ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2000. Серия 1. Том 7, № 4, 29–37

УДК 519.72

О (k,l)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ*)

В. Г. Визинг, Л. С. Мельников, А. В. Пяткин

Рассматриваются так называемые инциденторные (k,l)-раскраски ориентированных мультиграфов и вводится понятие (k,l)-хроматического числа $\chi_{k,l}$. Получены верхние оценки для этого числа при $k=l$, в частности при $k=l=1$. Высказана гипотеза, что для любого k существует l такое, что $\chi_{k,l}=\chi_{k,\infty}$. Гипотеза доказана для $k=0$ и $l=1$.

Пусть $G=(V,E)$ — ориентированный мультиграф без петель. Обозначим через $\Delta(G)$, $\Delta^+(G)$, $\Delta^-(G)$, $p(G)$ соответственно его максимальные степень, входящую и выходящую полустепени и кратность мультидуги. Если дуга e инцидентна вершине v, то упорядоченную пару (v,e) будем называть *инцидентором*, или *полудугой*. Для дуги $e=uv$ инцидентор (u,e) назовем *начальным*, а инцидентор (v,e) — *конечным*. Назовем два инцидентора *смежными*, если они инцидентны общей вершине. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f:I\longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел. При этом для дуги $e=uv$ запись $f(e)=(a,b)$ означает, что $f(u,e)=a$ и $f(v,e)=b$. Говорим, что раскраска инциденторов *правильная*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильную раскраску инциденторов будем называть *(k,l)-раскраской*, где $k\leqslant l$, если для цветов инциденторов каждой дуги $e=uv$, окрашенных в цвета $f(u,e)=a$, $f(v,e)=b$, выполняется условие $k\leqslant b-a\leqslant l$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k,l)-раскраски инциденторов мультиграфа G, назовем *(k,l)-хроматическим числом* и обозначим через $\chi_{k,l}(G)$. Заметим, что в случае $k=l=0$ мы имеем дело с обычной задачей реберной раскраски мультиграфов и $\chi_{0,0}(G)$ — это реберное

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке грантов INTAS 97–1001, Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581) (второй и третий авторы) и гранта СО РАН (третий автор).

© 2000 Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.

хроматическое число мультиграфа G. Положим $\chi_{k,l}(\Delta) = \max\{\chi_{k,l}(G) \mid G$ — мультиграф степени $\Delta\}$.

Очевидно, что

$$\Delta \leqslant \chi_{k,l+1}(\Delta) \leqslant \chi_{k,l}(\Delta) \leqslant \chi_{k+1,l}(\Delta). \tag{1}$$

Проблема поиска $\chi_{k,l}(\Delta)$ кажется менее сложной, чем проблема поиска $\chi_{k,l}(G)$ для произвольного мультиграфа G. Например, в то время как задача поиска $\chi_{0,0}(G)$ NP-трудна [8] и известна только оценка Визинга $\Delta(G) \leqslant \chi_{0,0}(G) \leqslant \Delta(G) + p(G)$ [1–3], для $\chi_{0,0}(\Delta)$ известна точная формула Шеннона $\chi_{0,0}(\Delta) = \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$ [4].

В настоящее время полностью изучен случай $l = \infty$. В работе [5] доказано, что $\chi_{0,\infty}(\Delta) = \Delta$, а в работе [9] — что $\chi_{1,\infty}(\Delta) = \Delta + 1$, причем $\chi_{1,\infty}(G) = \Delta(G) + 1$ тогда и только тогда, когда в мультиграфе G имеется источник или сток степени $\Delta(G)$. Наконец, в [6] эти результаты были обобщены на случай произвольного k и было доказано, что $\chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta(G),\ \Delta^+(G) + k,\ \Delta^-(G) + k\}$. Отсюда следует, что $\chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$.

Основной вопрос, который интересует авторов настоящей статьи и на который пока нет ответа, звучит так: верно ли, что для любого k существует такое l, что $\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta)$ для любого Δ? В частности, авторы высказывают гипотезу, что для любого k ответ на вопрос положителен, и доказывают, что если $k = 0$, то $l = 1$.

