволяет находить оптимальное решение [2, 6]. В статье установлен более общий результат: если в случае произвольной системы целочисленных неотрицательных векторов жадный алгоритм позволяет находить оптимальное решение, то обобщенные ранговые функции монотонны и субмодулярны. Более того, найден класс систем векторов

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

(являющийся обобщением систем независимости), для которого верно и обратное утверждение.

В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, рассматривается задача коммивояжера в неориентированном графе на максимум. Показано, что алгоритм «иди в самый далекий непройденный город» позволяет решать данную задачу с относительной точностью 1/2.

1. Системы независимости

Пусть $I = \{1, \dots, n\}$, где n — произвольное натуральное число, и $\mathscr{H}$ — непустое семейство подмножеств множества I. Пусть $\mathscr{H}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\text{если } A \subseteq B \in \mathscr{H}, \text{ то } A \in \mathscr{H}.$$

В этом случае семейство $\mathscr{H}$ называется *системой независимости*, или *системой множеств, монотонной вниз.* При этом множества из $\mathscr{H}$ называются *независимыми множествами.* Максимальные по включению множества из $\mathscr{H}$ называются *базами системы* $\mathscr{H}$.

Пусть $|F|$ — мощность множества F и $\mathscr{H}_A = \{F \in \mathscr{H} \mid F \subseteq A\}$. Система независимости $\mathscr{H}$ называется *матроидом*, если при любом $A \subseteq I$ базы системы $\mathscr{H}_A$ равномощны. Положим

$$r(A) = \max\{|F| \mid F \in \mathscr{H}_A\}, \tag{1}$$

$$r'(A) = \min\{|F| \mid F - \text{база системы } \mathscr{H}_A\}. \tag{2}$$

Величины $r(A)$ и $r'(A)$ называются *верхним* и *нижним рангами* множества A соответственно [3]. Функции r и r' называются *ранговыми функциями* системы независимости $\mathscr{H}$. В случае, когда $\mathscr{H}$ — матроид, эти функции совпадают и называются *ранговыми функциями* матроида $\mathscr{H}$.

Рассмотрим следующую задачу.

Независимое множество максимального веса. Пусть $\mathscr{H}$ — система независимости на множестве I. Предположим, что каждому элементу $i \in I$ приписан неотрицательный вес $w(i)$ и вес $w(F)$ произвольного множества $F \subseteq I$ равен $\sum\limits_{i \in F} w(i)$. Требуется найти независимое множество максимального веса.

Для решения данной задачи предлагается использовать жадный алгоритм (алгоритм покоординатного подъема). Он начинает свою работу с пустого множества и на каждом шаге к имеющемуся множеству F добавляет один элемент максимального веса из множества $J(F) = \{i \in I \mid F \cup i \in \mathscr{H} \text{ и } i \notin F\}$. Отметим, что данный алгоритм не всегда

однозначно определен, так как множество $J(F)$ может содержать более одного элемента максимального веса.

Пусть $w^{\text{опт}}$ — вес оптимального решения; w^* — вес решения, полученного с помощью жадного алгоритма (если таких решений несколько, то среди них выбирается наименьшее по весу). Величины $w^{\text{опт}}$ и w^* зависят от w и $\mathscr{H}$. Во избежание громоздких обозначений зависимость от $\mathscr{H}$ фиксироваться не будет. Пусть $\varepsilon_{\mathscr{H}}$ — относительная точность жадного алгоритма в случае системы $\mathscr{H}$, т. е.

$$\varepsilon_{\mathscr{H}} = \inf\left\{\frac{w^*}{w^{\text{опт}}} \mid w \geqslant 0,\ w^{\text{опт}} > 0\right\}.$$

Будем говорить, что жадный алгоритм *находит оптимальное решение*, если при любых неотрицательных весах $w(i)$ все находимые им решения оптимальны, т. е. $\varepsilon_{\mathscr{H}} = 1$.

Пусть f — произвольная функция на 2^I. Функция f называется *субмодулярной*, если для любых подмножеств $A, B \subseteq I$ выполнено неравенство

$$f(A \cap B) + f(A \cup B) \leqslant f(A) + f(B).$$

Функция f называется *монотонной*, если $f(A) \leqslant f(B)$ для любых подмножеств $A, B \subseteq I$ таких, что $A \subseteq B$.

Утверждение 1. *Пусть $\mathscr{H}$ — система независимости. Тогда следующие высказывания эквивалентны:*

(a) *система $\mathscr{H}$ является матроидом;*

(b) *функции r и r' совпадают;*

(c) *функция r субмодулярна;*

(d) *жадный алгоритм находит оптимальное решение.*

Данное утверждение является набором эквивалентных определений матроида вместе с характеризацией Радо–Эдмондса [2, 6].

