ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2000. Серия 2. Том 7, № 1, 35–46

УДК 519.87+519.854

ДВУХУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ СТАНДАРТИЗАЦИИ ПРИ УСЛОВИЯХ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА*)

Л. Е. Горбачевская

Изучаются целочисленные линейные задачи двухуровневого программирования, моделирующие выбор номенклатуры изделий в условиях неоднозначности оптимального потребительского выбора. Исследуется возможность решения поставленных задач в случаях, когда матрицы, определяющие целевые функции, обладают свойствами квазивыпуклости или квазивогнутости. Показано, что при одних комбинациях этих свойств задачи решаются с полиномиальной сложностью, при других же остаются NP-трудными.

Введение

Задачи двухуровневого программирования возникают в экономических приложениях [7, 9], когда нижние звенья иерархической системы имеют свободу принятия решений. Впервые такие задачи рассматривались в [8] при описании стратегий поведения конкурирующих фирм, одна из которых доминирует над другими.

В настоящей работе продолжается начатое в [3, 4] исследование двухуровневой задачи выбора номенклатуры изделий. На верхнем уровне решается задача производства изделий при условии полного удовлетворения потребительского спроса. Производитель изделий стремится минимизировать свои затраты, которые зависят от предпочтений потребителей. Потребители выбирают те изделия, которые минимизируют их закупочные и эксплуатационные расходы. В общем случае оптимальный потребительский выбор может быть неоднозначен. Поэтому рассматриваются две постановки, соответствующие оптимистической и пессимистической оценкам поведения потребителя по отношению к производителю.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00482).

В статье исследуется возможность решения поставленных задач в случаях, когда матрицы, определяющие целевые функции, обладают свойствами квазивыпуклости или квазивогнутости. Показано, что при одних комбинациях этих условий задачи эффективно разрешимы, при других же остаются NP-трудными.

1. Постановка задач

Введем обозначения:

$I = \{1, \dots, n\}$ — множество изделий;

$J = \{1, \dots, m\}$ — множество потребителей;

c_i^0 — затраты на подготовку производства изделия i;

c_{ij} — затраты производителя, связанные с реализацией изделия i потребителю j;

d_{ij} — закупочные и эксплуатационные расходы потребителя j при использовании изделия i;

x_i — переменная выбора производителем изделия i ($x_i \in \{0, 1\}$, $x = (x_i)$);

$I(x) = \{i \in I \mid x_i = 1\}$ — список изделий, выбираемых в варианте x;

X — множество всех векторов $x \neq 0$ с компонентами 0 и 1;

y_{ij} — переменные выбора потребителем j изделия i ($y_{ij} \in \{0, 1\}$, $y = (y_{ij})$);

$Y(x)$ — множество возможных вариантов y потребительского выбора. Оно описывается ограничениями

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \quad y_{ij} \leqslant x_i, \quad i \in I,\ j \in J.$$

Модель выбора номенклатуры изделий с учетом интересов производителя продукции и ее потребителей представляет собой двухуровневую экстремальную задачу: найти

$$\min_{x \in X} \Big\{ \sum_{i \in I} c_i^0 x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}^* \Big\},$$

где $y^* = (y_{ij}^*)$ — оптимальное решение задачи: найти

$$\min_{y \in Y(x)} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij}.$$

Обозначим через $Y^*(x)$ совокупность оптимальных решений y^* при фиксированном векторе x. Если множество $Y^*(x)$ включает более одного элемента, то при данном x величина затрат производителя зависит от потребительского выбора $y^* \in Y^*(x)$. Рассмотрим две задачи, соответствующие оптимистической и пессимистической оценкам поведения потребителей по отношению к производителю.

