ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2000. Серия 1. Том 7, № 4, 20-28

УДК 519.17

ОБ ЭНТРОПИИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ*)

В. Е. Алексеев, С. В. Сорочан

Рассматривается энтропия наследственных классов ориентированных графов (классов орграфов, замкнутых относительно удаления и переименования вершин), определяемая для класса $\mathscr{X}$ как предел отношения логарифма числа графов с n вершинами из $\mathscr{X}$ к логарифму числа всех ориентированных графов с n вершинами. Доказано, что область значений энтропии наследственных классов орграфов является разрывным множеством: если энтропия такого класса положительна, то она не может быть меньше чем $1/4$. Охарактеризованы минимальные по включению наследственные классы орграфов, имеющие энтропию $1/4$.

Введение

Множество графов называется *наследственным классом*, если оно замкнуто относительно удаления вершин и переименования вершин. В [1] было доказано, что для всякого бесконечного наследственного класса обыкновенных графов $\mathscr{X}$ существует *энтропия* $h(\mathscr{X})$, определяемая как предел отношения логарифма числа графов с n вершинами в этом классе к логарифму числа всех обыкновенных графов с n вершинами. Область значений этой функции исследовалась в работах [2, 4]. В первой из них было установлено, что $h(\mathscr{X})$ либо равна нулю, либо не меньше $\frac{1}{2}$ для любого наследственного класса обыкновенных графов. В работе [4] эта область была описана полностью — энтропия бесконечных наследственных классов обыкновенных графов, отличных от класса всех таких графов, может принимать только значения вида $1-\frac{1}{k}$, где k — любое натуральное число. Кроме того, в [4] найдены все минимальные классы с данным значением энтропии — для $h = 1-\frac{1}{k}$ это оказались классы,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00601).

каждый из которых характеризуется параметром $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ и состоит из всех графов, в которых множество вершин можно разбить на k подмножеств таким образом, чтобы i из этих подмножеств порождали полные подграфы, а $(k - i)$ — пустые. В частности, имеется три минимальных класса с энтропией $\frac{1}{2}$ — класс всех двудольных графов, класс всех графов, дополнительных к двудольным, и класс всех расщепляемых графов (это было установлено еще в [2]).

В статье рассматривается энтропия наследственных классов ориентированных графов (орграфов), определяемая для класса $\mathscr{X}$ как предел последовательности

$$h_n(\mathscr{X}) = \frac{\log_2 |\mathscr{X}_n|}{n^2}$$

при $n \to \infty$, где $\mathscr{X}_n$ обозначает множество всех графов из $\mathscr{X}$ с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$. Доказательство существования предела почти не отличается от аналогичного доказательства для неориентированных графов (см. [1]), и мы его не приводим. Вопрос о возможных значениях энтропии для наследственных классов орграфов оказывается значительно сложнее. Результаты настоящей работы аналогичны результатам статьи [2]: мы докажем, что энтропия наследственного класса орграфов, если она положительна, не может быть меньше $1/4$. Будут также охарактеризованы минимальные классы с энтропией $1/4$.

В разд. 1 вводятся необходимые понятия и формулируются основные результаты, разд. 2 содержит доказательства.

Авторы благодарны рецензенту за ценные замечания.

1. Основные результаты

Энтропию множества орграфов $\mathscr{X}$, определенную во введении, будем обозначать через $h(\mathscr{X})$. Если $\mathscr{X}$ — конечное множество орграфов (т. е. $\mathscr{X}_n = \varnothing$ для всех достаточно больших n), то $h(\mathscr{X}) = -\infty$. С помощью теоремы Рамсея легко охарактеризовать минимальные бесконечные наследственные классы. Будем применять частный случай теоремы Рамсея (см., например, [5]), гласящий, что для любых k и s существует такое $R(k, s)$, что при любом раскрашивании множества ребер полного обыкновенного графа не менее чем с $R(k, s)$ вершинами в k цветов в нем найдется монохроматический полный подграф с s вершинами.

