ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2000. Серия 1. Том 7, № 4, 48–58

УДК 519.174

КОДИРОВАНИЕ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИИ И ВЛОЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВ*)

А. А. Евдокимов

Кодирование структурированной информации рассматривается в его взаимосвязи с исследованием отображений дискретных пространств, сохраняющих определенные структурные свойства. Приводятся результаты по вложениям дискретных метрических пространств и графов для различных классов отображений, сохраняющих метрические свойства близости и отделимости элементов. Изучаются свойства продолжения метрики и разнообразия шаров с целью поиска подходов к выделению дискретных пространств и графов «достаточно регулярного метрического строения». Приводится несколько нерешенных задач.

Введение

В [4] автором отмечалась целесообразность рассмотрения ряда задач дискретного анализа и математической кибернетики с общих позиций исследования вложений дискретных пространств, сохраняющих определенные структурные свойства. В частности, в этой работе введено параметрическое семейство отображений дискретных метрических пространств, сохраняющих отношения близости и отделимости элементов, даны конструкции вложений некоторых пространств в классе таких отображений и указаны связи с теоретическими и прикладными задачами. При варьировании параметров возникают различного типа вложения дискретных метрических пространств и графов: изометрические и локально изометрические, отображения с ограниченным метрическим искажением, дискретные аналоги непрерывных и гомеоморфных вложений. Источником этих рассмотрений явились решения ряда задач дискретного анализа из области теории дизъюнктивных нормальных форм, комбинаторики и кодирования информации [6].

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00531) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект АО–110).

Уже при исследовании вопросов кодирования естественно не ограничиваться рассмотрением лишь метрических свойств вложений, характерных, например, для тематики помехоустойчивости при передаче сообщений по каналам связи. Так, при кодировании данных в различных информационных и вычислительных системах с целью их хранения и последующей машинной обработки существенными оказываются свойства не обязательно метрической природы, а иные структурные свойства, сохранение которых дает возможность достаточно адекватно воспроизвести в кодах структуру исходной задачи. От этого зачастую существенно зависит быстрота обработки данных и эффективность решения задачи. Кроме того, сохранение кодирующим отображением любого просто проверяемого структурного свойства позволяет осуществлять контроль, поскольку невыполнение в кодах сохраняемого отображением свойства можно использовать для обнаружения ошибок.

Рассматривая кодирования структурированной информации в связи с вложениями пространств, сохраняющими определенные свойства, заметим, что кодовое пространство обычно является множеством слов, которое может быть наделено различными структурами метрического, порядкового, алгебраического или иного типа: хемминговы пространства, целочисленные решетки, деревья слов, структура булеана, векторные пространства, групповая структура, кольца полиномов. Хорошо известна универсальность гиперкубовой структуры и в классической теории помехоустойчивого кодирования, когда введение на множестве вершин n-мерного куба различного типа метрических и алгебраических структур помогает исследованию свойств кодов.

Другим источником интереса к вопросам вложений дискретных пространств являются вопросы моделирования разнообразных архитектур вычислительных сетей и рассмотрение возможностей реализации на них вычислительных схем определенного типа. Естественно исследовать вложения графов достаточно регулярного строения. Наряду с различными требованиями, предъявляемыми к таким отображениям, здесь, несомненно, должны быть существенными вопросы устойчивости отображений к малым изменениям графов, исследования различного типа отображений, расширяющих класс вложимых объектов и при этом сохраняющих нужные структурные свойства, например, обеспечивающих возможность обмена информацией, распараллеливание вычислений и т. п. Так, в последние годы возрос интерес к геометрии n-мерного куба и вопросам вложений графов в гиперкубы [12]. Это объясняется, в частности, тем, что гиперкубовая архитектура ЭВМ реализована уже для размерностей $n = 8$, $n = 10$ и $n = 16$, а число вершин-микропроцессоров достигает в ней 65 тысяч. Соединение «элементарных»

вычислительных машин в гиперкубовую структуру обладает определенными достоинствами организации их информационного взаимодействия. По-видимому, одной из первых работ, в которой это было отмечено, является публикация [9]. Позже многими авторами отмечалась возможность эффективного решения на подобной структуре задач, например, допускающих декомпозицию на подзадачи, связанные между собой на локальном уровне.