Кооперативная задача: найти минимум функции

$$F_1(x) = \sum_{i\in I} c_i^0 x_i + \min_{y^*\in Y^*(x)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}^* \to \min_{x\in X}. \tag{1}$$

Антикооперативная задача: найти минимум функции

$$F_2(x) = \sum_{i\in I} c_i^0 x_i + \max_{y^*\in Y^*(x)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}^* \to \min_{x\in X}. \tag{2}$$

Введем обозначение $I_j(x) = \left\{k \in I(x) \mid d_{kj} = \min\limits_{i\in I(x)} d_{ij}\right\}$, $j \in J$. Целевые функции задач (1) и (2) записываются следующим образом:

$$F_1(x) = \sum_{i\in I} c_i^0 x_i + \sum_{j\in J} \min_{i\in I_j(x)} c_{ij}, \quad F_2(x) = \sum_{i\in I} c_i^0 x_i + \sum_{j\in J} \max_{i\in I_j(x)} c_{ij}.$$

Абстрагируясь от содержательной постановки, параметры c_i^0, c_{ij}, d_{ij} будем считать произвольными числами. Полагаем $C = (c_{ij})$ и $D = (d_{ij})$.

2. Свойство квазивыпуклости матрицы D

Вектор $d = (d_1, \ldots, d_n)$ называется *квазивыпуклым* [2], если при любых i, k, l $(i < k < l)$ выполняется неравенство $d_k \leqslant \max\{d_i,\ d_l\}$, и *строго квазивыпуклым*, если при тех же условиях выполняется строгое неравенство $d_k < \max\{d_i,\ d_l\}$.

Введем обозначение

$$\psi(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } a > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть* $I(x) = \{i_1, \ldots, i_s\}, i_1 < \ldots < i_s$, *и* $I_d = \left\{k \in I(x) \mid d_k = \min\limits_{i\in I(x)} d_i\right\}$. *Тогда если вектор* $d = (d_1, \ldots, d_n)$ *является строго квазивыпуклым, то для любого вектора* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *справедливы равенства*

$$\min_{i\in I_d} c_i = c_{i_1} + \sum_{r=2}^{s} (c_{i_r} - c_{i_{r-1}})\psi(d_{i_r} - d_{i_{r-1}})\Big(1 - \psi(c_{i_{r-1}} - c_{i_r})\psi(d_{i_{r-1}} - d_{i_r})\Big), \tag{4}$$

$$\max_{i\in I_d} c_i = c_{i_1} + \sum_{r=2}^{s} (c_{i_r} - c_{i_{r-1}})\psi(d_{i_r} - d_{i_{r-1}})\Big(1 - \psi(c_{i_r} - c_{i_{r-1}})\psi(d_{i_{r-1}} - d_{i_r})\Big). \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через S правую часть равенства (4). В силу строгой квазивыпуклости вектора d возможны два случая: $I_d = \{i_k\}$ или $I_d = \{i_k, i_{k+1}\}$ при некоторых $i_k, i_{k+1} \in I(x)$.

Пусть $I_d = \{i_k\}$. Тогда $d_{i_1} > \ldots > d_{i_k}$, $d_{i_k} < d_{i_{k+1}} < \ldots < d_{i_s}$ и

$$S = c_{i_1} + \sum_{r=2}^{k} (c_{i_r} - c_{i_{r-1}}) = c_{i_k} = \min_{i \in I_d} c_i.$$

Пусть $I_d = \{i_k, i_{k+1}\}$. Тогда $d_{i_1} > \ldots > d_{i_k} = d_{i_{k+1}}$, $d_{i_{k+1}} < \ldots < d_{i_s}$ и

$$\begin{aligned} S &= c_{i_1} + \sum_{r=2}^{k+1} (c_{i_r} - c_{i_{r-1}}) + (c_{i_k} - c_{i_{k+1}})\psi(c_{i_k} - c_{i_{k+1}}) \\ &= c_{i_{k+1}} + (c_{i_k} - c_{i_{k+1}})\psi(c_{i_k} - c_{i_{k+1}}) = \min\{c_{i_k}, c_{i_{k+1}}\} = \min_{i \in I_d} c_i. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (4) верно. Равенство (5) следует из (4) и соотношения

$$\max_{i \in I_d} c_i = -\min_{i \in I_d} \{-c_i\}.$$

Лемма 1 доказана.