Утверждение 2 [3–5]. *Пусть $\mathscr{H}$ — система независимости. Тогда*

$$\varepsilon_{\mathscr{H}} = \min\left\{\frac{r'(A)}{r(A)} \mid A \subseteq I,\ r(A) > 0\right\}.$$

Ниже будут доказаны три теоремы, являющиеся обобщениями данных результатов.

2. Системы целочисленных неотрицательных векторов

Пусть $\Im$ — такая непустая конечная система векторов с целыми неотрицательными компонентами, что $\Im \subset N^I$, где $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $I = \{1, \ldots, n\}$.

Пусть $X \in N^I$, $i \in I$ и $A \subseteq I$. Введем следующие обозначения:

$\mathscr{B}(\Im)$ — множество максимальных векторов системы $\Im$;

$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единственная единица расположена в i-й позиции;

$|X|$ — сумма компонент вектора X;

$X(i)$ — i-я компонента вектора X;

X_A — такой вектор, что $X_A(i) = X(i)$ при $i \in A$ и $X_A(i) = 0$ при $i \in I - A$;

$I(X) = \{\, i \in I \mid X(i) > 0 \}$ — носитель вектора X;

$J(X) = \{i \in I \mid X + e_i \in \Im\}$ — множество допустимых направлений увеличения вектора X;

$\Im_A = \{\, Y \in \Im \mid I(Y) \subseteq A \}$.

Далее на множестве 2^I определим две функции β и β', являющиеся обобщениями ранговых функций систем независимости. Для этого нам потребуются следующие понятия.

Пусть $S = (i(1), \dots, i(k))$ — некоторая последовательность элементов множества I. Будем говорить, что последовательность S *допустима*, если $e_{i(1)} + \ldots + e_{i(j)} \in \Im$ при каждом $j = 1, \dots, k$. Пусть $A \subseteq I$. Будем говорить, что последовательность S *согласована с множеством* A, если при каждом $j = 1, \dots, k$

$$\text{либо } i(j) \in A, \text{ либо } J(\, e_{i(1)} + \ldots + e_{i(j-1)}\,) \cap A = \varnothing.$$

Будем говорить, что вектор X *согласован с множеством* A, если X представим в виде $X = e_{i(1)} + \ldots + e_{i(k)}$, где $i(1), \dots, i(k)$ — допустимая последовательность, согласованная с A.

Положим

$$\beta(A) = \max\{|X_A| \mid X \in \Im\}, \tag{3}$$

$$\beta'(A) = \min\{|X_A| \mid X \in \Im,\ J(X) = \varnothing,\ X \text{ согласован с } A\}. \tag{4}$$

Покажем, что функции β и β' являются обобщениями функций r и r'.

Лемма 1. *Пусть система $\Im$ монотонна вниз, т. е. если $X \leqslant Y \in \Im$ и $X \in N^I$, то $X \in \Im$. Тогда*

$$\beta(A) = \max\{|X| \mid X \in \Im_A\}, \tag{5}$$

$$\beta'(A) = \min\{|X| \mid X \in \mathscr{B}(\Im_A)\}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $X \in \Im$. Тогда $X_A \in \Im$ в силу монотонности вниз системы $\Im$. При этом $I(X_A) \subseteq A$. Отсюда следует, что $\{X_A \mid X \in \Im\} = \Im_A$. Это доказывает равенство (5).

Докажем справедливость равенства (6). Пусть $X \in \Im$, $J(X) = \varnothing$, и X представим в виде $X = e_{i(1)} + \ldots + e_{i(k)}$, где $i(1), \ldots, i(k)$ — допустимая последовательность, согласованная с A. Так как система $\Im$ монотонна вниз, то для каждого $j = 1, \ldots, k$ выполняется включение

$$\{i(j), \ldots, i(k)\} \subseteq J(e_{i(1)} + \ldots + e_{i(j-1)}). \tag{7}$$

Пусть j — минимальный номер такой, что $i(j) \notin A$ (если $i(1), \ldots, i(k) \in A$, то полагаем $j = k + 1$). Так как последовательность $i(1), \ldots, i(k)$ согласована с A, то $J(e_{i(1)} + \ldots + e_{i(j-1)}) \cap A = \varnothing$. Отсюда и из (7) следует, что $X_A = e_{i(1)} + \ldots + e_{i(j-1)}$. Следовательно, $X_A \in \mathscr{B}(\Im_A)$. Поэтому

$$\{X_A \mid X \in \Im,\ J(X) = \varnothing,\ X \text{ согласован с } A\} \subseteq \mathscr{B}(\Im_A). \tag{8}$$

С другой стороны, пусть $Y \in \mathscr{B}(\Im_A)$. Тогда $J(Y) \cap A = \varnothing$. Рассмотрим вектор $X \in \mathscr{B}(\Im)$ такой, что $X \geqslant Y$. Так как система $\Im$ монотонна вниз, то $I(X - Y) \subseteq J(Y)$. Отсюда получаем $I(X - Y) \cap A = \varnothing$. Следовательно, $X_A = Y$ и вектор X согласован с множеством A. При этом $J(X) = \varnothing$. Поэтому

$$\mathscr{B}(\Im_A) \subseteq \{X_A \mid X \in \Im,\ J(X) = \varnothing,\ X \text{ согласован с } A\}. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) получаем равенство (6). Лемма доказана.

