ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2000. Серия 1. Том 7, № 4, 38–47

УДК 519.8

О ПРИМЕНИМОСТИ АЛГОРИТМА ПОКООРДИНАТНОГО ПОДЪЕМА К ЗАДАЧАМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

Н. И. Глебов, В. В. Шенмайер

Для задачи максимизации вогнутой сепарабельной функции на подмножестве, состоящем из всех максимальных относительно частичного порядка точек некоторого конечного множества в R^n, обоснован критерий ее разрешимости посредством «жадного» алгоритма. Доказано также одно достаточное условие применимости данного алгоритма и указан класс задач целочисленного программирования, удовлетворяющих полученному критерию разрешимости.

Известно, что для решения некоторых задач целочисленного программирования может быть использован алгоритм покоординатного подъема (жадный алгоритм). В данной статье исследуется вопрос о применимости подобного алгоритма для решения задачи максимизации вогнутой сепарабельной функции на подмножестве максимальных относительно частичного порядка точек некоторого конечного множества.

Рассматриваемая задача имеет вид: найти

$$\max\{f(x) \mid x \in \widetilde{Q}\} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots x_n)$ — n-мерный целочисленный вектор,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \tag{2}$$

$\widetilde{Q}$ — множество максимальных относительно частичного порядка $\leqslant$ точек из Q; Q — конечное множество целочисленных точек неотрицательного ортанта; $f_j(\cdot)$ — вогнутые (т. е. выпуклые вверх) функции.

Посредством $E(x)$ далее обозначается множество $\{j \mid x + e_j \in Q\}$, где e_j есть j-й орт пространства R^n. Будем предполагать, что $0 \in Q$,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00510) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

$E(x) \neq \varnothing$ в случае $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$ и все точки множества Q *достижимы* из начала координат. При этом под достижимостью точки x понимается существование такой последовательности $0 = x^0, x^1, \ldots, x^k = x$ точек множества Q, что в случае $k \geqslant 1$ векторы $x^s - x^{s-1}$ являются ортами пространства R^n при $s = 1, 2, \ldots, k$.

Согласно правилам рассматриваемого нами алгоритма покоординатного подъема процесс вычислений начинается с точки 0. По достижении некоторой точки $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$ на очередном шаге процесса происходит переход к такой точке $x' = x + e_j \in Q$, для которой приращение функции $f(x)$ является максимальным (возможно и отрицательным). Очевидно, что при сделанных выше допущениях процесс закончится в некоторой точке $\bar{x} \in \widetilde{Q}$.

Исследуется вопрос: для каких множеств Q при любых $f(x)$ вида (2) алгоритм покоординатного подъема находит точку $\bar{x}$, являющуюся решением задачи (1)–(2)?

Ранее в [1] был получен критерий разрешимости посредством жадного алгоритма задачи, отличающейся от рассматриваемой отсутствием требования максимальности $\bar{x}$, т. е. максимизация функции $f(x)$ производилась на множестве Q, а не на $\widetilde{Q}$. Частный случай задачи (1)–(2), когда Q есть множество булевых векторов (или система подмножеств конечного множества), рассмотрен в работах [4, 5], в которых установлен критерий разрешимости задачи посредством жадного алгоритма. Этот результат распространяется нами и на более общую задачу (1)–(2). К рассматриваемому направлению могут быть отнесены также работы [2, 3].

1. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$I = \{1, 2, \ldots, n\}$;

Z_+ — множество всех целых неотрицательных чисел;

$x \leqslant y$ эквивалентно $y - x \in Z_+^n$;

$[x, y] = \{\, z \in Z_+^n \mid x \leqslant z \leqslant y\}$;

$I(x) = \{j \in I \mid x_j > 0\}$;

$|x| = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$ — норма вектора x;

$\Delta_j f(x) = f(x + e_j) - f(x)$.