Матрицу $D = (d_{ij})$ назовем (*строго*) *квазивыпуклой*, если каждый ее вектор-столбец является (строго) квазивыпуклым.

Теорема 1. *Если матрица D строго квазивыпукла, то кооперативная и антикооперативная задачи сводятся к задаче «о ближайшем соседе»: найти*

$$\min_{(i_k),s} \sum_{k=1}^{s} f(i_{k-1}, i_k) \tag{6}$$

при ограничениях

$$0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_s \leqslant n, \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим кооперативную задачу (1). Пусть $I(x) = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $i_1 < \ldots < i_s$. Используя лемму 1, можно записать

$$\begin{aligned} F_1(x) = \sum_{r=1}^{s} c_{i_r}^0 + \sum_{j \in J} c_{i_1 j} + \sum_{j \in J} \sum_{r=2}^{s} (c_{i_r j} - c_{i_{r-1} j})\psi(d_{i_r j} - d_{i_{r-1} j}) \\ \times \Big(1 - \psi(c_{i_{r-1} j} - c_{i_r j})\psi(d_{i_{r-1} j} - d_{i_r j})\Big). \end{aligned}$$

Определим функцию $f(u,v)$ соотношениями

$$f(0,v) = c_v^0 + \sum_{j \in J} c_{vj}, \quad 1 \leqslant v \leqslant n,$$

$$f(u,v) = c_v^0 + \sum_{j \in J} (c_{vj} - c_{uj})\psi(d_{vj} - d_{uj})\Big(1 - \psi(c_{uj} - c_{vj})\psi(d_{uj} - d_{vj})\Big),$$

$$1 \leqslant u < v \leqslant n.$$

Полагая $i_0 = 0$, получаем $F_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{s} f(i_{k-1}, i_k)$. Следовательно, задача (1) принимает вид (6), (7). Для антикооперативной задачи (2) рассуждения аналогичны. Теорема 1 доказана.

Задача (6), (7) решается методом динамического программирования за $O(n^2)$ операций при объеме памяти $O(n)$ [2]. Расчет и хранение значений функции $f(u,v)$ требуют $O(n^2 m)$ операций и $O(n^2)$ ячеек памяти. Следовательно, кооперативная и антикооперативная задачи со строго квазивыпуклой матрицей D могут быть решены с оценкой сложности $O(n^2 m)$ при объеме памяти $O(n^2)$.

Вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$ назовем *монотонным относительно вектора* $d = (d_1, \dots, d_n)$, если для любого множества $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq I$ такого, что $i_1 < \dots < i_s$ и $d_{i_1} = \dots = d_{i_s}$, выполняются либо неравенства $c_{i_1} \leqslant \dots \leqslant c_{i_s}$, либо $c_{i_1} \geqslant \dots \geqslant c_{i_s}$.

Матрицу $C = (c_{ij})$ назовем *монотонной относительно матрицы* D, если j-й вектор-столбец матрицы C является монотонным относительно j-го вектор-столбца матрицы D при каждом $j \in J$.

Теорема 2. *Кооперативная и антикооперативная задачи с квазивыпуклой матрицей D и матрицей C, монотонной относительно D, являются* NP*-трудными.*

При доказательстве теоремы потребуется следующая

Лемма 2. *Задача минимизации на множестве X полинома*

$$P(x) = \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=r+1}^{n} b_{rk}(1 - x_r)(1 - x_k), \tag{8}$$

где $b_{r,r+1} \geqslant 0$ и $b_{rk} \leqslant 0$ при $k > r+1$, является NP*-трудной.*

Доказательство. Покажем, что NP-трудная задача о вершинном покрытии кубического графа [5] сводится к задаче минимизации полинома (8). Обозначим через $G = (V, E)$ произвольный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Задача о вершинном покрытии графа G заключается в нахождении такого подмножества $V' \subseteq V$ минимальной мощности, что для любого ребра $\{u, v\} \in E$ по крайней мере одна из вершин u или v принадлежит V'. В работе [1] показано, что эта задача сводится к следующей: найти минимум полинома

$$Q = \sum_{v \in V} y_v + \sum_{e=(v_1,v_2) \in \vec{E}} \left((1 - y_{v_1})(1 - z_e) + (1 - y_{v_2}) z_e\right) \tag{9}$$

при ограничениях $y_v, z_e \in \{0, 1\}, v \in V, e \in \vec{E}$. Здесь через $\vec{E}$ обозначено множество дуг, полученных произвольной ориентацией ребер из E.