Заметим, что системы независимости — это, по сути, не что иное, как монотонные вниз системы булевых векторов. Отсюда и из соотношений (1), (2), (5) и (6) следует, что функции β и β' являются обобщениями функций r и r' на случай систем целочисленных неотрицательных векторов. Далее будет показано, что для этих функций справедливы теоремы, аналогичные утверждениям 1 и 2.

Для этого рассмотрим следующую задачу, являющуюся обобщением задачи о независимом множестве максимального веса.

Задача целочисленного программирования. Пусть $\Im$ — непустая конечная система векторов с целыми неотрицательными компонентами, $\Im \subset N^I$. Предположим, что каждому элементу $i \in I$ приписан неотрицательный вес $w(i)$ и вес $w(X)$ произвольного вектора $X \in N^I$ равен $\sum_{i \in I} w(i)\, X(i)$. Среди векторов системы $\Im$ требуется найти вектор максимального веса.

Для решения данной задачи предлагается использовать жадный алгоритм. Он начинает свою работу с нулевого вектора и на каждом шаге к имеющемуся вектору X добавляет вектор e_i, где i имеет максимальный вес среди элементов множества $J(X)$.

Сохраним предыдущие обозначения:

$w^{\text{опт}}$ — вес оптимального решения;

w^* — вес решения, полученного с помощью жадного алгоритма (если таких решений несколько, то среди них выбирается наименьшее по весу).

Величины $w^{\text{опт}}$ и w^* зависят от w и $\Im$. Во избежание громоздких обозначений зависимость от $\Im$ фиксироваться не будет.

Пусть $\varepsilon_\Im$ — относительная точность жадного алгоритма в случае системы $\Im$, т. е.

$$\varepsilon_\Im = \inf\left\{\frac{w^*}{w^{\text{опт}}} \mid w \geqslant 0, w^{\text{опт}} > 0\right\}.$$

При этом будем говорить, что жадный алгоритм *находит оптимальное решение*, если при любых неотрицательных весах $w(i)$ все находимые им решения оптимальны, т. е. $\varepsilon_\Im = 1$.

Теорема 1. *Пусть $\Im$ — произвольная непустая конечная система целочисленных неотрицательных векторов, $\Im \subset N^I$. Тогда*

$$\varepsilon_\Im = \min\left\{\frac{\beta'(A)}{\beta(A)} \mid A \subseteq I,\ \beta(A) > 0\right\}.$$

При доказательстве теоремы 1 используем следующие две леммы.

Лемма 2. $\varepsilon_\Im = \min\left\{\frac{w^*}{w^{\text{опт}}} \mid w -\right.$ *булевый вектор,* $\left. w^{\text{опт}} > 0\right\}$, *т. е. максимальная погрешность жадного алгоритма достигается при весах 0 и 1.*

Доказательство леммы 2. Сначала покажем, что инфимум в определении величины $\varepsilon_\Im$ достигается. Заметим, что отношение $\frac{w^*}{w^{\text{опт}}}$ сохраняется при умножении всех весов на положительную константу. Следовательно, $\varepsilon_\Im = \inf\{w^* \mid w \geqslant 0,\ w^{\text{опт}} = 1\}$.

Для каждого вектора $X \in \Im$ положим $\varepsilon_\Im(X) = \inf\{w(X) \mid w \geqslant 0$, $w^{\text{опт}} = 1$ и при векторе весов w вектор X может быть получен по правилам жадного алгоритма $\}$. Тогда $\varepsilon_\Im = \min\{\varepsilon_\Im(X) \mid X \in \Im,\ \varepsilon_\Im(X) < \infty\}$.

Покажем, что $\varepsilon_\Im(X) = \inf\{w(X) \mid w \in P_X\}$, где P_X — объединение конечного числа выпуклых многогранников. Пусть $Y \in \Im$ и $S = (i(1), \dots, i(k))$ — допустимая последовательность системы $\Im$. Рассмотрим следующие множества:

$A = \{w \mid w \geqslant 0\}$;

$B_Y = \{w \mid w(Y) = 1$ и $w(Y') \leqslant 1$ при всех $Y' \in \Im\}$;

$B = \cup\{B_Y \mid Y \in \Im\}$;

$C_S = \left\{w \mid w(i(q)) \geqslant w(j) \text{ при всех } j \in J\Big(\sum\limits_{p=1}^{q-1} e_{i(p)}\Big),\ q = 1, \dots, k\right\}$;

$D_X = \cup\Big\{C_S \mid S$ — допустимая последовательность, $S = (i(1), \dots, i(k))$ и $\sum\limits_{p=1}^{k} e_{i(p)} = X\Big\}$;

$P_X = A \cap B \cap D_X$.