В данной статье получены следующие результаты.

1. Доказано, что для любого мультиграфа G выполняется оценка $\chi_{k,k}(G) \leqslant 2\chi_{0,0}(G) + k - r$, где r есть остаток от деления $\chi_{0,0}(G)$ на k.
2. Доказано, что $\chi_{1,1}(\Delta) \leqslant 3\lceil \Delta/2 \rceil$, причем $\chi_{1,1}(3) = 5$.
3. Описаны все однородные мультиграфы с $\chi_{1,1}(G) = \Delta(G)$.
4. Показано, что $\chi_{0,1}(\Delta) = \Delta$.

Докажем перечисленные выше утверждения. Сначала покажем, что определение (k,l)-хроматического числа корректно в том смысле, что это число конечно для конечных k и $\Delta(G)$. Из (1) следует, что при фиксированном k наихудшим в смысле числа цветов случаем является $l = k$.

Теорема 1. *Для любого мультиграфа G справедливо неравенство $\chi_{k,k}(G) \leqslant 2\chi_{0,0}(G) + k - r$, где r есть остаток от деления $\chi_{0,0}(G)$ на k.*

Доказательство. Пусть $\chi_{0,0}(G) = \chi = km + r$, где $0 \leqslant r < k$. Рассмотрим некоторую $(0,0)$-раскраску $f : I \longrightarrow \{1, \dots, \chi\}$. В ней оба инцидентора каждой дуги $e = uv$ раскрашены цветом $f(e)$. Представим этот цвет в виде $f(e) = ki + j$, где $0 \leqslant j < k$. Построим раскраску g по следующему правилу. Положим $g(u,e) = 2ik + j$ и $g(v,e) = 2ik + k + j$. При такой раскраске разность номеров цветов начального и конечного инциденторов каждой дуги равна k. Покажем ее правильность. Действительно,

из правильности раскраски f следует, что ни два начальных, ни два конечных инцидентора с общей вершиной не раскрашены в одинаковые цвета. Предположим, что цвет начального инцидентора (v, e_1) при некоторой вершине v совпадает с цветом конечного инцидентора (v, e_2) при той же вершине. Но тогда $2i_1k + j_1 = 2i_2k + k + j_2$. Отсюда следует, что $(2i_2 - 2i_1 + 1)k = j_1 - j_2$. Но это невозможно, так как $|(2i_2 - 2i_1 + 1)k| \geqslant k$, а $|j_1 - j_2| < k$. Таким образом, g является (k,k)-раскраской инциденторов мультиграфа G. При этом если $f(e) = \chi$, то для конечного инцидентора дуги e получаем $g(v,e) = 2km + k + r = 2\chi + k - r$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и теоремы Шеннона [4] следует, что

$$\chi_{k,l}(\Delta) \leqslant \chi_{k,k}(\Delta) \leqslant 3\Delta + k. \tag{2}$$

Таким образом, определение (k,l)-хроматического числа дано корректно. Заметим, что оценка (2) является очень грубой и может быть существенно улучшена. Следующие результаты показывают, как можно сделать это улучшение в случае $k = l = 1$.

Лемма 1. *Пусть G — связный однородный мультиграф степени 2. Тогда $\chi_{1,1}(G) = 2$, если G является ориентированным циклом, и $\chi_{1,1}(G) = 3$ в остальных случаях.*

Доказательство. Если G является ориентированным циклом, то, полагая $f(e) = (1,2)$ для каждой дуги $e \in E$, получим искомую (1,1)-раскраску.