Пусть степени всех вершин графа G равны 3, т. е. граф G — кубический. Без ограничения общности считаем его связным. Как показано

в [3], ориентацию ребер графа можно выбрать таким образом, чтобы для любой вершины $v \in V$ нашлась пара дуг $(u, v), (v, w) \in \vec{E}$. Обозначим через W множество тех вершин графа, из которых исходят по две дуги. Раскрывая скобки в выражении (9) и приводя подобные члены, получаем

$$Q = |\vec{E}| - |W| + \sum_{v \in W} (1 - y_v) + \sum_{e=(v_1,v_2)\in\vec{E}} (y_{v_1} z_e - y_{v_2} z_e).$$

Положим $n = 3|V|$ и $I = \{1, \dots, n\}$. Переменным y_v, z_e поставим в соответствие разности $1 - x_i$, $i \in I$, по следующему алгоритму.

Шаг 1. Положить $i = 1$.

Шаг 2. Последовательно перебирая вершины $v \in V$, выполнить следующие действия:

1) если $v \in W$ и из вершины v выходят дуги e и e', то положить $z_e = 1 - x_i$, $y_v = 1 - x_{i+1}$, $z_{e'} = 1 - x_{i+2}$, $i = i + 3$;

2) если $v \in V \setminus W$ и из вершины v выходит дуга e, то положить $z_e = 1 - x_i$, $y_v = 1 - x_{i+1}$, $i = i + 3$.

Конец

Нетрудно видеть, что полином Q от переменных x_i имеет вид (8). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим NP-трудную [6] задачу минимизации на множестве X квадратичного полинома

$$R(x) = \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=r+1}^{n} b_{rk}(1 - x_r)(1 - x_k), \tag{10}$$

где $b_{rk} \geqslant 0$. Покажем, что она сводится к кооперативной задаче (1).

Каждой паре (r, k) поставим в соответствие номер j и вектор-столбцы (c_{ij}), (d_{ij}), $i \in I$, полагая

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \{r, k\}, \\ b_{rk}, & \text{если } i \in I \setminus \{r, k\}, \end{cases} \qquad d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = r, \\ 1, & \text{если } i \in [r + 1, k], \\ 2, & \text{если } i \in I \setminus [r, k]. \end{cases} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что

$$\min_{i \in I_j(x)} c_{ij} = b_{rk}(1 - x_r)(1 - x_k).$$

Положим $c_i^0 = a_i$, $i \in I$. Обозначая через J совокупность номеров j, получаем

$$R(x) = \sum_{i \in I} c_i^0 x_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in I_j(x)} c_{ij} = F_1(x).$$

Таким образом, на множестве X значения целевой функции кооперативной задачи и полинома (10) совпадают. Искомое сведение получено,

поскольку построенные матрицы $C = (c_{ij})$ и $D = (d_{ij})$ обладают указанными в формулировке теоремы свойствами.

Покажем, что NP-трудная в силу леммы 2 задача минимизации на множестве X полинома (8) сводится к антикооперативной задаче (2). Каждой паре (r, k) согласно соотношениям (11) поставим в соответствие номер j и вектор-столбцы (c_{ij}), $(d_{ij}), i \in I$. Нетрудно видеть, что

$$\max_{i \in I_j(x)}{}' c_{ij} = b_{rk}(1 - x_r)(1 - x_k).$$

Положим $c_i^0 = a_i$, $i \in I$. Обозначая через J совокупность номеров j, получаем

$$P(x) = \sum_{i \in I} c_i^0 x_i + \sum_{j \in J} \max_{i \in I_j(x)} c_{ij} = F_2(x).$$

Как и выше, матрицы C и D обладают требуемыми свойствами. Искомое сведение получено. Теорема 2 доказана.