Конечно, рассмотрение кодирующих отображений, сохраняющих различные структурные свойства, как вложений дискретных пространств включает широкий круг вопросов, характерных для многих разделов математики, но теория кодирования и ее приложения привносят в исследования вложений свои специфические требования к отображениям: надежности и помехоустойчивости, рассмотрения вопросов эффективности, включая оценки сложности различного типа реализаций кодирующих отображений, возможности сжатия информации и т. д.

Приведем основные определения и рассмотрим некоторые задачи, ограничившись вложениями, сохраняющими метрические свойства.

§ 1. Отображения с ограниченным искажением

Пусть X — конечное множество и $\rho_X : X \times X \to Z^+$ — функция расстояния на X, которая удовлетворяет обычным аксиомам расстояния. Пару $\{X, \rho_x\}$ называем *дискретным метрическим пространством.*

Пусть $p > 0$ и $q > 0$ — некоторые числа из области значения метрики ρ_X. Элементы x_1 и x_2 множества X называем *соседними*, если $\rho_X(x_1, x_2) = 1$, *p-близкими*, если $\rho_X(x_1, x_2) \leqslant p$, и *$q$-отделимыми*, если $\rho_X(x_1, x_2) \geqslant q$.

Пусть $f : X \to Y$ — однозначное отображение X в Y, где $\{Y, \rho_Y\}$ — некоторое дискретное метрическое пространство. Следующие определения даны в несколько более общей форме, чем в [4], что позволяет расширить параметрическое семейство отображений.

Отображение f называется

— сохраняющим p-близость, если для любых p-близких элементов x_1 и x_2 из X справедливо неравенство $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant p$;

— сохраняющим q-отделимость, если для любых q-отделимых элементов x_1 и x_2 из X выполняется неравенство $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \geqslant q$;

— k-изометрическим, $k > 0$, если f сохраняет все расстояния, не превосходящие k, т. е.

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2))$$

для любых x_1, x_2 таких, что $\rho_X(x_1), x_2) \leqslant k$.

Поскольку $k > 0$, k-изометрическое отображение соседние в X элементы переводит в соседние элементы в Y. Сохранение 1-отделимости

отображением означает его обратимость, а сохранение 2-отделимости означает, что 1-близкими в Y образами являются только образы соседних в X элементов.

Определение. Обратимое отображение $f : X \to Y$ называется *$\langle p, q\rangle$-вложением* пространства $\{X, \rho_X\}$ в пространство $\{Y, \rho_Y\}$, если f является p-изометрическим и сохраняет q-отделимость.

При $p = 1$ и $q = 1$ получаем класс обратимых отображений, сохраняющих свойство элементов быть соседними. Отметим, что $\langle p, q\rangle$-отображение при $p \geqslant 1$ и $q = 2$ не разрывает связные части (в смысле целочисленной метрики), а разделенные не обращает в связные и может рассматриваться как дискретный аналог непрерывного отображения (см. § 4). При $p = q = D(X)$, где $D(X)$ — диаметр множества X и $D(X) \leqslant D(Y)$, вложение $f : X \to Y$ является изометрическим, сохраняя все расстояния. В общем случае для дискретных метрических пространств существуют $\langle p, q\rangle$-отображения как с большим p и малым q, например $q = 1$, так и со значением $p = 1$ и любым наперед заданным значением q.

Пример 1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_5\}$, а расстояние $\rho_X(x_i, x_j) = \rho_{i,j}$ определяется матрицей расстояний

$$||\rho_{i,j}|| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\rho_Y = |m - n|$. Определим $f : X \to Y$ равенством $f(x_i) = i$. Тогда f является 1-изометрическим, но не 2-изометрическим, поскольку $2 = \rho_X(x_1, x_4) < \rho_Y(1, 4) = 3$, и f сохраняет q-различимость при любом $q = 1, 2, 3$, так как f не сжимает ни одно из расстояний. Обратное отображение f^{-1}: $Y \to X$ является $\langle 2, 2\rangle$-вложением.

Определение. *Избыточностью* $\langle p, q\rangle$-вложения $f : X \to Y$ назовем величину

$$I_f(X, Y) = \log_2 \frac{|Y|}{|X|}.$$

Тогда $I_f(X, Y) \geqslant 0$ и $I_f(X, Y) = 0$ лишь при $|X| = |Y|$.