Определение 1. Точку $x \in Q$ будем называть *f-достижимой*, если существует такая последовательность $0 = x^0, x^1, \ldots, x^k = x$ точек множества Q, что $x^s = x^{s-1} + e_{j(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, где $j(s) \in E(x^{s-1})$ и

$$\Delta_{j(s)} f(x^{s-1}) = \max\{\Delta_j f(x^{s-1}) \mid j \in E(x^{s-1})\}. \qquad (3)$$

Последовательность с указанными выше свойствами будем называть *f-допустимой* (для точки x). В случае, когда выполнение равенства (3) не предполагается, последовательность называется просто *допустимой*.

Очевидно, что максимальные f-достижимые точки и только они могут являться результатом работы (выходом) алгоритма покоординатного подъема.

Основным результатом данной статьи является

Теорема 1. *Для того чтобы при любых $f(x)$ вида (2) все максимальные f-достижимые точки были оптимальными решениями задачи (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы множество Q обладало свойством:*

$$(PP)\quad \begin{cases} \text{для любых двух точек } x \in Q,\ y \in \widetilde{Q} \text{ таких, что } x \leqslant y \\ \text{и } x_i = y_i \text{ при некотором } i \in E(x), \text{ найдется номер} \\ j \in E(x) \text{ такой, что } y_j > x_j \text{ и } y + e_i - e_j \in Q. \end{cases}$$

Ради краткости далее будем говорить, что выполнено условие (или имеет место свойство) (Opt), если «*при любых $f(x)$ вида (2) все максимальные f-достижимые точки являются оптимальными решениями задачи* (1)–(2)».

При доказательстве теоремы 1 будут использоваться две леммы.

Лемма 1. *Если выполнено условие (Opt), то все элементы множества $\widetilde{Q}$ имеют одинаковую норму.*

Доказательство. Положим $f_i(t) = t$ для любого $i \in I$. Тогда каждая точка $x \in \widetilde{Q}$ будет f-достижимой и при этом $f(x) = |x|$. Следовательно, в силу условия (Opt) должно быть $|x| \equiv \text{const}$ при $x \in \widetilde{Q}$. Лемма доказана.

В дальнейшем величину нормы элементов множества $\widetilde{Q}$ будем обозначать посредством l.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (Opt). Тогда при любом $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$ и любом $y \in \widetilde{Q}$*

$$E(x) \cap I(y - x) \neq \varnothing. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$ и $y \in \widetilde{Q}$. Определим функцию f, положив $f_i(t) = \min\{t, \max\{x_i, y_i\}\}$, $i \in I$. Легко видеть, что $f(z) \leqslant |z|$ для любого $z \in Z_+^n$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z_i \leqslant \max\{x_i, y_i\}$ при каждом $i \in I$. В частности, $f(y) = |y| = l$. Кроме того, любая допустимая последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^k = x$ является f-допустимой и может быть продолжена с сохранением этого свойства до последовательности вида $0 = x^0, x^1, \dots, x^k, \dots, \tilde{x}$, где $\tilde{x} \in \widetilde{Q}$.

По лемме 1 имеем $|\tilde{x}| = l$. Так как $x \neq \tilde{x}$ и $x = x^k \leqslant x^{k+1} \leqslant \tilde{x}$, то $x_j = x_j^k < x_j^{k+1} \leqslant \tilde{x}_j$ при некотором $j \in I$, так что $x^{k+1} = x + e_j$, $j \in E(x)$. По условию (Opt) справедливо неравенство $f(\tilde{x}) \geqslant f(y) = l$, поскольку $y \in \widetilde{Q}$ и точка $\tilde{x}$ является максимальной и f-достижимой.