В противном случае мультиграф содержит источники и стоки степени 2, и из упоминавшейся выше теоремы [9] следует, что $\chi_{1,1}(G) \geqslant 3$. Для построения (1,1)-раскраски мультиграфа G цветами 1, 2, 3 зафиксируем некоторый циклический обход вершин G и положим $f(e) = (1,2)$, если дуга e сонаправлена этому обходу, и $f(e) = (2,3)$ в противном случае. Легко убедиться, что такая раскраска инциденторов будет искомой (1,1)-раскраской. Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого Δ имеет место неравенство*

$$\chi_{1,1}(\Delta) \leqslant 3\lceil \Delta/2 \rceil. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный мультиграф $G = (V, E)$ степени Δ. Без ограничения общности можно считать, что G является однородным мультиграфом степени Δ. Сначала рассмотрим случай $\Delta = 2t$. По теореме Петерсена о факторизации [10] мультиграф G может быть разбит на t 2-факторов $G_1, \ldots, G_t$. Но из леммы 1 следует, что каждый мультиграф G_i может быть раскрашен цветами $3i-2$, $3i-1$, $3i$. Значит, $\chi_{1,1}(G) \leqslant 3t$. Если $\Delta = 2t+1$,

то, добавляя к G вершины и дуги, его можно превратить в однородный мультиграф степени $2t+2$. Из предыдущего рассуждения следует, что $\chi_{1,1}(G) \leqslant 3t+3$. Объединяя доказанные неравенства, получим $\chi_{1,1}(\Delta) \leqslant 3\lceil \Delta/2 \rceil$. Теорема 2 доказана.

Хотя оценка (3) существенно лучше оценки (2), она все еще не является точной, как показывает следующая

Теорема 3. *Имеет место формула* $\chi_{1,1}(3) = 5$.

Доказательство. Сначала докажем, что всякий мультиграф степени 3 можно раскрасить в 5 цветов. Предположим, что это не так. Тогда из всех мультиграфов степени 3, (1,1)-хроматическое число которых больше 5, выберем мультиграф H с наименьшим числом вершин и наибольшим числом дуг. Очевидно, что H связен. Так как добавление дуг не уменьшает $\chi_{1,1}$, то H содержит не более одной вершины $v \in V$, степень которой меньше 3. Если такой вершины нет, то положим $G = H$. Иначе построим однородный мультиграф G так: добавим к мультиграфу H его копию H' и соединим нужным количеством дуг вершины v и v'.

Если мультиграф G содержит совершенное паросочетание P, то положим $f(e) = (1,2)$ для всех дуг $e \in P$, а 2-фактор, остающийся после удаления P, раскрасим цветами 3, 4, 5 по лемме 1. Ограничив полученную раскраску на мультиграф H, придем к противоречию.

Значит, G не содержит совершенного паросочетания. Тогда по теореме Петерсена [10] в G содержится не менее трех перешейков. Но в таком случае и мультиграф H содержит перешейки. Обозначим через $e = xy$ такой его перешеек, что компонента связности H_0 мультиграфа $H \setminus e$, не содержащая вершину v, является двусвязной. По выбору мультиграфа H другую компоненту H_1 мультиграфа $H \setminus e$ можно раскрасить в 5 цветов. Наша цель — продолжить эту раскраску на весь мультиграф H. Без ограничения общности можно считать, что $y \in H_1$, т. е. инцидентор (e, y) конечный.

Множество свободных цветов при вершине y обозначим через M. Очевидно, что $|M| = 3$. Построим мультиграф H', взяв мультиграф H_0 и его копию H_0' и соединив их дугой $e' = (x, x')$. Получим кубический мультиграф с единственным перешейком e'. По теореме Петерсена [10] мультиграф H' разбивается на совершенное паросочетание P и 2-фактор F, причем $e' \in P$. Если $2 \in M$, то F красим цветами 3, 4, 5, а P — цветами 1, 2 (как описано выше), подставляем вместо H_0' уже раскрашенный H_1 и получаем раскраску мультиграфа H. Если $5 \in M$, то F красим цветами 1, 2, 3, а P — цветами 4, 5 и поступаем аналогично. Если $2, 5 \notin M$, то $M = \{1, 3, 4\}$. Красим F цветами 3, 4, 5, а $P \setminus e'$ цветами 1, 2. Заменяя H_0' на H_1, получим раскраску мультиграфа $H \setminus e$. Но

так как $e' \in P$, то цвет 2 свободен при вершине x, а значит, мы можем положить $f(e) = (2,3)$.

Полученное противоречие показывает, что $\chi_{1,1}(\Delta) \leqslant 5$. Пример кубического мультиграфа G, который нельзя раскрасить в 4 цвета, приведен на рис. 1.