§ 2. Нумерации двоичных слов и локально изометрическое кодирование натуральных чисел

Пусть $X = \{0, 1, \ldots, l - 1\}$, $\rho_X = |i - j|$, а пространством $\{Y, \rho_Y\}$ является множество всех двоичных слов длины n с метрикой Хемминга,

т. е. $Y = \{0,1\}^n$, $\rho_Y(\tilde{x}, \tilde{y})$ — расстояние Хемминга между словами $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, равное числу позиций, в которых эти слова различаются. Тогда $\langle p, 1\rangle$-вложение $f : X \to Y$ определяет *p-изометрическое кодирование* натуральных чисел из отрезка $[0, l-1]$, и выполняется равенство

$$\rho_Y(f(i), f(j)) = |i - j|$$

для всех чисел $i, j \in [0, l-1]$ таких, что $|i - j| \leqslant p$. При $l = 2^n$ имеем $|X| = |Y|$ и $\langle p, 1\rangle$-вложение $f : [0, 2^n - 1] \to \{0,1\}^n$ имеет нулевую избыточность. Задача о существовании и построении изометрических кодирований натуральных чисел впервые рассмотрена в статье [3], в которой $\langle p, 1\rangle$-вложения были названы *$\langle p, n\rangle$-нумерациями* двоичных слов длины n или соответствующих им подмножеств n-элементного множества, а вложения с нулевой избыточностью при $l = 2^n$ названы *полными*.

Теорема 1. *При любом $n \geqslant 5$ и $p \leqslant \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$ существует $\langle p, 1\rangle$-вложение $f : [0, 2^n - 1] \to \{0,1\}^n$ с нулевой избыточностью.*

Для различных подпоследовательностей значений n существуют $\langle p, 1\rangle$-вложения с нулевой избыточностью и при больших значениях p. Например,

— для $n_i = 5 \cdot 2^i$ существуют $\langle p, 1\rangle$-вложения с $p = 3 \cdot 2^i + 1$ при любом $i = 0, 1, \ldots$;

— для $n_i = 11 \cdot 2^i$ существуют $\langle p, 1\rangle$-вложения с $p = 7 \cdot 2^i + 1$ при любом $i = 0, 1, \ldots$

В общем случае задача о наибольшем значении порога изометричности p, для которого существует $\langle p, 1\rangle$-вложение $f : [0, 2^n - 1] \to \{0,1\}^n$, остается нерешенной.

Возможна и другая постановка экстремальной задачи изометрического кодирования. Пусть заданы число $n = \dim\{Y, \rho_Y\}$ и порог изометричности p, $1 \leqslant p \leqslant n$. Требуется найти наибольшее $l = l(n, p)$ такое, что существует $\langle p, 1\rangle$-вложение $f : [0, \ldots, l] \to \{0,1\}^n$.

В [3] для циклической метрики $\rho_X = \min\{|i - j|, l - |i - i|\}$ найдены значения $l(5, 4) = 32$ и $l(n, p) = 2^n$ для указанных выше пар (n_i, p_i). Эти значения для $l(n, p)$ оптимальны, поскольку вложения имеют нулевую избыточность.

Интересным нерешенным случаем является область значений p, близких к n. Неизвестно, существуют ли константа c и n_0 такие, что $l(n, n - c) = 2^n$ для любого $n \geqslant n_0$. В [8] доказано, что $l(n, n-1) \geqslant (n-1) \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$ и эта оценка точна при некоторых дополнительных ограничениях на вложения.

При получении результатов о $\langle p, n\rangle$-нумерациях и изометрическом кодировании чисел использовались две базовые идеи:

a) сведение к вопросу существования и построения n-значных символьных последовательностей с ограничениями;

b) представление булева n-куба как n-мерного тора $\vec{C}_2^n = \vec{C}_2 \times \ldots \times \vec{C}_2$ (здесь $\vec{C}_k$ обозначает ориентированный цикл с k ребрами).

Лемма (о торе). *Простой ориентированный циклический обход всех вершин тора $\vec{C}^2 = \vec{C}_m \times \vec{C}_n$ существует тогда и только тогда, когда разрешима в натуральных числах система уравнений*

$$\begin{cases} x + y = \text{Н.О.Д. } (m, n), \\ (x, m) = 1, \\ (y, n) = 1. \end{cases}$$

Задача описания всех пар чисел m и n, при которых эта система разрешима, оказалась интересной и глубокой теоретико-числовой проблемой, окончательное решение которой не найдено. Более полную информацию об этой задаче и ее связях с другими, в частности с проблемой «змея в ящике», можно найти в [7] и указанной там литературе.