Введем обозначения для трех классов орграфов:

$\mathscr{P}_0$ — класс всех пустых графов (графов с пустым множеством дуг);

$\mathscr{P}_2$ — класс всех полных графов (в полном ориентированном графе каждая упорядоченная пара вершин является дугой);

$\mathscr{P}_1$ — класс всех транзитивных турниров (орграфов, в которых каждая пара вершин соединена точно одной дугой и из существования дуг ab и bc следует существование дуги ac).

Эти три класса будем называть *простейшими*. Каждый из них является бесконечным наследственным классом; ни в одном из них нет собственного подмножества, являющегося бесконечным наследственным классом, т. е. все они — минимальные бесконечные наследственные классы. Докажем, что других минимальных бесконечных наследственных классов орграфов не существует.

Теорема 1. *Наследственный класс орграфов бесконечен тогда и только тогда, когда в нем содержится хотя бы один из простейших классов.*

Доказательство. Если $\mathscr{X}$ — бесконечный наследственный класс орграфов, то $\mathscr{X}_n \neq \varnothing$ для всех n. Каждому графу $G \in \mathscr{X}$ поставим в соответствие полный обыкновенный граф $\widetilde{G}$ с тем же множеством вершин и с ребрами, раскрашенными в три цвета 0, 1, 2 по следующему правилу: если в графе G имеется i дуг, соединяющих вершины a и b, то в графе $\widetilde{G}$ ребро ab раскрашивается в цвет i. Пусть $\widetilde{\mathscr{X}}$ — множество всех полученных таким образом раскрашенных графов. Из теоремы Рамсея и из наследственности класса $\mathscr{X}$ следует существование такого цвета i, что в $\widetilde{\mathscr{X}}$ содержатся все полные графы, у которых все ребра имеют цвет i. Если $i = 0$ или 2, то это означает, что $\mathscr{X}$ содержит все пустые или все полные орграфы. При $i = 1$ класс $\mathscr{X}$ содержит турниры с произвольно большим числом вершин. Известно (см., например, [5]), что в любом турнире с n вершинами содержится транзитивный турнир не менее чем с $1 + \log_2 n$ вершинами. Следовательно, в этом случае $\mathscr{X}$ содержит все транзитивные турниры. Теорема доказана.

Энтропия каждого простейшего класса, очевидно, равна 0. Основной целью статьи является доказательство того, что наименьшим положительным значением энтропии наследственных классов орграфов является $\frac{1}{4}$.

Пусть U и V — непересекающиеся множества. *Двудольным орграфом* с левой долей U и правой долей V будем называть тройку (U, V, E), где $E \subseteq (U \times V) \cup (V \times U)$. Типом пары $(a, b) \in U \times V$ по отношению к двудольному орграфу (U, V, E) назовем упорядоченную пару $(P(a, b), P(b, a))$, где $P(x, y) = 1$, если $xy \in E$, и $P(x, y) = 0$ в противном случае. Двудольный орграф может быть задан матрицей, строкам которой поставлены в соответствие вершины левой доли, столбцам — вершины правой доли, и на пересечении строки, соответствующей вершине a, со столбцом, соответствующим вершине b, находится тип пары

(a, b). Эту матрицу будем называть *матрицей типов* двудольного орграфа. Для непустого $T \subseteq \{0,1\}^2$ через $\mathscr{B}(T)$ обозначим класс всех двудольных орграфов, у которых все элементы матрицы типов принадлежат множеству T.

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. Подграф, порожденный множеством $U \subseteq V$, обозначаем через $G\langle U\rangle$, а для двух непересекающихся подмножеств U_1, U_2 множества V через $G\langle U_1, U_2\rangle$ обозначаем двудольный орграф (U_1, U_2, E'), где $E' = E \cap ((U_1 \times U_2) \cup (U_2 \times U_1))$.

Пополнением двудольного орграфа $B = (U, V, E)$ назовем любой орграф $G = (U \cup V, E')$ такой, что $G\langle U, V\rangle = B$.