Ясно, что $w^{\text{опт}} = 1$ тогда и только тогда, когда $w \in B$. С другой стороны, вектор X может быть получен по правилам жадного алгоритма тогда и только тогда, когда $w \in D_X$. Следовательно, $\varepsilon_{\Im}(X) = \inf\{w(X) \mid w \in P_X\}$. При этом легко видеть, что множество P_X является объединением конечного числа выпуклых многогранников.

Далее заметим, что функция $w(X)$, рассматриваемая как функция переменного w, линейна и на множестве P_X ограничена снизу нулем. Поэтому если $\varepsilon_{\Im}(X) < \infty$, то $P_X \neq \varnothing$ и существует вектор $w_x \in P_X$ такой, что $\varepsilon_{\Im}(X) = w_x(X)$. Следовательно, $\varepsilon_{\Im} = \min\{w_x(X) \mid X \in \Im, \varepsilon_{\Im}(X) < \infty\} = w(Y)$, где Y — некоторый вектор из $\Im$ и $w = w_Y$. Ясно, что $w^* = w(Y)$ и $w^{\text{опт}} = 1$. Отсюда получаем $\varepsilon_{\Im} = \dfrac{w^*}{w^{\text{опт}}}$. При этом $w \geqslant 0$ и $w^{\text{опт}} > 0$. Таким образом, инфимум в определении $\varepsilon_{\Im}$ достигается.

Пусть вектор весов w таков, что $w \geqslant 0$, $w^{\text{опт}} > 0$, $\varepsilon_{\Im} = \dfrac{w^*}{w^{\text{опт}}}$ и среди всех таких векторов вектор w определяет минимальное по мощности множество $\widetilde{w} = \{w(i) \mid i \in I\}$. Покажем, что в $\widetilde{w}$ содержится не более одного ненулевого элемента.

Предположим, что это не верно. Тогда существуют элементы $a = \min\{w(i) \mid i \in I,\ w(i) > 0\}$ и $b = \min\{w(i) \mid i \in I,\ w(i) > a\}$. Пусть $A = \{i \mid w(i) = a\}$, $w^* = w(X)$ и $w^{\text{опт}} = w(Y)$, где $X, Y \in \Im$ и вектор X может быть получен по правилам жадного алгоритма. Тогда

$$\varepsilon_{\Im} = \frac{w(X)}{w(Y)} = \frac{a|X_A| + c}{a|Y_A| + d},$$

где $c = \sum\limits_{i \in I-A} w(i)\,X(i)$ и $d = \sum\limits_{i \in I-A} w(i)\,Y(i)$.

Пусть $\delta \in [0,\ b]$ и

$$w'(i) = \begin{cases} w(i), & \text{если } i \in I - A, \\ \delta, & \text{если } i \in A. \end{cases}$$

Заметим, что вектор X может быть получен по правилам жадного алгоритма при векторе весов w'. Поэтому $(w')^* \leqslant \delta|X_A| + c$. С другой стороны, $(w')^{\text{опт}} \geqslant \delta|Y_A| + d$. Отсюда и из минимальности $\varepsilon_{\Im}$ следует, что a является точкой минимума функции $f(\delta) = \dfrac{\delta|X_A| + c}{\delta|Y_A| + d}$ на отрезке $[0, b]$. Но функция $f(\delta)$ монотонна при $\delta > 0$. Следовательно, $f(\delta)$ либо не имеет экстремумов при $\delta > 0$, либо тождественно равна константе. Отсюда и из минимальности множества $\widetilde{w}$ следует,что $a \in \{0, b\}$. Но это противоречит выбору элементов a и b.

Таким образом, множество $\widetilde{w}$ содержит не более одного ненулевого элемента. Но так как $w^{\text{опт}} \neq 0$, то в $\widetilde{w}$ содержится ровно один ненулевой

элемент. Поделив на него вектор w, получим искомый булевый вектор. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если w — булевый вектор весов, то вектор $X \in \Im$ может быть получен по правилам жадного алгоритма тогда и только тогда, когда $J(X) = \varnothing$ и X согласован с множеством $I(w)$.*

Доказательство. Предположим, что в процессе работы жадного алгоритма была построена допустимая последовательность $i(1), \ldots, i(k)$ и вместе с ней вектор $X = e_{i(1)} + \ldots + e_{i(k)}$. Тогда $J(X) = \varnothing$. Пусть $s \in \{1, \ldots, k\}$ и $w(i(s)) = 0$. Тогда согласно выбору алгоритма имеем $w(j) = 0$ для всех $j \in J(e_{i(1)} + \ldots + e_{i(s-1)})$. Следовательно, последовательность $i(1), \ldots, i(k)$ и вектор X согласованы с множеством $I(w)$.