3. Свойство квазивогнутости матрицы D

3.1. Кооперативная задача

Вектор $d = (d_1, \ldots, d_n)$ называется *квазивогнутым* [2], если при любых i, k, l $(i < k < l)$ выполняется неравенство $d_k \geqslant \min\{d_i,\ d_l\}$. Вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)$ назовем *квазивогнутым относительно вектора* d, если для любого множества $\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq I$ такого, что $i_1 < \ldots < i_s$ и $d_{i_1} = \ldots = d_{i_s}$, вектор $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_s})$ является квазивогнутым. Введем обозначение

$$\chi(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0, \\ 0, & \text{если } a \neq 0. \end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть* $I(x) = \{i_1, \ldots, i_s\}, i_1 < \ldots < i_s$, $I_d = \Big\{k \in I(x) \mid d_k = \min\limits_{i \in I(x)} d_i\Big\}$ *и вектор* c *является квазивогнутым относительно вектора* d. *Тогда*

a) *если* $I_d = \{i_1, \ldots, i_k\}$, *то*

$$\min_{i \in I_d} c_i = c_{i_1} + \sum_{r=2}^{s} \chi(d_{i_1} - d_{i_r})(1 - \psi(c_{i_1} - c_{i_r})) \times \Big(c_{i_r} - c_{i_{r-1}} + (c_{i_{r-1}} - c_{i_1})\psi(c_{i_1} - c_{i_{r-1}})\Big); \tag{12}$$

b) *если* $I_d = \{i_k, \ldots, i_s\}$, *то*

$$\min_{i \in I_d} c_i = c_{i_s} + \sum_{r=2}^{s} \chi(d_{i_s} - d_{i_{r-1}})(1 - \psi(c_{i_s} - c_{i_{r-1}})) \times \Big(c_{i_{r-1}} - c_{i_r} + (c_{i_r} - c_{i_s})\psi(c_{i_s} - c_{i_r})\Big).$$

Функция $\psi(a)$ определена равенством (3).

Доказательство. a) Обозначим r-е слагаемое в сумме (12) через f_r. Если $c_{i_1} \leqslant c_{i_r}$ для любого $r \in [2,k]$, то $f_r = 0$ при любом $r \in [2,s]$ и равенство (12) верно. Пусть найдется такой номер $t \in [2,k]$, что $c_{i_1} \leqslant c_{i_{t-1}}$ и $c_{i_1} > c_{i_t}$. В силу квазивогнутости вектора c относительно d получаем

$$f_r = \begin{cases} 0, & \text{если } r \in [2,t-1] \cup [k+1,s], \\ c_{i_t} - c_{i_1}, & \text{если } r = t, \\ c_{i_r} - c_{i_{r-1}}, & \text{если } r \in [t+1,k]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$c_{i_1} + \sum_{r=2}^{s} f_r = c_{i_1} + (c_{i_t} - c_{i_1}) + \sum_{r=t+1}^{k} (c_{i_r} - c_{i_{r-1}}) = c_{i_k} = \min_{i \in I_d} c_i$$

и (12) верно. Доказательство утверждения b) леммы проводится аналогично. Лемма 3 доказана.

Матрицу C назовем *квазивогнутой относительно матрицы* D, если j-й вектор-столбец матрицы C является квазивогнутым относительно j-го вектор-столбца матрицы D при каждом $j \in J$.