Пусть $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$ — множества орграфов и $T \subseteq \{0,1\}^2$. Через $\mathscr{X}_1 T \mathscr{X}_2$ обозначим множество всех орграфов $G = (V, E)$, в которых множество вершин можно разбить на две такие части V_1, V_2, что $G\langle V_1\rangle \in \mathscr{X}_1$, $G\langle V_2\rangle \in \mathscr{X}_2$, $G\langle V_1, V_2\rangle \in \mathscr{B}(T)$.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 2. *Для наследственного класса орграфов $\mathscr{X}$ следующие утверждения равносильны*:

(a) $h(\mathscr{X}) > 0$;

(b) *существует такое $T \subseteq \{0,1\}^2$, $|T| = 2$, что каждый двудольный орграф из $\mathscr{B}(T)$ имеет пополнение, принадлежащее $\mathscr{X}$*;

(c) *существуют такие $i, j \in \{0,1,2\}$ и такое $T \subseteq \{0,1\}^2$, $|T| = 2$, что $\mathscr{P}_i T \mathscr{P}_j \subseteq \mathscr{X}$*.

Справедливость импликаций (a) $\Rightarrow$ (b) и (b) $\Rightarrow$ (c) доказывается в разд. 2. В оставшейся части этого раздела докажем, что из (c) следует (a), и сформулируем два следствия из теоремы 2.

Заметим, что в каждом классе $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_2$ имеется единственный граф с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$, а в классе $\mathscr{P}_1$ имеется ровно $n!$ таких графов. Поэтому если $|T| = 2$, а $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$ — любые простейшие классы, то для фиксированного разбиения множества $\{1, \ldots, n\}$ на два подмножества V_1, V_2, где $|V_1| = k$ и $|V_2| = n - k$, имеется не менее $2^{k(n-k)}$ и не более $2^{k(n-k)}k!(n-k)!$ таких графов G, что $G\langle V_1\rangle \in \mathscr{X}_1$, $G\langle V_2\rangle \in \mathscr{X}_2$, $G\langle V_1, V_2\rangle \in \mathscr{B}(T)$. Следовательно, число графов с n вершинами в каждом классе вида $\mathscr{P}_i T \mathscr{P}_j$, содержащихся в утверждении (c) теоремы 2, не меньше $2^{n^2/4}$ и не больше $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k(n-k)}k!(n-k)! \leqslant (n+1)!2^{n^2/4}$. Из этих оценок видно, что энтропия каждого из этих классов равна $1/4$. Поэтому (c) влечет (a) и имеет место

Следствие 1. *Если $\mathscr{X}$ — наследственный класс орграфов и $h(\mathscr{X}) > 0$, то $h(\mathscr{X}) \geqslant 1/4$.*

Имеется 54 различных комбинации значений i, j, T, отвечающие условиям утверждения (c) теоремы 2, однако некоторые из них дают одинаковые классы. Именно,

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_i\{(0,0),(0,1)\}\mathscr{P}_j &= \mathscr{P}_j\{(0,0),(1,0)\}\mathscr{P}_i,\\
\mathscr{P}_i\{(1,1),(0,1)\}\mathscr{P}_j &= \mathscr{P}_j\{(1,1),(1,0)\}\mathscr{P}_i,\\
\mathscr{P}_i\{(0,0),(1,1)\}\mathscr{P}_j &= \mathscr{P}_j\{(0,0),(1,1)\}\mathscr{P}_i,\\
\mathscr{P}_i\{(0,1),(1,0)\}\mathscr{P}_j &= \mathscr{P}_j\{(0,1),(1,0)\}\mathscr{P}_i
\end{aligned}$$

для любых i и j. Нетрудно убедиться, что среди классов вида $\mathscr{P}_i T \mathscr{P}_j$, фигурирующих в утверждении (c) теоремы 2, имеется 30 различных. Это классы, определяемые следующими значениями параметров:

- i и j — любые, $T = \{(0,0),(0,1)\}$ или $T = \{(1,1),(0,1)\}$;
- $i \leqslant j$, $T = \{(0,0),(1,1)\}$ или $T = \{(0,1),(1,0)\}$.