Обратное утверждение доказывается в обратном порядке. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 2 имеем

$$\varepsilon_{\Im} = \min\left\{\frac{w^*}{w^{\text{опт}}} \mid w - \text{ булевый вектор, } w^{\text{опт}} > 0\right\}.$$

Пусть w — булевый вектор весов и $A = I(w)$. Тогда вес произвольного вектора X равен $|X_A|$. Отсюда и из леммы 3 получаем

$$w^* = \min\{|X_A| \mid X \in \Im,\ J(X) = \varnothing,\ X \text{ согласован с } A\} = \beta'(A).$$

С другой стороны,

$$w^{\text{опт}} = \max\{|X_A| \mid X \in \Im\} = \beta(A).$$

Следовательно, $\varepsilon_{\Im} = \min\left\{\dfrac{\beta'(A)}{\beta(A)} \mid A \subseteq I,\ \beta(A) > 0\right\}$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Жадный алгоритм находит оптимальное решение тогда и только тогда, когда функции β и β' тождественно равны.*

Следствие 2. *Пусть система $\Im$ монотонна вниз. Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение в том и только в том случае, если при любом $A \subseteq I$ максимальные векторы системы $\Im_A$ имеют одинаковую сумму компонент.*

Теорема 1 и следствие 1 являются обобщениями утверждения 2 и частично утверждения 1. Следствие 2 является обобщением теоремы Радо–Эдмондса [2, 6] и может быть доказано непосредственно [1]. Ниже будет рассмотрен вопрос о субмодулярности ранговых функций.

Теорема 2. *Если жадный алгоритм находит оптимальное решение, то функции β и β' монотонны и субмодулярны.*

Доказательство. Сначала покажем, что если $A \subseteq B \subset I$ и $i \in I - B$, то

$$\beta(B \cup i) - \beta(B) \leqslant \beta(A \cup i) - \beta(A). \tag{10}$$

Положим

$$w(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in A; \\ p, & \text{если } j \in B - A; \\ q, & \text{если } j = i; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть вектор $X \in \Im$ определен по правилам жадного алгоритма при условии, что $1 > p > q > 0$. Заметим, что вектор X может быть построен с помощью жадного алгоритма в следующих случаях: $p = q = 0$; $p = 1$, $q = 0$; $p = q = 1$. Отсюда и из условия оптимальности алгоритма следует, что

$$|X_A| = \max\{|Y_A| \mid Y \in \Im\} = \beta(A);$$
$$|X_B| = \max\{|Y_B| \mid Y \in \Im\} = \beta(B);$$
$$|X_{B\cup i}| = \max\{|Y_{B\cup i}| \mid Y \in \Im\} = \beta(B \cup i).$$

Следовательно, $\beta(B \cup i) - \beta(B) = |X_{B\cup i}| - |X_B| = X(i) = |X_{A\cup i}| - |X_A| = |X_{A\cup i}| - \beta(A) \leqslant \beta(A \cup i) - \beta(A)$. Неравенство (10) доказано.

Пусть A и B — произвольные подмножества множества I. Индукцией по мощности множества $B - A$ покажем, что $\beta(A \cap B) + \beta(A \cup B) \leqslant \beta(A) + \beta(B)$.

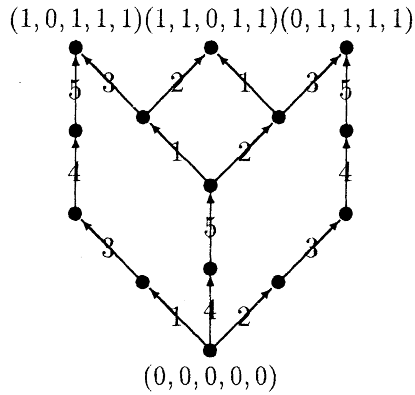
База индукции: если $A \subseteq B$, то все очевидно.

Индукционный шаг: пусть $i \in I - (A \cup B)$. Заметим, что $\beta(A \cap (B \cup i)) + \beta(A \cup (B \cup i)) = \beta(A \cap B) + \beta(A \cup B \cup i) = g + h$, где $g = \beta(A \cap B) + \beta(A \cup B)$ и $h = \beta(A \cup B \cup i) - \beta(A \cup B)$. По предположению индукции $g \leqslant \beta(A) + \beta(B)$. При этом $h \leqslant \beta(B \cup i) - \beta(B)$ согласно неравенству (10). Следовательно, $\beta(A \cap (B \cup i)) + \beta(A \cup (B \cup i)) \leqslant \beta(A) + \beta(B \cup i)$.