Заметим, что использование двоичных представлений целых чисел в качестве их кодов уже не сохраняет единичные расстояния. Примером 2-изометрического кодирования с нулевой избыточностью являются широко известные коды Грея [16]. Однако для них не выполняется свойство изометричности уже при $p = 3$.

Результаты о локально изометрическом кодировании натуральных чисел обобщаются на $\langle p, 1\rangle$-вложения целочисленной решетки $X_l^2 = X \times X$ в хемминговы пространства. Например, из указанного выше результата $l(5,4) = 32$ следует, что узлы решетки X_{32}^2 можно закодировать двоичными наборами длины 10 так, что любое ее «окно-подрешетка» X_5^2 оказывается закодированным изометрически, т. е. сужение f на любую подрешетку X_5^2 есть полная изометрия, причем 5×5 — наибольший размер подрешетки с этим свойством.

§ 3. Коды типа «змея в ящике»

Отличие кодов типа «змея в ящике» от кодов Грея состоит в том, что кодирующее отображение $f : \{0, 1, \ldots, l-1\} \to \{0, 1\}^n$, которое определяет цепной код длины l с расстоянием d, должно сохранять d-отделимость при $d \geqslant 2$. Из этого следует, что f является $\langle d+1, d\rangle$-вложением цепи длины l в n-мерный куб. Случай $d = 2$ соответствует коду, называемому змеей в ящике. Задача нахождения змеи наибольшей длины l — широко известная комбинаторная проблема. Точные значения максимальной длины змеи найдены для $n \leqslant 7$ [13]. Наилучшая нижняя оценка $l(n) \geqslant 0{,}301 \cdot 2^n$ получена в [11], о верхних границах см. [14, 17, 19].

Известно [2], что для любого n и $d = 2t + 1 \geqslant 3$ существует $\langle d+1, d\rangle$-вложение f цепи длины $l = \lambda 2^n/n^{t(1+o(1))}$, избыточность I_f которого удовлетворяет неравенству

$$I_f \leqslant t\log_2 n + c_1 \log_2 \log_2 n + c_2,$$

где c_1 и c_2 — константы, не зависящие от n. Это вложение асимптотически оптимально, так как избыточность любого $\langle d+1, d\rangle$-вложения цепи не меньше $t\log_2 n + \mathrm{const}$.

Интересная конструкция и новые цепные коды найдены в [15], где приведены цепные коды малых размерностей, найденные с помощью компьютера, и таблица их длин для $n \leqslant 17$ и $d \leqslant 7$.

§ 4. Вложения графов

Пусть G и H — простые связные конечные графы с обычным расстоянием

$$\rho_G(u,v) = \min_C |C(u,v)|,$$

где минимум берется по всевозможным простым цепям $C(u,v)$ между вершинами u и v, а $|C|$ — длина цепи C. Для графов, как для дискретных метрических пространств, определено $\langle p,q\rangle$-вложение $f : V(G) \to V(H)$, которое для краткости записываем $f : G \to H$. Заметим, что $\langle p,q\rangle$-вложение $f : G \to H$ при $p = q$ является p-изометрическим в обе стороны вложением графов, если под f^{-1} иметь в виду отображение $f^{-1} : \mathrm{Im} f \to G$ области значений $\mathrm{Im} f \subseteq V(H)$ отображения f на множество $V(G)$, и метрику, индуцированную на $\mathrm{Im} f$ вложением [5].

Уточним определение сохранения близости отображением $f : G \to H$ «на языке ε и δ» в несколько более общей форме.

Определение. Отображение $f : G \to H$ называется $\langle\varepsilon,\delta\rangle$-*непрерывным*, если для любых $u, v \in V(G)$ из неравенства $\rho_G(x_1,x_2) \leqslant \delta$ следует $\rho_H(f(x_1)f(x_2)) \leqslant \varepsilon$, где ε и δ — натуральные числа из области определения метрик ρ_G и ρ_H.

Если $S_k(v)$ — шар с центром в точке $v \in V(G)$ и радиусом k, то свойство ограниченности искажения «близких» расстояний в терминах окрестностей запишем следующим образом:

$$f(S_\delta(v)) \subseteq S_\varepsilon(f(v))$$

для любой вершины $v \in V(G)$, а для свойства сохранения отображением отделимости с порогами ε и δ имеем

$$\mathrm{Im} f \cap S_\varepsilon(f(v)) \subseteq f(S_\delta(v)).$$

При $\varepsilon = \delta = p$ для свойства локальной изометричности вложения $f : G \to H$ с порогом p имеем

$$f(S_p(v)) = S_p(f(v)) \cap \operatorname{Im} f$$

для любой вершины $v \in V(G)$.