Теорема 3. *Если матрица D является квазивогнутой и матрица C квазивогнута относительно D, то кооперативная задача может быть решена за время $O(n^4 m)$ при объеме памяти $O(n^2)$.*

Доказательство. Множество X разобьем на два подмножества

$$X_1 = \{x \in X \mid I(x) \leqslant 2\}, \quad X_2 = X \setminus X_1 = \{x \in X \mid I(x) > 2\}.$$

Поскольку $|X_1| \leqslant n^2$, расчет величины $\min\limits_{x \in X_1} F_1(x)$ можно осуществить перебором элементов $x \in X_1$ за время $O(n^2 m)$ при объеме памяти $O(n)$.

Рассмотрим множество X_2. Пусть $x \in X_2$ и $I(x) = \{i_1, \dots, i_s\}$, где $s > 2$ и $i_1 < \dots < i_s$. В силу квазивогнутости матрицы D для любого $j \in J$ имеем $I_j(x) = \{i_1, \dots, i_{k_j}\} \cup \{i_{l_j}, \dots, i_s\}$, где $0 \leqslant k_j < l_j \leqslant s+1$. Так как матрица C квазивогнута относительно D, с помощью леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{r=1}^{s} c^0_{i_r} + \sum_{j \in J} \min\{c_{i_1 j}, c_{i_s j}\} \chi(d_{i_1 j} - d_{i_s j}) \\ &+ \sum_{j \in J} (1 - \psi(d_{i_s j} - d_{i_1 j})) \Big[c_{i_1 j} + \sum_{r=2}^{s} \chi(d_{i_1 j} - d_{i_r j})(1 - \psi(c_{i_1 j} - c_{i_r j})) \\ &\times \Big(c_{i_r j} - c_{i_{r-1} j} + (c_{i_{r-1} j} - c_{i_1 j}) \psi(c_{i_1 j} - c_{i_{r-1} j}) \Big) \Big] \end{aligned}$$

$$+\sum_{j\in J}(1-\psi(d_{i_1j}-d_{i_sj}))\Big[c_{i_sj}+\sum_{r=2}^{s}\chi(d_{i_sj}-d_{i_{r-1}j})(1-\psi(c_{i_sj}-c_{i_{r-1}j}))$$

$$\times\Big(c_{i_{r-1}j}-c_{i_rj}+(c_{i_rj}-c_{i_sj})\psi(c_{i_sj}-c_{i_rj})\Big)\Big].$$

Вводя обозначение

$$f_{uv}(p,q)=c_q^0+\sum_{j\in J}(1-\psi(d_{vj}-d_{uj}))\chi(d_{uj}-d_{qj})(1-\psi(c_{uj}-c_{qj}))$$

$$\times\Big(c_{qj}-c_{pj}+(c_{pj}-c_{uj})\psi(c_{uj}-c_{pj})\Big)$$

$$+\sum_{j\in J}(1-\psi(d_{uj}-d_{vj}))\chi(d_{vj}-d_{pj})(1-\psi(c_{vj}-c_{pj}))$$

$$\times\Big(c_{pj}-c_{qj}+(c_{qj}-c_{vj})\psi(c_{vj}-c_{qj})\Big),$$

$$u\leqslant p<q\leqslant v,\quad 1\leqslant u<v-1\leqslant n-1,$$

и полагая $u=i_1$, $v=i_s$, функцию $F_1(x)$ можно переписать в виде

$$F_1(x)=c_u^0+\sum_{j\in J}\Big(\min\{c_{uj},c_{vj}\}\chi(d_{uj}-d_{vj})$$

$$+c_{uj}(1-\psi(d_{vj}-d_{uj}))+c_{vj}(1-\psi(d_{uj}-d_{vj}))\Big)+\sum_{r=2}^{s}f_{uv}(i_{r-1},i_r).$$

Таким образом, расчет величины $\min\limits_{x\in X_2}F_1(x)$ сводится к серии задач «о ближайшем соседе»:

$$\min_{(i_r),s}\sum_{r=2}^{s}f_{uv}(i_{r-1},i_r),\quad u=i_1<i_2<\ldots i_{s-1}<i_s=v,\ 2<s\leqslant v-u+1. \tag{13}$$

При фиксированных u и v задача (13) решается методом динамического программирования за $O((v-u)^2)$ операций при объеме памяти $O(v-u)$ [2]. Расчет и хранение значений функции $f_{uv}(p,q)$ требуют $O((v-u)^2m)$ операций и $O((v-u)^2)$ ячеек памяти. Следовательно, в условиях теоремы кооперативная задача может быть решена за время $O(n^4m)$ при объеме памяти $O(n^2)$. Теорема 3 доказана.