Таким образом, функция β субмодулярна. С другой стороны, функция β монотонна. Отсюда и из следствия 1 вытекает, что функция β' также субмодулярна и монотонна. Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение, обратное теореме 2, не верно: имеются примеры, когда функции β и β' монотонны и субмодулярны, но $w^* \not\equiv w^{\text{опт}}$. При этом система $\Im$ может быть монотонной вниз или системой достижимых булевых векторов.

Пример. Пусть система $\Im$ представлена диаграммой Хассе (см. рисунок). Данная система состоит из булевых векторов и удовлетворяет



следующим условиям достижимости:

$$\begin{gathered}\text{если } X - \text{ не нулевой вектор и } X \in \Im, \\ \text{то } X - e_i \in \Im \text{ при некотором } i \in I;\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\text{если } X \in \Im - \mathscr{B}(\Im), \\ \text{то } X + e_i \in \Im \text{ при некотором } i \in I.\end{gathered} \tag{12}$$

Выпишем функции β и β':

$$\beta(A) = \begin{cases} |A| - 1, & \text{если } A \supseteq \{1,2,3\}, \\ |A| & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\beta'(A) = \begin{cases} |A| - 1, & \text{если } A \supseteq \{1,2\}, \\ |A| & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что функции β и β' монотонны и субмодулярны. Но при векторе весов $w = (1,1,0,0,0)$ имеем $w^* < w^{\text{опт}}$.

3. Один частный случай

Ниже будет рассмотрен случай, когда для оптимальности жадного алгоритма не только необходимо, но и достаточно монотонности и субмодулярности функции β'. Данный случай является обобщением случая систем независимости.

Пусть $\Im$ — система булевых векторов (по сути, система множеств) такая, что выполнено следующее условие достижимости:

$$\begin{gathered}\text{если } X \leqslant Y,\ X \neq Y,\ X \in \Im \text{ и } Y \in \mathscr{B}(\Im), \\ \text{то } X + e_i \in \Im \text{ при некотором } i \in I(Y - X).\end{gathered} \tag{13}$$

Заметим, что условие (13) слабее условия монотонности вниз. Следовательно, рассматриваемый частный случай является обобщением

случая систем независимости. С другой стороны, условие (13) сильнее условий достижимости (11) и (12). При этом система векторов из рассмотренного выше примера удовлетворяет условиям (11) и (12), но не удовлетворяет условию (13).

Но в отличие от условий достижимости (11) и (12) условие (13) обеспечивает выполнение утверждения, обратного теореме 2. Другими словами, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $\Im$ — система булевых векторов, удовлетворяющая условию* (13). *Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение в том и только в том случае, если функция β' монотонна и субмодулярна.*

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая

Лемма 4. *Пусть $\Im$ — система булевых векторов, удовлетворяющая условию* (13), *и пусть $X \in \mathscr{B}(\Im)$, $F = I(X)$. Тогда $\beta'(F) = |F|$.*

Доказательство. Пусть $i(1), \ldots, i(k)$ — произвольная допустимая последовательность, согласованная с множеством F, $Y = e_{i(1)} + \ldots + e_{i(k)}$ и $J(Y) = \varnothing$. Покажем, что $\{i(1), \ldots, i(k)\} = F$. Предположим, что s — минимальный номер такой, что $i(s) \notin F$. Так как последовательность $i(1), \ldots, i(k)$ согласована с F, то $J(e_{i(1)} + \ldots + e_{i(s-1)}) \cap F = \varnothing$. При этом $e_{i(1)} + \ldots + e_{i(s-1)} \leqslant X$. Но это противоречит условию (13). Следовательно, $\{i(1), \ldots, i(k)\} \subseteq F$. Пусть $\{i(1), \ldots, i(k)\} \subset F$. Тогда $Y \leqslant X$ и $Y \neq X$. Отсюда и из условия (13) следует, что $J(Y) \neq \varnothing$. Но это противоречит выбору вектора Y. Поэтому $\{i(1), \ldots, i(k)\} = F$.

Отсюда получаем $|Y_F| = |Y| = k$. С другой стороны, из булевости системы $\Im$ следует, что элементы $i(1), \ldots, i(k)$ не повторяются и $|F| = k = |Y_F|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость следует из теоремы 2.

Достаточность. Согласно следствию 1 достаточно показать, что функции β и β' совпадают. Заметим, что функция β' не превосходит функции β. Пусть A — минимальное по включению подмножество I такое, что $\beta'(A) < \beta(A)$. Согласно определению функции β существует вектор $X \in \Im$ такой, что $\beta(A) = |X_A|$. Не уменьшая общности, можно считать, что $X \in \mathscr{B}(\Im)$. Пусть $F = I(X)$. Предположим, что $A \not\subseteq F$ и $i \in A - F$. Тогда $\beta(A - i) \geqslant |X_{A-i}| = |X_A| = \beta(A) > \beta'(A)$. Отсюда и из монотонности функции β' следует, что $\beta(A - i) > \beta'(A - i)$. Но это противоречит минимальности множества A. Поэтому $A \subseteq F$.