Семейство, состоящее из этих 30 классов, обозначим через $\mathscr{M}$.

Следствие 2. *Классы из $\mathscr{M}$ и только они являются минимальными наследственными классами орграфов с энтропией 1/4.*

2. Доказательство теоремы 2

Пусть A — конечное множество, $|A| = q$. Будем рассматривать квадратные матрицы над A, т. е. с элементами из A. Множество матриц $\mathscr{X}$ называется *наследственным классом*, если любая квадратная матрица, которую можно получить из матрицы, принадлежащей $\mathscr{X}$, с помощью операций удаления строк и столбцов и перестановок строк и столбцов, принадлежит $\mathscr{X}$. В [3] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса матриц существует энтропия

$$h(\mathscr{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 |\mathscr{X}_n|}{n^2},$$

где $\mathscr{X}_n$ — множество всех матриц порядка n из $\mathscr{X}$. Там же была доказана следующая теорема, характеризующая возможные значения энтропии.

Теорема 3 *[3]. Если $\mathscr{X}$ — наследственный класс матриц над A, то $h(\mathscr{X}) = \log_2 p$, где p — наибольшая мощность такого множества $B \subseteq A$, что $\mathscr{X}$ содержит все матрицы над B.*

Применим этот результат к доказательству теоремы 1. Пусть $\mathscr{X}$ — наследственный класс орграфов. Для каждого n и каждого графа $G \in \mathscr{X}_{2n}$ построим матрицу типов его двудольного подграфа $G\langle\{1,\ldots,n\}, \{n+1,\ldots,2n\}\rangle$. Очевидно, что множество $\mathscr{Y}$ всех полученных таким

образом матриц будет наследственным классом матриц. Так как каждый граф из $\mathscr{X}_{2n}$ однозначно определяется этой матрицей и двумя порожденными подграфами с n вершинами, то $|\mathscr{X}_{2n}| \leqslant |\mathscr{Y}_n||\mathscr{X}_n|^2$. Отсюда следует, что $h_{2n}(\mathscr{X}) \leqslant \frac{\log_2 |\mathscr{Y}_n|}{4n^2} + \frac{h_n(\mathscr{X})}{2}$. Поэтому $h(\mathscr{X}) \leqslant \frac{1}{2}h(\mathscr{Y})$. Значит, если $h(\mathscr{X}) > 0$, то и $h(\mathscr{Y}) > 0$. Из теоремы 3 следует, что в этом случае существует такое двухэлементное множество $T \subseteq \{0,1\}^2$, что $\mathscr{Y}$ содержит все матрицы над T. Но это означает, что $\mathscr{X}$ содержит пополнение любого графа из $\mathscr{B}(T)$. Тем самым доказана истинность импликации (a) $\Rightarrow$ (b) в теореме 2.

Докажем несколько вспомогательных утверждений о матрицах и двудольных графах. В первой лемме рассматриваются прямоугольные матрицы с произвольными элементами. Подматрица матрицы M — это матрица, которую можно получить из M удалением некоторых строк и столбцов.

Лемма 1. *Для любой матрицы M существует такая матрица M^0, что в любой матрице, полученной из M^0 перестановками строк и столбцов, имеется подматрица, равная M.*

Доказательство. Пусть M — матрица с k строками и n столбцами, $M_1, M_2, \ldots, M_{n!}$ — все матрицы, которые можно получить из M перестановками столбцов. Построим матрицу

$$M' = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n!} \end{pmatrix}.$$

Она состоит из $p = n!k$ строк и n столбцов. Пусть $M_1', M_2', \ldots, M_{p!}'$ — все матрицы, которые можно получить из M' перестановками строк. Построим матрицу

$$M^0 = (M_1\ M_2' \ \ldots\ M_{p!}').$$

Пусть $\widetilde{M}$ — какая-нибудь матрица, получающаяся перестановкой строк и столбцов из матрицы M^0. Тогда, очевидно, в результате перестановки строк одна из подматриц M_i', составляющих M^0, превратится в M', а в результате перестановки столбцов одна из подматриц M_j, из которых составлена M', преобразуется в M. Следовательно, в $\widetilde{M}$ есть подматрица, равная M. Лемма доказана.