Наряду с этим имеем $l = |\tilde{x}| \geqslant f(\tilde{x})$. Из полученных неравенств следует равенство $f(\tilde{x}) = |\tilde{x}|$, которое, в свою очередь, влечет неравенства $\tilde{x}_i \leqslant \max\{x_i, y_i\}$, $i \in I$. В частности, в силу полученного выше неравенства $x_j < \tilde{x}_j$ должно быть $\tilde{x}_j \leqslant y_j$. Таким образом, $x_j < y_j$ и $j \in E(x)$, т. е. $E(x) \cap I(y - x) \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть $x \in Q$, $y \in \widetilde{Q}$, $x \leqslant y$, $x_i = y_i$, $i \in E(x)$. Определим функцию f, положив

$$f_p(t) = \begin{cases} \min\{t, x_p\}, & \text{если } p \in E(x); \\ \min\{t, y_p\}, & \text{если } p \in I \setminus E(x). \end{cases}$$

В этом случае точка $x + e_i$ оказывается f-достижимой. В самом деле, любая допустимая (для точки x) последовательность $0 = x^0, x^1, \ldots, x^k = x$ является f-допустимой, поскольку все приращения $\Delta f = f(x^s) - f(x^{s-1})$, $s = 1, 2, \ldots, k$, равны 1, т. е. имеют максимально возможное значение. Последовательность, полученная из рассматриваемой посредством добавления точки $x^{k+1} = x + e_i$, является также f-допустимой, так как $\Delta_j f(x) = 0$ при любом $j \in E(x)$.

Отметим также, что в случае $x' \geqslant x$ имеем

$$\Delta_s f(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x'_s < y_s \text{ и } s \notin E(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что равенство $\Delta_s f(x') = 1$ влечет принадлежность номера s множеству $I(y - x')$. Это в свою очередь приводит к тому, что максимальное значение величины $\Delta_j f(x')$ (как функции от j) на множестве $E(x')$ совпадает с максимальным значением на множестве $E(x') \cap I(y - x')$, если только последнее не пусто. По лемме 2 оно не пусто, когда $x' \in Q \setminus \widetilde{Q}$.

Сказанное выше позволяет утверждать, что в случае $x' \in Q \setminus \widetilde{Q}$ и $x' \geqslant x$ любая f-допустимая для точки x' последовательность может быть продолжена (с сохранением f-допустимости) путем добавления некоторой точки $x'' = x' + e_j$, где $j \in E(x') \cap I(y - x')$. При этом из условия $x' \leqslant y + e_i$ будет следовать $x'' \leqslant y + e_i$, поскольку $y_j > x'_j$.

Таким образом, учитывая f-достижимость точки $x + e_i$, из приведенных рассуждений следует существование такой максимальной f-достижимой точки $\tilde{y}$, что $x + e_i \leqslant \tilde{y} \leqslant y + e_i$. Отсюда, принимая во внимание равенство $|\tilde{y}| = |y|$, справедливое согласно лемме 1, следует, что $\tilde{y} = y + e_i - e_j$ при некотором j, $j \neq i$.

Осталось показать, что $j \in E(x)$. Если допустить, что $j \notin E(x)$, то, учитывая $\tilde{y} \geqslant x$, получаем

$$f(\tilde{y}) = \sum\{x_p \mid p \in E(x)\} + \sum\{y_p \mid p \notin E(x) \cup j\} + \tilde{y}_j = f(y) - 1,$$

что противоречит оптимальности $\tilde{y}$. Необходимость условия (PP) доказана.

Достаточность. Сначала покажем, что каждая максимальная точка x удовлетворяет условию $|x| = l$, где l — некоторая константа. Пусть $x \in \widetilde{Q}$, $l = |x|$ и существуют максимальные точки z такие, что $|z| > l$. По условию достижимости имеется допустимая (для точки x) последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^l = x$. Обозначим через y максимальную точку, которая удовлетворяет условию $|y| > l$ и которой соответствует наибольший номер s со свойством $x^s \leqslant y$.

Нетрудно видеть, что $s < l$. Для некоторого номера $i \in E(x^s)$ имеем $x^{s+1} = x^s + e_i$ и $x_i^s = y_i$. Применяя условие (PP) к точкам x^s, y и номеру i, можно утверждать, что существует такой номер $j \in E(x^s)$, что $x_j^s < y_j$ и $y + e_i - e_j \in Q$. Для максимальной точки $\tilde{y}$, мажорирующей $y + e_i - e_j$, будем иметь $\tilde{y} \geqslant x^{s+1}$ и $|\tilde{y}| \geqslant |y| > l$. Но это противоречит выбору y. Следовательно, при некотором l точки $x \in \widetilde{Q}$ удовлетворяют условию $|x| = l$.