Далее, так как функция β' субмодулярна, то

$$\beta'(A) + \beta'(F - A) \geqslant \beta'(F). \tag{14}$$

Из булевости системы $\Im$ следует, что $\beta'(F - A) \leqslant |F - A|$ и $\beta'(A) < \beta(A) \leqslant |A|$. Отсюда и из соотношения (14) получаем $|F| > \beta'(F)$. Но это противоречит лемме 4. Теорема доказана.

Замечание 2. В теореме 3 оба условия на функцию β' (монотонность и субмодулярность) существенны. Легко построить примеры таких систем булевых векторов, что выполнено условие (13) и $w^* \not\equiv w^{\text{опт}}$, причем функция β' либо субмодулярна и не монотонна, либо монотонна и не субмодулярна.

4. Задача коммивояжера

Для иллюстрации полученных выше результатов приведем пример такого класса задач, что отношение соответствующих функций β' и β имеет простую достижимую нижнюю оценку.

Пусть $G = (V, E)$ — полный неориентированный граф с петлями. *Маршрутом в графе* G называется любая последовательность вершин в G. *Маршрутом коммивояжера* называется любой маршрут $x_0, x_1, \ldots, x_l$ такой, что $x_0 = x_l$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_l\} = V$ и $l = |V|$. Не уменьшая общности, будем считать, что все маршруты коммивояжера начинаются в некоторой фиксированной вершине $x_0 \in V$.

Предположим, что каждому ребру $e \in E$ приписан неотрицательный вес $w(e)$ и вес произвольного маршрута $x_0, x_1, \ldots, x_k$ равен

$$\sum_{i=1}^{k} w(\{x_{i-1}, x_i\}),$$

где $\{x_{i-1}, x_i\}$ — ребро, инцидентное вершинам x_{i-1} и x_i. Требуется найти маршрут коммивояжера максимального веса.

Для решения данной задачи предлагается использовать жадный алгоритм, действующий по правилу «иди в самый далекий непройденный город». Алгоритм начинает свою работу с вершины x_0, и вершина x_k ($k = 1, \ldots, l-1$) выбирается из условия

$$w(\{x_{k-1}, x_k\}) = \max\{w(\{x_{k-1}, x\}) \mid x \in V - \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}\}.$$

Рассмотрим эквивалентную задачу целочисленного программирования. Пусть $I = E$ и система $\Im(G) \subset N^I$ состоит из векторов вида $X = e_{f(1)} + \ldots + e_{f(k)}$, где $f(1), \ldots, f(k)$ — последовательность ребер начального сегмента некоторого маршрута коммивояжера. Среди векторов системы $\Im(G)$ требуется найти вектор максимального веса. Так как все веса неотрицательны, то среди решений данной задачи существуют максимальные векторы. Последние соответствуют маршрутам коммивояжера.

Ясно, что предложенный алгоритм построения маршрута коммивояжера, по сути, является жадным алгоритмом для соответствующей задачи целочисленного программирования.

Теорема 4. *В случае системы $\Im(G)$ для любого множества $A \subseteq E$ выполняется неравенство $\beta'(A) \geqslant \beta(A)/2$.*

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $f(1),\dots,f(l)$ и $h(1),\dots,h(l)$ — последовательности ребер двух маршрутов коммивояжера с началом в x_0, $A \subseteq E$ и $|\{k \mid f(k) \in A\}| = p$. Тогда*

$$\Bigl|\Bigl\{k \mid J\Bigl(\sum_{i=1}^{k-1} e_{h(i)}\Bigr) \cap A \neq \varnothing\Bigr\}\Bigr| \geqslant p/2.$$

Доказательство. Положим

$x_0, x_1, \dots, x_l$ — маршрут коммивояжера, образованный ребрами $f(1),\dots,f(l)$;

$y_0, y_1, \dots, y_l$ — маршрут коммивояжера, образованный ребрами $h(1),\dots,h(l)$;

$E(y_0, y_1, \dots, y_i) = \{\{y_i, y\} \mid y \in V - \{y_0, y_1, \dots, y_i\}\}$, $i = 0,\dots,l-2$;

$E(\ y_0, y_1, \dots, y_{l-1}) = \{\{y_{l-1}, y_l\}\}$;

$g(i)$ — такой номер, что $y_{g(i)} = x_i$ $(i = 0,\dots,l-1)$ и $g(l) = l$;

$i(1),\dots,i(p)$ — такие числа, что $i(1) < \dots < i(p)$ и $f(i(s)) \in A$, $s = 1,\dots,p$;

$k(s) = \min\{g(i(s)-1), g(i(s))\}$;

$m(s) = \max\{g(i(s)-1), g(i(s))\}$.