Пополнение G двудольного графа (U, V, E) будем называть (i, j)-*пополнением*, если $G\langle U\rangle \in \mathscr{P}_i$, $G\langle V\rangle \in \mathscr{P}_j$.

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathscr{P}_i T \mathscr{P}_j$ для некоторых $i, j \in \{0,1,2\}$ и $T \subseteq \{0,1\}^2$. Тогда существует такой двудольный орграф $G^0 \in \mathscr{B}(T)$,*

что в любом (i,j)-пополнении графа G^0 содержится порожденный подграф, изоморфный графу G.

Доказательство. Если $\{i,j\} \subseteq \{0,2\}$, то утверждение очевидно — можно взять $G^0 = G$. Предположим, что $i = j = 1$. Заметим, что транзитивные турниры с данным множеством вершин находятся во взаимно-однозначном соответствии с отношениями линейного порядка на этом множестве. Каждому графу $G \in \mathscr{P}_1 T \mathscr{P}_1$ поставим в соответствие матрицу типов следующим образом: возьмем какое-нибудь разбиение множества вершин графа G на два таких подмножества U и V, что $G\langle U\rangle \in \mathscr{P}_1$, $G\langle V\rangle \in \mathscr{P}_1$, $G\langle U,V\rangle \in \mathscr{B}(T)$ (это разбиение определяется, вообще говоря, неоднозначно, но для наших целей достаточно для каждого графа взять одно из таких разбиений), и построим матрицу типов для графа $G\langle U,V\rangle$, упорядочив ее строки и столбцы в соответствии с линейными порядками, определяемыми на множествах U и V графами $G\langle U\rangle$ и $G\langle V\rangle$ соответственно (т. е. первая строка соответствует минимальному элементу из U, вторая — следующему за ним и т.д.). Очевидно, если M_1 и M_2 — матрицы, построенные таким образом для графов G_1 и G_2, и матрица M_1 является подматрицей матрицы M_2, то существует изоморфное вложение G_1 в G_2. Пусть M — матрица типов для графа $G \in \mathscr{P}_1 T \mathscr{P}_1$. Построим по ней матрицу M^0 из леммы 1 и рассмотрим двудольный граф G^0 с матрицей типов M^0. Так как M^0 состоит из тех же элементов, что и M, то $G^0 \in \mathscr{B}(T)$. Упорядоченная матрица типов любого графа H, который получается добавлением к G^0 дуг, превращающих каждую долю в транзитивный турнир, получается из M^0 перестановкой строк и столбцов. По лемме 1 в этой матрице имеется подматрица, равная M, следовательно, в H есть подграф, изоморфный графу G. Аналогично рассматриваются случаи, когда только один из индексов i,j равен 1, с той лишь разницей, что при этом либо порядок строк, либо порядок столбцов в матрице типов графа $G\langle U,V\rangle$ не является существенным. Лемма доказана.

Пополнение G двудольного графа (U,V,E) будем называть *правильным*, если оно является (i,j)-пополнением при каких-либо i и j.

Лемма 3. *Для любого непустого $T \subseteq \{0,1\}^2$ и любого двудольного орграфа $G \in \mathscr{B}(T)$ существует такой двудольный орграф $\widetilde{G} \in \mathscr{B}(T)$, в любом пополнении которого содержится порожденный подграф, изоморфный правильному пополнению орграфа G.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для каждого натурального n существует такое число $R(n)$, что в любом орграфе не менее чем с $R(n)$ вершинами имеется порожденный подграф с n вершинами, принадлежащий одному из простейших классов. Пусть $G = (U,V,E)$,

$|U| = u$, $|V| = v$. Положим $k = \binom{R(v)}{v}, p = ku, m = \binom{R(p)}{p}$. Возьмем два непересекающихся множества A и B, $|A| = R(p)$, $|B| = mR(v)$. У множества A имеется ровно m подмножеств мощности p. Обозначим их через $A_1, \ldots, A_m$. Каждое из A_i разобьем на k подмножеств по u элементов в каждом. Эти подмножества обозначим через $A_{i,1}, \ldots, A_{i,k}$. Множество B разобьем на m подмножеств $B_1, \ldots, B_m$ мощности $R(v)$ каждое. У множества B_i имеется ровно k подмножеств мощности v, обозначим их через $B_{i,1}, \ldots, B_{i,k}$.