На языке $\langle p, q \rangle$-вложений для различных значений параметров p и q можно формулировать некоторые задачи теории графов, как непосредственно связанные с вложениями, например изоморфизм подграфу или порожденному подграфу, задачи о существовании гамильтоновых цепей или циклов, так и задачи раскраски графов, экстремальные задачи о независимых множествах, упаковках шаров и др. [4]. Конечно, общность рассмотрений задач этого типа приводит к тому, что многие из них даже при незначительном расширении оказываются NP-трудными. Приведем два примера расширений подобного рода, следуя принятой в [1] форме записи NP-полных задач.

Пример 2. Рассматривая вложения $f : X \to Y$ для $X = \{0, 1, \ldots, l-1\}$ и $\rho_X = |i - j|$, расширим хемминговы пространства $Y = \{0,1\}^n$ до класса всех двудольных графов $\{G, \rho_G\}$.

Условие. Заданы двудольный граф $G = (V, E)$ и число $l \leqslant |V|$.

Вопрос. Существует ли $< 1, 1 >$-вложение $f : X \to G$ при $|X| = l$?

Пример 3. Пусть $\{Y, \rho_Y\}$ — хеммингово пространство $\{0,1\}^n$, а $\{X, \rho_X\}$ расширим до класса связных деревьев $\{D, \rho_D\}$.

Условие. Заданы дерево D с l вершинами и число n.

Вопрос. Существует ли $< 1, 1 >$-вложение $f : D \to Y$ при $\dim\{Y, \rho_Y\} \leqslant n$?

Оба указанных расширения приводят к NP-полным задачам. О вложениях деревьев в гиперкубы при различных ограничениях на классы деревьев см. [18].

Исследования вложений дискретных метрических пространств, сохраняющих отношения близости и отделимости элементов, приводят к изучению таких свойств пространств, которые позволяли бы выделять «достаточно регулярные» пространства и графы и при этом не слишком сужали рассматриваемые классы. Один из подходов был рассмотрен в [4] и продолжен в [10].

Определение. Дискретное метрическое пространство $\{X, \rho_X\}$ удовлетворяет свойству продолжения метрики (СПМ), если для любых элементов $x \in X$, $y \in Y$ справедливо

$$S_1(x) \not\subseteq S_i(y)$$

или

$$S_1(y) \not\subseteq S_i(x),$$

где $i = \rho_X(x, y)$ и $i < d$ для конечных пространств диаметра $d = d(X)$.

Поскольку метрика целочисленна, то СПМ означает, что или существует $z \in S_1(x)$ такое, что

$$\rho(z, y) = \rho(x, y) + 1,$$

или (симметрично) существует $z' \in S_1(y)$, для которого

$$\rho(z', x) = \rho(x, y) + 1.$$

Если СПМ удовлетворяют такие элементы x и y, что $\rho_X(x, y) < k$, то будем говорить, что для метрического пространства $\{X, \rho_X\}$ выполняется свойство k-продолжения метрики (k-СПМ).

Теорема 2. *Для произвольного связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *G удовлетворяет k*-СПМ;

(ii) *любые две вершины u, v такие, что $\rho_G(u, v) < k$, принадлежат некоторой кратчайшей цепи длины k в графе G;*

(iii) *граф G не содержит тупиковых цепей длины, меньшей k (тупиковая цепь — это кратчайшая цепь, не являющаяся подцепью никакой другой содержащей ее кратчайшей цепи в графе G).*

Результаты о взаимосвязи свойства k-продолжения метрики и $\langle p, q\rangle$-вложений графов содержатся в [4, 10]. В частности, справедлива

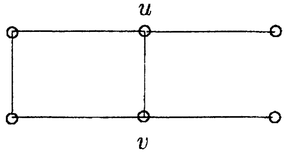
Теорема 3. *Пусть $f : G \to H$ сохраняет 1-близость и q-отделимость, $q \geqslant 2$. Тогда f сохраняет q'-отделимость при любом $q' < q$ (и, следовательно, обратимо) тогда и только тогда, когда G удовлетворяет* q-СПМ.

Второе свойство связано с идеей характеризации графов и дискретных метрических пространств разнообразием и взаимной пересекаемостью шаров, содержащихся в графе, когда радиусы этих шаров последовательно возрастают от нуля до радиуса всего графа. Ограничимся рассмотрением конечных графов.