Вектор $c=(c_1,\ldots,c_n)$ назовем *квазивыпуклым относительно вектора* $d=(d_1,\ldots,d_n)$, если для любого множества $\{i_1,\ldots,i_s\}\subseteq I$ такого, что $i_1<\ldots<i_s$ и $d_{i_1}=\ldots=d_{i_s}$, вектор $(c_{i_1},\ldots,c_{i_s})$ является квазивыпуклым.

Матрицу C назовем *квазивыпуклой относительно матрицы* D, если j-й вектор-столбец матрицы C является квазивыпуклым относительно j-го вектор-столбца матрицы D для любого $j\in J$.

Теорема 4. *Кооперативная задача с квазивогнутой матрицей D и матрицей C, квазивыпуклой относительно D, является* NP*-трудной.*

Доказательство. Покажем, что NP-трудная задача минимизации на множестве X полинома (10) сводится к кооперативной задаче с требуемыми свойствами. Выражение (10) перепишем в следующем виде:

$$R(x) = \sum_{i\in I}(a_i + n - i)x_i + \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{k=r+1}^{n}(1 - x_r)(1 + b_{rk}(1 - x_k)) - n(n-1)/2.$$

Каждой паре (r,k) поставим в соответствие номер j и вектор-столбцы (c_{ij}), (d_{ij}), $i \in I$, полагая

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = r,\\ 1, & \text{если } i = k,\\ b_{rk}+1, & \text{если } i \in I\setminus\{r,k\}, \end{cases} \qquad d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in [r+1, k-1],\\ 0, & \text{если } i \in I\setminus[r+1,k-1]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что матрицы $C = (c_{ij})$ и $D = (d_{ij})$ удовлетворяют указанным в формулировке теоремы свойствам и

$$\min_{i\in I_j(x)} c_{ij} = (1 - x_r)(1 + b_{rk}(1 - x_k)).$$

Полагая $c_i^0 = a_i + n - i$, $i \in I$, и обозначая через J совокупность номеров j, получаем

$$R(x) = \sum_{i\in I} c_i^0 x_i + \sum_{j\in J}\min_{i\in I_j(x)} c_{ij} - n(n-1)/2 = F_1(x) - n(n-1)/2.$$

Таким образом, на множестве X значения целевой функции кооперативной задачи и полинома (10) отличаются на константу. Искомое сведение получено. Теорема 4 доказана.

3.2. Антикооперативная задача

При доказательстве основного утверждения этого пункта — теоремы 5 — используются следующие две леммы.

Рассмотрим вектор $d = (d_1, \dots, d_n)$ и множество $S = \{i \in I \mid d_i < a\}$, где a — произвольное число.

Лемма 4. *Если вектор d является квазивогнутым, то $S = [1, r_1] \cup [r_2, n]$, где $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant n+1$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что множество $S' = I\setminus S = \{i \in I \mid d_i \geqslant a\}$, если оно не пусто, представляет собой целочисленный отрезок. Пусть $i < k < l$ и $i, l \in S'$. Из условия квазивогнутости вектора d получаем $d_k \geqslant \min\{d_i, d_l\} \geqslant a$, т. е. $k \in S'$. Следовательно, множество S' является целочисленным отрезком. Лемма 4 доказана.

Будем говорить, что перестановка $(i_1, \dots, i_n)$ элементов множества I *порождена* векторами $c = (c_1, \dots, c_n)$ и $d = (d_1, \dots, d_n)$, если при $r < s$ выполняются либо соотношения $d_{i_r} = d_{i_s}$ и $c_{i_r} \geqslant c_{i_s}$, либо неравенство $d_{i_r} < d_{i_s}$.