Теперь рассмотрим произвольную максимальную f-достижимую точку x и f-допустимую (для точки x) последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^l = x$. Предполагая существование максимальных точек z таких, что $f(z) > f(x)$, обозначим через y ту из них, которой соответствует наибольший номер s со свойством $x^s \leqslant y$.

Проведя далее рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим, что при некоторых $i, j \in E(x^s)$ справедливы соотношения $x^{s+1} = x^s + e_i$, $x_i^s = y_i$, $x_j^s < y_j$ и $y + e_i - e_j \in Q$. Пусть $\tilde{y} = y + e_i - e_j$. Так как $|\tilde{y}| = |y|$, то по доказанному выше точка $\tilde{y}$ должна быть максимальной. Кроме того, в соответствии с правилами жадного алгоритма имеем $f(x^s + e_i) \geqslant f(x^s + e_j)$, т. е. выполняется неравенство

$$f_i(x_i^s + 1) + f_j(x_j^s) \geqslant f_i(x_i^s) + f_j(x_j^s + 1). \tag{5}$$

Так как f_j — вогнутая функция и $\tilde{y}_j \geqslant x_j^s$, то

$$f_j(x_j^s + 1) - f_j(x_j^s) \geqslant f_j(\tilde{y}_j + 1) - f_j(\tilde{y}_j). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует неравенство

$$f_i(x_i^s + 1) + f_j(\tilde{y}_j) \geqslant f_i(x_i^s) + f_j(\tilde{y}_j + 1).$$

Учитывая равенства $x_i^s + 1 = \tilde{y}_i$, $x_i^s = y_i$ и $\tilde{y}_j + 1 = y_j$, окончательно получаем $f(\tilde{y}) \geqslant f(y)$. Последнее неравенство вместе с неравенством $x^{s+1} \leqslant \tilde{y}$ противоречат выбору y. Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь одно достаточное условие применимости алгоритма покоординатного подъема.

Теорема 2. *Пусть элементы множества $\widetilde{Q}$ имеют одинаковую норму и выполняется условие*

$$\begin{cases} \text{для любых } y,\, z \in \widetilde{Q} \text{ и } x \in Q,\ x \leqslant z, \\ \text{из } E(x) \cap I(z-y) \neq \varnothing \text{ следует } E(x) \cap I(y-z) \neq \varnothing. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда множество Q обладает свойством (Opt).

Доказательство. Сначала докажем, что имеет место свойство (4): если $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$, $y \in \widetilde{Q}$, то $E(x) \cap I(y-x) \neq \varnothing$. Предположим, что оно нарушается для точек $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$ и $y \in \widetilde{Q}$. Пусть $i \in E(x)$ и $x + e_i \leqslant z$, где $z \in \widetilde{Q}$. Тогда $i \notin I(y-x)$ и выполняются неравенства $y_i \leqslant x_i < z_i$, из которых следует, что $E(x) \cap I(z-y) \neq \varnothing$. Отсюда и из условия (7) вытекает, что $E(x) \cap I(y-z) \neq \varnothing$. Однако это противоречит предположению о том, что $E(x) \cap I(y-x) = \varnothing$, поскольку $I(y-z) \subset I(y-x)$.