Построим двудольный граф $\widetilde{G} = (A, B, \widetilde{E})$ следующим образом. Для каждой пары $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, k\}$ возьмем какие-нибудь биекции $\varphi : A_{i,j} \to U$, $\psi : B_{i,j} \to V$. Для каждой пары $(x,y) \in A_{i,j} \times B_{i,j}$ включим в $\widetilde{E}$ такие дуги между вершинами x и y, чтобы тип этой пары в графе $\widetilde{G}$ совпадал с типом пары $(\varphi(x), \psi(y))$ в графе G. Иначе говоря, на множестве $A_{i,j} \cup B_{i,j}$ строится подграф, изоморфный графу G, с левой долей $A_{i,j}$ и правой долей $B_{i,j}$. Для каждой из остальных пар $(x,y) \in A \times B$, т. е. пар, не входящих ни в одно из множеств вида $A_{i,j} \times B_{i,j}$, включим в $\widetilde{E}$ такие дуги между x и y, чтобы тип этой пары принадлежал множеству T. Очевидно, что $\widetilde{G} \in \mathscr{B}(T)$.

Пусть F — пополнение графа $\widetilde{G}$. В множестве A имеется подмножество A_i, порождающее в F подграф, принадлежащий одному из простейших классов. В множестве B_i также найдется подмножество $B_{i,j}$, порождающее подграф из какого-нибудь простейшего класса. Но тогда подграф $F \langle A_{i,j} \cup B_{i,j} \rangle$ изоморфен правильному пополнению графа G. Лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы 2. Предположим, что выполнено условие (2) этой теоремы, т. е. для наследственного класса орграфов $\mathscr{X}$ и для некоторого $T \subseteq \{0,1\}^2$ каждый двудольный орграф из $\mathscr{B}(T)$ имеет пополнение, принадлежащее $\mathscr{X}$. Допустим, что (3) при этом неверно, т. е. для любых $i, j \in \{0, 1, 2\}$ существует граф $G_{i,j} \in \mathscr{P}_i T \mathscr{P}_j$, не принадлежащий $\mathscr{X}$. Для каждого $G_{i,j}$ построим двудольный граф $G_{i,j}^0$ как в лемме 2. Пусть H — объединение всех графов $G_{i,j}^0$ (объединение двудольных графов (A_1, B_1, E_1) и (A_2, B_2, E_2) — это двудольный граф $(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2)$; мы считаем, что множества вершин графов $G_{i,j}^0$ попарно не пересекаются). Построим двудольный граф $\widetilde{H}$ как в лемме 3. Согласно лемме 3 в любом пополнении графа $\widetilde{H}$ содержится правильное пополнение графа H, а из леммы 2 следует, что в нем имеется порожденный подграф, изоморфный какому-нибудь графу $G_{i,j}$. Следовательно, никакое пополнение графа $\widetilde{H}$ не принадлежит $\mathscr{X}$, что противоречит (2). Теорема 2 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 151–164.
2. **Алексеев В. Е.** Об энтропии фрагментно замкнутых классов графов // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1986. С. 5–15.
3. **Алексеев В. Е.** Об энтропии двумерных фрагментно замкнутых языков // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 5–13.
4. **Алексеев В. Е.** Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 148–157.
5. **Эрдеш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.

Адрес авторов:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
Россия.
E-mail: ave@uic.nnov.ru

Статья поступила
22 февраля 2000 г.,
переработанный вариант —
20 апреля 2000 г.