ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2000. Серия 2. Том 7, № 1, 61–64

УДК 519.854.2

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ ВЕРШИН ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ГРАФОВ*)

Г. Г. Забудский

Изучается задача о размещении вершин ориентированного графа в целые точки числовой прямой, при котором сохраняется частичный порядок, задаваемый графом, и минимизируется взвешенная сумма длин всех дуг. Показано, что для параллельно-последовательных графов задача решается за полиномиальное время.

В приложениях встречаются задачи о наилучшем размещении объектов с учетом связей между ними. Подобная ситуация возникает, например, при проектировании расположения технологического оборудования нефтехимического предприятия. Технологическая схема производства задает порядок обработки сырья. Требуется разместить единицы оборудования таким образом, чтобы суммарная стоимость трубопроводных связей была минимальна.

Математической моделью в тех случаях, когда объекты следует расположить вдоль линии, является задача о размещении вершин ориентированного графа в целые точки числовой прямой, при котором сохраняется частичный порядок, задаваемый графом, и минимизируется взвешенная сумма длин всех дуг. Для произвольного графа эта задача NP-трудна [1]. Полиномиальные алгоритмы решения задачи построены в случаях, когда исходный граф является корневым деревом [3, 4] или простым двухполюсным графом [2].

В данной статье рассматривается более общий класс — класс параллельно-последовательных графов. Показано, что с помощью алгоритма из [2] задача решается за полиномиальное время.

1. Постановка задачи

Через $G = (V, E)$ обозначим ориентированный граф с множеством вершин $V = \{1, \ldots, n\}$ и множеством дуг E. Пусть каждой дуге

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00771).

$(i,j) \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число c_{ij} — удельная стоимость связи между вершинами i и j. Вершины графа G размещаются в точки $1,\ldots,n$ числовой прямой, называемые *позициями*. Через $\pi(i)$ обозначим позицию, в которую помещается вершина $i \in V$. Перестановку $\pi = (\pi(1),\ldots,\pi(n))$, описывающую размещение вершин, назовем *допустимой*, если $\pi(i) < \pi(j)$ для каждой дуги $(i,j) \in E$.

Задача линейного упорядочения вершин графа G заключается в нахождении минимума суммарной стоимости связей, т. е. минимума величины $\sum\limits_{(i,j)\in E} c_{ij}(\pi(j) - \pi(i))$, среди всех допустимых перестановок π.

Очевидно, что сформулированная задача эквивалентна задаче размещения вершин графа на произвольном наборе n точек числовой прямой, образующих арифметическую прогрессию.

Будем предполагать, что граф G не содержит ориентированных циклов (в противном случае допустимых перестановок нет) и является связным (в противном случае исходная задача распадается на отдельные задачи для каждой компоненты связности).

2. Согласованные размещения и редукция задачи

Доказывается теорема, которая позволяет упрощать задачу. Приведем несколько необходимых определений.

Рассмотрим подграф $G_1 = (V_1, E_1)$ исходного графа $G = (V, E)$. Через $\hat{\pi}$ обозначим допустимое размещение графа G_1 и через π^* — оптимальное размещение графа G. Перестановки $\hat{\pi}$ и π^* назовем *согласованными*, если для любых вершин $i, j \in V_1$ из условия $\hat{\pi}(i) < \hat{\pi}(j)$ следует, что $\pi^*(i) < \pi^*(j)$.

Пусть известно размещение $\hat{\pi}$ графа G_1, согласованное с некоторым оптимальным размещением графа G. Вершины графа G_1 занумеруем числами $1,\ldots,m$ так, что $\hat{\pi}(1) < \ldots < \hat{\pi}(m)$. Через G_2 обозначим граф, получаемый из G заменой подграфа G_1 на цепь $\{1,\ldots,m\}$. Каждой дуге $(i, i+1)$ этой цепи поставим в соответствие удельную стоимость

$$d_{i,i+1} = \sum_{(j,k)} c_{jk},$$

где суммирование ведется по всем дугам $(j,k) \in E_1$ таким, что $j \leqslant i \leqslant k$. Описанную операцию назовем *редукцией* задачи линейного упорядочения. Нетрудно видеть, что любое оптимальное размещение графа G_2 в редуцированной задаче является оптимальным и в исходной задаче линейного упорядочения графа G.