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что выполняется условие (PP) теоремы 1. Пусть $x \leqslant y$ и $x_i = y_i$, где $x \in Q$, $y \in \widetilde{Q}$ и $i \in E(x)$. Принимая во внимание свойство (4), можно утверждать, что существует максимальная точка $z \in \widetilde{Q}$, удовлетворяющая неравенствам $x + e_i \leqslant z \leqslant y + e_i$. Так как по условиям теоремы для максимальных точек y и z справедливо равенство $|z| = |y|$, то при некотором $j \in I(y-x)$ имеем $z = y + e_i - e_j$. Остается показать, что $j \in E(x)$. Так как $x_i = y_i$, то $i \neq j$ и $E(x) \cap I(z-y) = \{i\} \neq \varnothing$. Отсюда с учетом условий теоремы получаем $E(x) \cap I(y-z) = E(x) \cap \{j\} \neq \varnothing$, т. е. $j \in E(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Анализируя доказательство теоремы 2, нетрудно заметить, что в его заключительной части вместо условия (7) достаточно использовать свойство (4) и более слабое условие, а именно,

$$\begin{cases} \text{для любых } y,\, z \in \widetilde{Q} \text{ и } x \in Q \text{ таких, что } x \leqslant y,\ x \leqslant z, \\ \text{из } E(x) \cap I(z-y) \neq \varnothing \text{ следует } E(x) \cap I(y-z) \neq \varnothing. \end{cases} \tag{8}$$

Если также учесть, что свойство (4) следует из (7), то полученный результат может быть несколько усилен путем замены условия (7) на его ослабленный вариант (8) и требование наличия свойства (4).

3. В заключение рассмотрим одно семейство множеств Q, удовлетворяющих условиям теоремы 1 (включая и условия достижимости).

Пусть функция $q : Z_+^n \to R$ обладает свойствами:

(α) $q(0) \geqslant 0$;

(β) $\Delta_i q(x)\,(= q(x+e_i) - q(x))$ равняется либо 0, либо $\delta(q(x))$ при $i \in I$ и $x \in Z_+^n$, где $\delta(t)$ — некоторая невозрастающая функция и $\delta(t) \geqslant 1$;

(γ) $\Delta_i q(x) \geqslant \Delta_i q(y)$ при $x \leqslant y$ и любом $i \in I$.

(Примером функции с такими свойствами может служить $q(x)=\delta r(I(x))$, где $\delta \geqslant 1$ и $r(\cdot)$ — ранговая функция матроида.)

Рассмотрим множество $Q \subset Z_+^n$, определяемое условиями

$$|x| \leqslant q(x), \tag{9}$$

$$x \in D, \tag{10}$$

где $D = [0, d]$, $d \in Z_+^n$.

Определение 2. Вектор x из Z_+^n будем называть *независимым* (относительно q), если $q(x - e_i) < q(x)$ при любом $i \in I(x)$.

Через Q_1 обозначим множество всех независимых векторов, принадлежащих множеству D.

Отметим ряд свойств функции q и множеств Q и Q_1.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $q_0 < q_1 < \cdots q_s < \cdots$ *такова, что* $q_0 = q(0)$, $q_{s+1} = q_s + \delta(q_s)$, $s = 0, 1, \ldots$. *Тогда* $q(x) = q_{|x|}$, *если* $x \in Q_1$, *и* $q(x) \leqslant q_{|x|} - 1$, *если* $x \in D \setminus Q_1$.

Доказательство. В случае $|x| = 0$ имеем $x = 0 \in Q_1$ и утверждение леммы очевидным образом выполняется. Допустим, что утверждение справедливо при $|x| = s$, и пусть $|y| = s + 1$. Если $y \in Q_1$, то в силу свойства (γ) имеем $[0, y] \subset Q_1$. Полагая $x = y - e_i$, $i \in I(y)$, имеем $x \in Q_1$ и $q(y) = q(x) + \delta(q(x)) = q_s + \delta(q_s) = q_{s+1}$. Если $y \notin Q_1$, то $q(y) = q(y - e_i)$ при некотором $i \in I(y)$. При $x = y - e_i$ имеем $q(y) = q(x) \leqslant q_s = q_{s+1} - \delta(q_s) \leqslant q_{|y|} - 1$. Лемма доказана.

Следствие. $Q_1 = \{x \in D \mid q(x) = q_{|x|}\}$.