Пусть $x \in X$ и $I_d = \left\{k \in I(x) \mid d_k = \min\limits_{i \in I(x)} d_i\right\}$.

Лемма 5. *Если перестановка $(i_1, \dots, i_n)$ порождена векторами c и d, то*

$$\max_{i \in I_d} c_i = c_{i_1} + \sum_{l=1}^{n-1} (c_{i_{l+1}} - c_{i_l}) \prod_{k=1}^{l} (1 - x_{i_k}).$$

Доказательство. Обозначим через T правую часть равенства. Пусть $x_{i_s} = 1$ и $x_{i_r} = 0$ при каждом $r < s$. Тогда

$$T = c_{i_1} + \sum_{l=1}^{s-1} (c_{i_{l+1}} - c_{i_l}) = c_{i_s} = \max_{i \in I_d} c_i.$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 5. *Если матрица D является квазивогнутой, то антикооперативная задача может быть решена за время $O(n^5 m^3)$.*

Доказательство. В силу леммы 5 антикооперативная задача сводится к задаче минимизации на множестве X полинома

$$R(x) = \sum_{i \in I} c_i^0 x_i + \sum_{j \in J} \sum_{l=1}^{n-1} \delta_{lj} \prod_{k=1}^{l} (1 - x_{i_k^j}),$$

где $\delta_{lj} = c_{i_{l+1}^j j} - c_{i_l^j j}$ и перестановка $(i_1^j, \dots, i_n^j)$ порождена j-ми столбцами матриц C и D. Если $\delta_{lj} > 0$, то $d_{i_{l+1}^j j} > d_{i_l^j j}$. Из леммы 4 следует, что $\{i_1^j, \dots, i_l^j\} = [1, r_1] \cup [r_2, n]$ при некоторых $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant n+1$. Приводя подобные члены, получаем следующее представление:

$$R(x) = g + \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{q \in Q} b_q \prod_{i \in \alpha_q} (1 - x_i) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i+1}^{n+1} a_{ik} \prod_{l=1}^{i} (1 - x_l) \prod_{l=k}^{n} (1 - x_l), \tag{14}$$

где $b_q \leqslant 0$, $\alpha_q \subseteq I$ и $a_{ik} \geqslant 0$.

Пусть $1 \leqslant u \leqslant v \leqslant n$ и $X(u, v) = \{x \in X \mid x_u = x_v = 1,\ x_i = 0,\ i \in [1, u-1] \cup [v+1, n]\}$. Задача минимизации на множестве X полинома (14) сводится к серии задач минимизации этого полинома на множествах $X(u, v)$, поскольку $X = \bigcup\limits_{u,v} X(u, v)$. На множестве $X(u, v)$ двойная сумма в (14) обращается в константу, и в полиноме $R(x)$ остаются нелинейные члены только с отрицательными коэффициентами. Как показано в [1],

минимум полинома такого вида можно найти за время $O((|Q|+n)^3)$. Поскольку $|Q| \leqslant nm$ и число множеств $X(u,v)$ не более n^2, исходная задача может быть решена за время $O(n^5m^3)$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации для некоторых классов полиномов от булевых переменных // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 5–17. (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
2. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
3. **Горбачевская Л. Е.** Алгоритмы и сложность решения двухуровневых задач стандартизации с коррекцией дохода // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 2. С. 20–33.
4. **Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В.** Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 3–11.
5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. **Трубин В. А.** Универсальность одного класса квадратичных целочисленных задач // Кибернетика. 1977. № 2. С. 147.
7. **Ben-Ayed O.** Bilevel linear programming // Comput. Oper. Res. 1993. V. 20, N 5. P. 485–501.
8. **Stackelberg H. V.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.
9. **Vicente L. N., Calamai P. H.** Bilevel and multilevel programming: a bibliography review // J. Global Optim. 1994. V. 5, N 3. P. 291–306.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
22 ноября 1999 г.,
переработанный вариант —
17 марта 2000 г.