Вершину $v \in V_1$ назовем *точкой сочленения* в графах G_1 и G, если она смежна с вершинами из $V \setminus V_1$.

Через $D(s,t)$ обозначим ориентированный граф, который состоит из двух или более цепей, идущих из вершины s в вершину t и не имеющих других общих вершин кроме s и t.

Теорема. *Пусть граф G содержит такой подграф $D(s,t)$, в котором вершины s, t и только они являются точками сочленения в $D(s,t)$ и G. Тогда любое оптимальное размещение графа $D(s,t)$ согласовано с некоторым оптимальным размещением графа G.*

Доказательство. Пусть $D(s,t) = (V_1, E_1)$. В графе $G = (V, E)$ выделим подграф $H = (V_3, E_3)$ со следующими множествами вершин и дуг:

$$V_3 = (V \setminus V_1) \cup \{s,t\}, \quad E_3 = E \setminus E_1.$$

Пусть π^* — оптимальное размещение графа G. По перестановке π^* единственным образом строится размещение $\hat{\pi}$ вершин графа H, согласованное с π^*. Проведем редукцию задачи, заменяя граф H цепью H' и переходя от графа G к графу G_2. Вершины цепи H' занумеруем числами $1, \ldots, m$ в порядке ее прохождения. Пусть вершины s и t получают номера p и q. Через $D'(s,t)$ обозначим граф, состоящий из графа $D(s,t)$ и цепи $\{s, p+1, \ldots, q-1, t\}$.

Пусть $\hat{\rho}$ — оптимальное размещение графа $D(s,t)$. Как показано в [2, теорема 4], найдется оптимальное размещение ρ^* графа $D'(s,t)$, согласованное с $\hat{\rho}$. Можно считать, что вершины графа $D'(s,t)$ размещаются в последовательные позиции p, $p+1$, $p+2$ и т. д. Рассмотрим следующую перестановку σ вершин графа G_2: $\sigma(i) = \pi^*(i)$, если $i \in [1, p-1] \cup [q+1, m]$, и $\sigma(i) = \rho^*(i)$, если $i \in [p,q] \cup V_1$. Размещение σ согласовано с $\hat{\rho}$, оптимально в редуцированной задаче и, следовательно, оптимально в исходной задаче. Теорема доказана.

3. Параллельно-последовательные графы

Класс параллельно-последовательных графов определим индуктивно следующим образом:

а) ориентированная цепь является параллельно-последовательным графом;

б) граф, который получается из параллельно-последовательного графа путем замены любой дуги (s,t) на граф $D(s,t)$, является параллельно-последовательным.

Пусть G — параллельно-последовательный граф. Доказанная выше теорема позволяет предложить следующий алгоритм размещения его вершин.

Шаг 1. Если граф G является цепью, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае в графе G выделяется подграф $D(s,t)$.

Шаг 2. Алгоритмом из [2] находится оптимальное размещение вершин графа $D(s,t)$.

Шаг 3. Производится редукция задачи. Граф редуцированной задачи обозначается также через G, и осуществляется переход к шагу 1.

Конец

В результате работы алгоритма строится цепь, соответствующая оптимальному линейному упорядочению вершин исходного графа G. Оценим время работы алгоритма, пренебрегая длительностью выполнения шагов 1 и 3. Как показано в [2], время работы алгоритма линейного упорядочения графа $D(s,t)$ с m вершинами не превосходит $O(m \ln m)$ и, следовательно, не более $O(n \ln n)$. Число обращений к шагу 2 не превосходит n. Поэтому общее время работы алгоритма не превосходит $O(n^2 \ln n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. **Забудский Г. Г.** Алгоритм решения одной задачи оптимального линейного упорядочения // Изв. вузов. Математика. 1997. № 12. С. 73–78.
3. **Adolphson D., Hu T. C.** Optimal linear ordering // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 25, N 3. P. 403–423.
4. **Picard J. C., Queyranne M.** On the one-dimensional space allocation problem // Oper. Res. 1981. V. 29, N 2. P. 371–391.

Адрес автора:

Омский филиал
Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13,
644099 Омск, Россия.
E-mail:
zabudsky@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
18 июня 1998 г.,
переработанный вариант —
7 февраля 2000 г.