Лемма 4. *Пусть* $x, y \in D$, $x \leqslant y$. *Тогда*

a) $q(x) = q(y)$ *эквивалентно тому, что* $\Delta_i q(x) = 0$ *для каждого* $i \in I(y - x)$;

b) *если* $q(x) = q(y)$, *то при любом* $j \in I$ $\Delta_j q(z) \equiv \mathrm{const}$ *на* $[x, y]$;

c) *если* $q(x) = q(y)$ *и* $y \in Q$, *то* $[x, y] \subset Q$;

d) *если* $\Delta_i q(y - e_i) > 0$ *при каждом* $i \in I(y - x)$ *и* $x \in Q$ $(x \in Q_1)$, *то* $[x, y] \subset Q$ $([x, y] \subset Q_1)$.

Доказательство утверждений леммы может быть осуществлено по общей схеме: достаточно доказать каждое утверждение для случая $|y - x| = 1$, а затем провести индукцию по $s = |y - x|$. Мы ограничимся рассмотрением лишь начального шага индукции для пунктов b) и d).

Пусть $y = x + e_i$. В случае b) имеем $\Delta_i q(x) = 0$. Отсюда в силу свойства (γ) следует, что $\Delta_i q(x + e_j) = 0$. Используя соотношение $\Delta_i q(x) + \Delta_j q(x + e_i) = \Delta_j q(x) + \Delta_i q(x + e_j)$, получаем $\Delta_j q(x + e_i) = \Delta_j q(x)$, что и требовалось доказать.

В случае d) имеем $\Delta_i q(x) > 0$. Если $x \in Q$, то $q(y) = q(x) + \Delta_i q(x) = q(x) + \delta(q(x)) \geqslant q(x) + 1 \geqslant |x| + 1 = |y|$, так что $y \in Q$. Если $x \in Q_1$, то, используя лемму 3, имеем $q(y) = q(x) + \delta(q(x)) = q_{|x|} + \delta(q_{|x|}) = q_{|x|+1} = q_{|y|}$, что влечет $y \in Q_1$.

Замечание. Поскольку $0 \in Q \cap Q_1$, свойство d) влечет включение $Q_1 \subset Q$.

Определение 3. Вектор x будем называть *базовым для* y, если x есть максимальный элемент множества $Q_1 \cap [0, y]$, $y \in D$.

Лемма 5. *Множество Q_1 является целочисленным полиматроидом, т. е.*

1) *из $x \in Q_1$ следует $[0, x] \subset Q_1$;*
2) *при любом $y \in D$ все базовые для y векторы имеют одинаковую норму.*

Доказательство. Утверждение 1), как уже отмечалось ранее, следует из свойства (γ). При доказательстве утверждения 2) можно считать, что $y \notin Q_1$, так как в случае $y \in Q_1$ единственным базовым для y является вектор y. Пусть вектор x — базовый для y. Предположим, что $\Delta_i q(x) > 0$ при некотором $i \in I(y-x)$. Тогда согласно пункту d) леммы 4 из $x \in Q_1$ следует $x + e_i \in Q_1$. Однако это противоречит тому, что вектор x — базовый для y. Поэтому $\Delta_i q(x) = 0$ для каждого $i \in I(y - x)$, что согласно пункту а) леммы 4 влечет равенство $q(x) = q(y)$. Следовательно, базовые для y векторы имеют одно и то же значение функции q, что согласно лемме 3 влечет совпадение их норм. Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 5 следует, что для любого вектора x, являющегося базовым для y, имеет место равенство $q(x) = q(y)$.