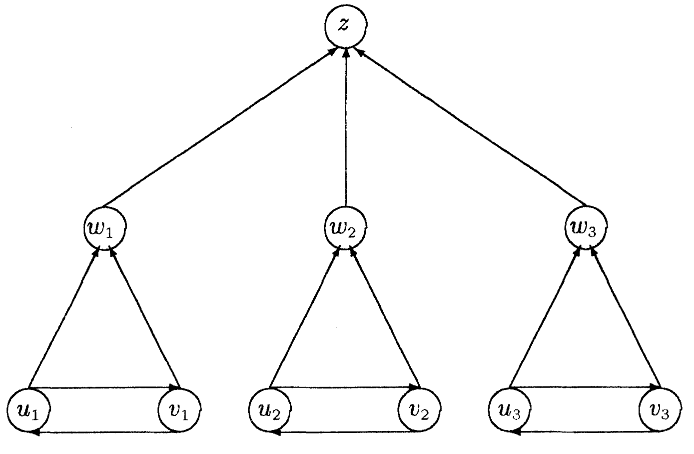

Рис. 1

Действительно, предположим, что такая раскраска существует. Тогда так как конечный инцидентор не может быть окрашен цветом 1, конечные инциденторы при вершине z получат цвета 2, 3, 4. Значит, для одной из дуг $e_i = w_i z$ будет выполняться условие $f(e_i) = (2,3)$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$. Тогда конечные инциденторы при вершине w_1 должны быть раскрашены цветами 3 и 4. Ввиду симметрии можно считать, что $f(u_1 w_1) = (2,3)$, $f(v_1 w_1) = (3,4)$. Имеем единственный способ раскрасить дугу $v_1 u_1$, положив $f(v_1 u_1) = (2,3)$. Но тогда мы никак не сможем раскрасить дугу $u_1 v_1$. Теорема 3 доказана.

Пример (см. рис. 1) показывает, в частности, что $\chi_{1,1}(\Delta) \neq \chi_{1,\infty}(\Delta)$, так как $\chi_{1,\infty}(3) = 4$. Что касается определения $\chi_{1,1}(G)$ для произвольного мультиграфа G, то авторы не располагают алгоритмом его нахождения, даже если $\Delta(G) = 3$. Тем не менее следующая теорема позволяет охарактеризовать все однородные мультиграфы, для которых выполняется соотношение $\chi_{1,1}(G) = \Delta(G)$.

Теорема 4. *Если $G = (V,E)$ — однородный мультиграф, то*

$$\chi_{1,1}(G) = \Delta(G) \iff \Delta(G) = 2t \text{ и } \Delta^+(v) = \Delta^-(v) = t \text{ для каждого } v \in V.$$

Доказательство. Если $\Delta(G) = 2t$ и для каждого $v \in V$ выполняется условие $\Delta^+(v) = \Delta^-(v) = t$, то мультиграф G может быть разбит

на такие t 2-факторов, что каждый из них содержит только ориентированные циклы. Тогда по лемме 1 каждый 2-фактор можно раскрасить в два цвета, а всего потребуется $2t = \Delta(G)$ цветов.

Теперь допустим , что $G = (V, E)$ — однородный ориентированный мультиграф, для которого существует (1,1)-раскраска инциденторов f в $\Delta(G)$ цветов. Так как при любой вершине присутствует ровно один инцидентор каждого цвета, то каждым цветом окрашено в точности $n = |V|$ инциденторов. Но инциденторы цвета 1 могут быть только начальными. Отсюда следует, что все инциденторы цвета 2 — конечные. Но тогда все инциденторы цвета 3 также начальные, а цвета 4 конечные, и так далее. Это возможно только в случае четного $\Delta(G)$. Более того, половина инциденторов при каждой вершине будут начальными, т. е. $\Delta^+(v) = \Delta^-(v)$ для любого $v \in V$. Теорема 4 доказана.