Пусть $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$, где τ_i — число различных шаров радиуса i в графе G диаметра $d = d(G)$. Тогда $\tau_0 = |V(G)|$, $\tau_i \geqslant \tau_{i+1}$ и $\tau_d = 1$.

Определение. Граф G удовлетворяет свойству t-разнообразия шаров, если $\tau_i = |V(G)|$ для любого $i < t$.

Пример 4.



Для изображенного на рисунке графа имеем $d(G) = 3$, и так как $S_2(u) = S_2(v)$, то $\overline{\tau}(G) = (6, 6, 5, 1)$.

Определение. Граф G называется *метрически однородным*, если он удовлетворяет свойству t-разнообразия при $t = d(G)$.

Таким образом, для метрически однородного графа всегда имеем $\overline{\tau}(G) = (|V|, |V|, \dots, |V|, 1)$.

Примерами метрически однородных графов являются: граф Петерсена ($d = 2$, $\overline{\tau} = (10, 10, 1)$), n-мерный булев куб ($d = n$, $\overline{\tau} = (2^n, 2^n, \dots, 2^n, 1)$), графы платоновых тел и другие графы, метрическое строение которых «достаточно регулярно».

Обозначим через P_k^d класс связных графов диаметра не более d, удовлетворяющих свойству k-СПМ, а через R_t^d класс связных графов диаметра не более d, удовлетворяющих свойству t-разнообразия шаров.

Теорема 4. *Справедливы вложения*

$$R_1^d \supset R_2^d \supset \dots \supset R_d^d,$$
$$P_1^d \supset P_2^d \supset \dots \supset P_d^d,$$

причем $R_i^d = P_i^d$ *при* $i \leqslant 2$, $P_i^d \not\subseteq R_i^d$ *и* $R_i^d \not\subseteq P_i^d$ *при* $i \geqslant 3$. *Почти все* n*-вершинные графы удовлетворяют* СПМ, *являются метрически однородными и содержатся в классе* $R_2^2 = P_2^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. **Евдокимов А. А.** Цепные коды с произвольным расстоянием // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 6. С. 1273–1276.
3. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Вып. 34. С. 8–26.
4. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 116–132 (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
5. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.

6. **Евдокимов А. А.** Кодирование структурированной информации и вложения дискретных метрических пространств // Отчет ИМ СО РАН «Методы дискретной математики для новых информационных технологий». Проект «Интеграция», № 473. 1997. С. 1–7.
7. **Евдокимов А. А., Малюгин С. А.** Код «змея в ящике» и пути в решетке на торе // Математика сегодня. Киев: Вища школа, 1987. С. 108–116.
8. **Пережогин А. Л.** О локально изометрическом кодировании натуральных чисел // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 69–76.
9. **Решетняк Ю. Г.** О задаче соединения элементов вычислительной системы // Вычислительные системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1962. Вып. 3. С. 17–30.
10. **Федоряева Т. И.** Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 49–67.
11. **Abbott H. L., Katchalski M.** On the construction of snake in the box codes // Utilitas Math. 1991. V. 40. P. 97–116.
12. **Harary F., Hayes J. P., Wu H. -J.** A survey of the theory of hypercube graphs // Comput. Math. Appl. 1988. V. 15, N 4. P. 277–289.
13. **Kochut K. J.** Snake-in-the-box codes for dimension 7 // J. Combin. Math. and Combin. Comput. 1996. V. 20. P. 175–185.
14. **Lukito A., van Zanten A. J.** A new non-asymptotic upper bound for snake-in-the-box codes // J. Combin. Math. and Combin. Comput. (To appear.)
15. **Paterson K. G., Tuliani J.** Some new circuit codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44, N 3. P. 1305–1310.
16. **Savage C. D.** A survey of combinatorial Gray codes // SIAM Rev. 1997. V. 39, N 4. P. 605–629.
17. **Snevily H. S.** The snake-in-the-box problem: A new upper bound // Discrete Math. 1994. V. 133, N 1–3. P. 307–314.
18. **Wagner A. S.** Embedding trees in the hypercube. Ph. D. dissertation. Univ. of Toronto. 1987. 118 p.
19. **Zémor G.** An upper bound on the size of the snake-in-the-box // Combinatorica. 1997. V. 17, N 2. P. 287–298.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
18 июля 2000 г.