Теорема 3. *Множество Q, определяемое условиями (9)–(10), обладает свойствами:*

(E^+) *если $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$, то $x + e_i \in Q$ при некотором $i \in I$;*

(E^-) *если $x \in Q \setminus \{0\}$, то $x - e_i \in Q$ при некотором $i \in I(x)$;*

(PP) *если $x \in Q$, $y \in \widetilde{Q}$, $x \leqslant y$, $x_i = y_i$, $i \in E(x)$, то существует номер $j \in E(x)$ такой, что $y_j > x_j$ и $y + e_i - e_j \in Q$.*

Доказательство. Убедимся в справедливости (E^+). Пусть $x \in Q \setminus \widetilde{Q}$. Тогда существует вектор $y \in \widetilde{Q}$, мажорирующий x. Если $q(x) = q(y)$, то согласно пункту с) леммы 4 имеем $[x, y] \subset Q$, откуда получаем $E(x) \supset I(y - x) \neq \varnothing$. Если $q(x) < q(y)$, то согласно пункту а) леммы 4 имеем $\Delta_i q(x) > 0$ при некотором $i \in I(y - x)$, что в силу пункта d) леммы 4 влечет $x + e_i \in Q$.

Справедливость (E^-) вытекает из следующих рассуждений. Пусть $x \in Q \setminus \{0\}$. Если $\Delta_i q(x - e_i) = 0$ при некотором $i \in I(x)$, то $x - e_i \in Q$

согласно пункту c) леммы 4. Если $\Delta_i q(x-e_i) > 0$ при всех $i \in I(x)$, то в силу пункта d) леммы 4 имеем $[0,x] \subset Q$, так что $x - e_i \in Q$ при $i \in I(x)$.

Наконец, убедимся в справедливости (PP). Пусть $x \in Q$, $y \in \widetilde{Q}$, $x \leqslant y$, $x_i = y_i$, где $i \in E(x)$.

Сразу же отметим, что все рассматриваемые ниже по ходу доказательства векторы вида $y + e_i - e_j$ и $x + e_j$ принадлежат множеству D, поскольку они мажорируются вектором $y + e_i$, принадлежность которого множеству D следует из условий: $x_i = y_i$, $x + e_i \in D$ и $y \in D$.

Случай 1. $q(x+e_i) = q(x)$.

Используя свойства (β), (γ) и лемму 4, легко устанавливается, что $q(z) = q(z+e_i)$ и $\Delta_j q(z) = \Delta_j q(z+e_i)$ при $z \geqslant x$ и любом $j \in I$.

Рассмотрим две возможности.

1а) $\Delta_j q(x-e_j) > 0$ при любом $j \in I(y-x)$. Тогда согласно сказанному выше имеем $\Delta_j q(y+e_i-e_j) > 0$ при любом $j \in I(y-x)$. Учитывая условие $x + e_i \in Q$ и пункт d) леммы 4, получаем $y + e_i \in Q$, что противоречит максимальности y.

1в) $\Delta_j q(x-e_j) = 0$ при некотором $j \in I(y-x)$. Тогда, учитывая равенство $\Delta_i q(y-e_j) = 0$, вытекающее из условий (γ) и $\Delta_i q(x) = 0$, имеем $q(y+e_i-e_j) = q(y) \geqslant |y| = |y+e_i-e_j|$, так что $y + e_i - e_j \in Q$. Кроме того, $q(x+e_j) \geqslant q(x) = q(x+e_i) \geqslant |x+e_i| = |x+e_j|$. Следовательно, $x + e_j \in Q$.

Случай 2. $q(x+e_i) > q(x)$.

Пусть вектор $\bar{x}$ — базовый для x, а $\bar{y}$ — базовый для y и мажорирующий $\bar{x}$, т. е. $\bar{y} \geqslant \bar{x}$. Существование такого $\bar{y}$ следует непосредственно из определения базового вектора и неравенства $\bar{x} \leqslant y$. Согласно замечанию к лемме 5 имеем $q(\bar{x}) = q(x)$ и $q(\bar{y}) = q(y)$.

Рассмотрим две возможности.

2а) $\bar{x} = \bar{y}$. В этом случае имеем $q(x) = q(y)$. Отсюда и из леммы 4 следует, что $\Delta_j q(z) = 0$ и $\Delta_i q(z) = \delta$ при любом $z \in [x,y]$ и $j \in I(y-x)$, где δ — некоторая неотрицательная константа.