Вернемся к высказанной выше гипотезе. В работе [5] было доказано, что $\chi_{0,1}(\Delta) \leqslant \Delta + 1$, причем для четных Δ имеем $\chi_{0,1}(\Delta) = \Delta$. Это следует из теоремы Петерсена [10] о факторизации и того, что $\chi_{0,1}(2) = 2$ (получается из формулы $\chi_{0,\infty}(\Delta) = \Delta$, доказанной в [6]). Ниже доказывается такое же утверждение и для нечетного Δ. Это означает, что при $k = 0$ гипотеза верна, причем $l = 1$.

Нам потребуется следующее обобщение теоремы Петерсена [10], доказанное в работе Д. Хансона, К. Лотена и Б. Тофта [7].

Лемма 2 [7]. *Пусть G — однородный мультиграф степени $2t + 1$, $t \geqslant 1$, не более чем с $2t$ перешейками. Тогда G содержит 2-фактор.*

Теорема 5. *Справедливо соотношение $\chi_{0,1}(\Delta) = \Delta$. Более того, если G — мультиграф нечетной степени Δ, содержащий перешеек e, который соединяет вершины u и v, то для любого нечетного $j \in \{1, \dots, \Delta\}$ существует $(0, 1)$-раскраска инциденторов мультиграфа G в Δ цветов, в которой инцидентор (u, e) окрашен цветом j.*

Доказательство. Теорема очевидна при $\Delta = 1$. Пусть $\Delta = 2t + 1$, где $t \geqslant 1$. Проведем доказательство индукцией по t. Будем считать, что G является однородным мультиграфом степени Δ. Этого можно добиться, добавляя к нему при необходимости вершины и ребра так, чтобы при этом все перешейки остались перешейками.

Можно также считать, что G содержит перешейки. В противном случае по лемме 2 в G есть 2-фактор F. Окрасив его цветами $2t$ и $2t + 1$ и применив индукцию к мультиграфу $G \setminus F$, получим искомую (0,1)-раскраску инциденторов мультиграфа G.

Таким образом, достаточно доказать вторую часть теоремы. Возможны два случая.

1. Мультиграф G содержит 2-фактор F. Пусть $G' = G \setminus F$. Очевидно, что $e \notin F$. Поэтому e является перешейком в однородном

мультиграфе G' степени $2t-1$. Если $j \neq \Delta$, то G' красится по индукции цветами $1, \dots, 2t-1$ так, чтобы инцидентор (u, e) получал цвет j. Затем F раскрашивается цветами $\Delta - 1$ и Δ. При $j = \Delta$ красим F цветами 1 и 2 и применяем индукционное предположение к мультиграфу G', используя цвета $3, \dots, \Delta$.

2. Мультиграф G не содержит 2-фактора. Максимальные по включению реберно двусвязные подграфы мультиграфа G будем называть *блоками.* Можно представить G в виде некоторого дерева, вершинами которого являются блоки, а ребрами — перешейки. Схематически эта структура мультиграфа G изображена на рис. 2. Обозначим через G_0 блок мультиграфа G, содержащий вершину u. Перешейки, инцидентные блоку G_0, обозначим через $e = e_0, e_1, \dots, e_r$.