Заметим, что $J\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{k-1} e_{h(i)}\Bigr) = E(y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$. Так как $k(s) < m(s) \leqslant l$, то $\{y_{k(s)}, y_{m(s)}\} \in E(\ y_0, y_1, \dots, y_{k(s)})$, $s = 1,\dots,p$. С другой стороны, $\{y_{k(s)}, y_{m(s)}\} = \{x_{i(s)-1}, x_{i(s)}\} = f(i(s)) \in A$. Следовательно, $\Bigl\{k \mid J\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{k-1} e_{h(i)}\Bigr) \cap A \neq \varnothing\Bigr\} \supseteq \{k(s) \mid s = 1,\dots,p\}$. Оценим снизу число элементов последнего множества. Зададим следующую ориентацию на множестве ребер графа G. Будем называть вершину x *начальной вершиной ребра* $\{x, y\}$, если в маршруте коммивояжера $y_0, y_1, \dots, y_l$ она встречается раньше вершины y. Заметим, что множество $\{k(s) \mid s = 1,\dots,p\}$ состоит из номеров начальных вершин ребер вида $f(i(s))$, $s = 1,\dots,p$. Но ребра данного вида входят в некоторый маршрут коммивояжера. Поэтому каждая вершина графа инцидентна не более чем двум таким ребрам. Следовательно, существует не менее $p/2$ начальных вершин ребер вида $f(i(s))$. Отсюда получаем $|\{k(s) \mid s = 1,\dots,p\}| \geqslant p/2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть векторы $X, Y \in \Im(G)$ таковы, что $\beta(A) = |X_A|$, $\beta'(A) = |Y_A|$, $J(Y) = \varnothing$ и вектор Y согласован с A. Без уменьшения общности можно считать, что $X \in \mathscr{B}(\Im(G))$. Тогда $X = \sum\limits_{k=1}^{l} e_{f(k)}$ и $Y = \sum\limits_{k=1}^{l} e_{h(k)}$, где $f(1), \ldots, f(l)$ и $h(1), \ldots, h(l)$ — последовательности ребер некоторых маршрутов коммивояжера в графе G. При этом последовательность $h(1), \ldots, h(l)$ согласована с A.

Согласно определению отношения согласованости элемент $h(k)$ принадлежит A тогда и только тогда, когда $J\Big(\sum\limits_{i=1}^{k-1} e_{h(i)}\Big) \cap A \neq \varnothing$. Отсюда и из леммы 5 следует, что

$$\beta'(A) = |Y_A| = |\{k \mid h(k) \in A\}| = \left|\left\{k \mid J\Big(\sum_{i=1}^{k-1} e_{h(i)}\Big) \cap A \neq \varnothing\right\}\right|$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|\{k \mid f(k) \in A\}| = \frac{1}{2}|X_A| = \frac{1}{2}\beta(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *В случае системы $\Im(G)$ справедлива оценка $\varepsilon_{\Im(G)} \geqslant 1/2$. Алгоритм «иди в самый далекий непройденный город» позволяет решать задачу коммивояжера с относительной точностью $1/2$.*

Замечание 3. Полученная оценка точности жадного алгоритма не улучшаема. Имеются такие графы, что $\varepsilon_{\Im(G)} = 1/2$.

В [3, 4] вместо системы $\Im(G)$ рассматривается система, состоящая из векторов $X \in \{0,1\}^E$ таких, что $I(X)$ — произвольное подмножество множества ребер некоторого маршрута коммивояжера. Данная система векторов монотонна вниз, и поэтому применимо утверждение 2. Соответствующий жадный алгоритм также имеет оценку относительной точности $1/2$, но уступает алгоритму «иди в самый далекий непройденный город» в простоте и скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шенмайер В. В.** Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1999. Сер. 1, Т. 6, № 4. С. 104–120.
2. **Edmonds J.** Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971. V. 1, N 2. P. 127–136.
3. **Hausmann D., Korte B., Jenkyns T. A.** Worst case analysis of greedy type algorithms for independence systems // Math. Programming Study. 1980. N 12. P. 120–131.

4. **Jenkyns T. A.** The efficacy of the «greedy» algorithm // Proc. of the 7th Southeaston conference on combinatorics, graph theory, and computing. Congressus Numeriantium, N 17. Winnipeg, Man., 1976. P. 341–350.
5. **Korte B., Hausmann D.** An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Annals of Discrete Math. 1978. V. 2. P. 65–74.
6. **Rado R.** Note on independence functions // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 3. P. 300–320.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
1 июля 2000 г.