Если $\delta > 0$, то из условия $y \in Q$ следует, что $y + e_i \in Q$. Это противоречит максимальности y.

Пусть $\delta = 0$. Тогда $q(z+e_i) = q(z) = q(y)$ при любом $z \in [x,y]$ и в силу неравенства $q(y) \geqslant |y|$ имеем $y + e_i - e_j \in Q$ и $x + e_j \in Q$ при любом $j \in I(y-x)$.

2в) $\bar{x} \neq \bar{y}$. Если $\bar{y} + e_i \in Q_1$, то $\bar{y} + e_i - e_j \in Q_1$ при любом $j \in I(\bar{y} - \bar{x})$.

Пусть $\bar{y} + e_i \notin Q_1$. Тогда вектор $\bar{y}$ является базовым для $\bar{y} + e_i$. Из $\Delta_i q(x) > 0$ и $\bar{x} \leqslant x$ следует, что $\Delta_i q(\bar{x}) > 0$, и далее согласно пункту d) леммы 4 имеем $\bar{x} + e_i \in Q_1$. Рассмотрим вектор $\tilde{y}$, который мажорирует $\bar{x} + e_i$ и является базовым для $\bar{y} + e_i$. Тогда $|\tilde{y}| = |\bar{y}|$ и $\tilde{y} = \bar{y} + e_i - e_j$

при некотором $j \in I(\bar{y} - \bar{x})$. Таким образом, в любом случае существует номер $j \in I(\bar{y}-\bar{x})$ такой, что $\bar{y}+e_i-e_j \in Q_1$. При этом уместно отметить, что $\bar{x} + e_j \leqslant \bar{y}$ и, следовательно, $\bar{x} + e_j \in Q_1$, $q(\bar{x} + e_j) \geqslant q(\bar{x}) + 1$.

Далее легко проверяется справедливость соотношений

$$q(y + e_i - e_j) \geqslant q(\bar{y} + e_i - e_j) = q(\bar{y}) = q(y) \geqslant |y| = |y + e_i - e_j|,$$
$$q(x + e_j) \geqslant q(\bar{x} + e_j) \geqslant q(\bar{x}) + 1 \geqslant q(x) + 1 \geqslant |x| + 1 = |x + e_j|,$$

из которых следует, что $y + e_i - e_j \in Q$ и $x + e_j \in Q$.

Остается показать, что $j \in I(y - x)$. Пусть это не так, т. е. $y_j \leqslant x_j$. Тогда, учитывая неравенства $\bar{x} \leqslant x$ и $\bar{x}+e_j \leqslant \bar{y} \leqslant y$, получаем $\bar{x}+e_j \leqslant x$. Поскольку $\bar{x} + e_j \in Q_1$, полученное неравенство противоречит тому, что вектор $\bar{x}$ является базовым для x. Теорема 3 доказана.

Замечание. Любой целочисленный полиматроид P входит в класс множеств, описываемый теоремой 3. Для проверки этого утверждения достаточно положить $q(x) = |\bar{x}|$, где $\bar{x}$ — максимальный элемент множества $P \cap [0, x]$, и выбрать вектор d так, чтобы выполнялось включение $P \subset [0, d]$. Нетрудно убедиться, что функция $q(x)$ обладает свойствами (α), (β), (γ) и $Q = Q_1 = P$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. Вып. 11. С. 38–42.
2. **Колмычевская Н. В.** Некоторые обобщения алгоритма покоординатного спуска для матроида // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. Вып. 21. С. 13–17.
3. **Шенмайер В. В.** Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 104–120.
4. **Goecke O., Korte B., Lovasz L.** Examples and algorithmic properties of greedoids // Combinatorial optimization. Berlin: Springer-Verl., 1986. P. 119–161. (Lecture Notes in Math.; V. 1403).
5. **Goetschel R., jr.** Linear objective functions on certain classes of greedoids // Discrete Appl. Math. 1986. V. 14, N 1, P. 11–16.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
10 августа 2000 г.