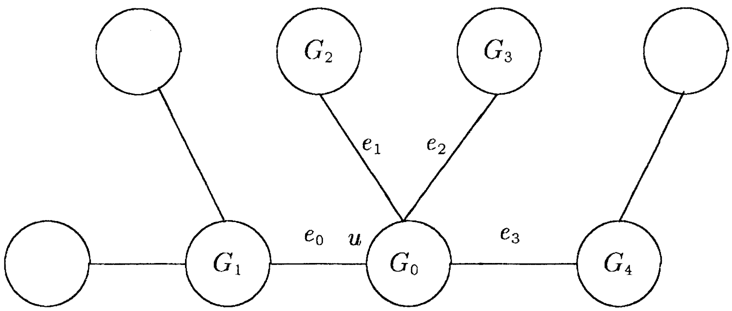

Рис. 2

Сначала раскрасим блок G_0 и инцидентные ему инциденторы перешейков e_i, $i = 0, \dots, r$, так, чтобы инцидентор (u, e) получил цвет j. Затем раскрасим вторые инциденторы каждого перешейка нечетными цветами $j_0, \dots, j_r$, соблюдая при этом условие (0,1)-раскраски на разность номеров цветов конечного и начального инциденторов. Далее обозначим через G_{i+1} блоки, инцидентные инциденторам e_i, $i = 0, \dots, r$, и применим к ним тот же метод, что и к блоку G_0. Структура мультиграфа G (см. рис. 2) такова, что каждому блоку в момент его раскраски будет инцидентно не более одного инцидентора, окрашенного ранее в нечетный цвет. Эти действия повторяем до тех пор, пока не будет построена искомая (0,1)-раскраска мультиграфа G.

Для нахождения требуемой раскраски блока G_0 построим вспомогательный мультиграф H следующим образом. Обозначим через u_i и v_i соответственно принадлежащие и не принадлежащие блоку G_0 концы перешейков e_i, $i = 0, \dots, r$. Добавим две дополнительные вершины v_0' и v_0'', соединенные $t+1$ дугой друг с другом и каждая из них t дугами

с вершиной v_0. Далее для каждой пары вершин v_{2i-1}, v_{2i}, $i = 1, \dots, \lfloor r/2 \rfloor$, добавим по $2t$ дуг, соединяющих их друг с другом. В случае нечетного r поступим с последним перешейком e_r так же, как и с e_0. Ориентация добавленных дуг выбирается произвольно. В результате получится однородный мультиграф H степени $\Delta = 2t + 1$ не более чем с двумя перешейками. При этом ребро e является перешейком мультиграфа H. Пример построения вспомогательного мультиграфа для случая $r = 5$ приведен на рис. 3.

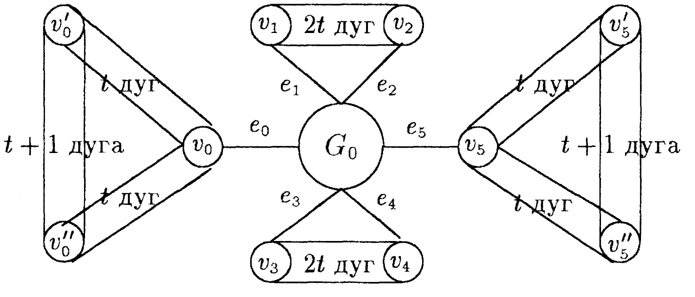

Рис. 3

По лемме 2 мультиграф H содержит 2-фактор F. По доказанному (случай 1) существует (0,1)-раскраска инциденторов мультиграфа H, в которой инцидентор (u, e) окрашен цветом $j = k_0$. При этом инциденторы (u_i, e_i), $i = 1, \dots, r$, получат некоторые цвета k_i. Для окраски инциденторов (v_i, e_i), $i = 0, \dots, r$, мультиграфа G выберем нечетный цвет j_i по следующему правилу. Если k_i нечетно, то положим $j_i = k_i$. Иначе положим $j_i = k_i - 1$, если инцидентор (v_i, e_i) является начальным инцидентором дуги e_i, и $j_i = k_i + 1$ в противном случае. Так как числа 1 и Δ нечетны, все цвета $j_i \in \{1, \dots \Delta\}$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. Вып. 3. С. 25–30.
2. **Визинг В. Г.** Критические графы с данным хроматическим классом // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. Вып. 5. С. 9–17.
3. **Визинг В. Г.** Хроматический класс мультиграфов // Кибернетика. 1965. № 3. С. 29–39.
4. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

5. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
6. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.
7. **Hanson D., Loten C. O. M., Toft B.** On interval colorings of bi-regular bipartite graphs // Ars Combin. 1998. N 50. P. 23–32.
8. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, N 4. P. 718–720.
9. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge chromatic number of a directed/ mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 31, N 4. P. 267–273.
10. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

Адреса авторов:

В.Г.Визинг
Одесская гос. академия
пищевых технологий,
ул. Канатная, 112,
270039 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@osaft.odessa.ua

Л.С.Мельников, А.В.Пяткин
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: omeln@math.nsc.ru

Статья поступила
19 мая 2000 г.