ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2000. Серия 2. Том 7, № 1, 83–112

УДК 519.176

ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ СО СВОЙСТВОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕТРИКИ. I *)

Т. И. Федоряева

Получена характеризация двусвязных внешнепланарных графов, удовлетворяющих свойству продолжения метрики.

Метрические аспекты занимают особое место в теории графов и в общей теории дискретных метрических пространств. Это объясняется тем, что, с одной стороны, многие метрические свойства и характеристики служат мощным инструментом исследований уже известных дискретных задач, а с другой — они естественным образом возникают в различных разделах дискретной математики: теории кодирования, математической теории транспортных сетей, связи, теории выпуклого анализа и т. д., приводя к постановке и решению ряда интересных проблем. Таковы, например, вопросы о структуре центра и медианы графа, изометрических вложениях, реализации произвольных метрик графами, метрической выпуклости, расположении кратчайших цепей в графе.

А. А. Евдокимовым в [1] определено *свойство продолжения метрики* (СПМ) для произвольного дискретного метрического пространства (X, ρ_X), в частности, для связных графов конечного диаметра. Пространство (X, ρ_X) диаметра $d(X)$ удовлетворяет СПМ, если $S^1_X(x) \not\subseteq S^i_X(y)$ или $S^1_X(y) \not\subseteq S^i_X(x)$ для любых точек $x, y \in X$, где $i = \rho_X(x, y) < d(X)$ и $S^r_X(z)$ — шар радиуса r с центром в точке z.

В статье рассматриваются конечные обыкновенные графы с обычным расстоянием между вершинами. В дальнейшем будем пользоваться следующим эквивалентным [1] определением СПМ для графов.

Определение. Две вершины графа G удовлетворяют СПМ, если они принадлежат некоторой диаметральной цепи графа G. Граф удовлетворяет СПМ, если любые две его вершины удовлетворяют СПМ.

В [3, 7] показано, что задачи описания классов связных, связности n и n-связных графов с СПМ эквивалентны в том смысле, что из описания

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00531).

любого такого класса следует описание каждого оставшегося, и получена характеризация естественных классов графов связности 1. В настоящей работе рассматриваются естественные представители графов связности 2 — двусвязные внешнепланарные графы и приводится характеризация таких графов, удовлетворяющих СПМ. Характеризация дана в терминах явного представления в виде таблицы (приведенной в приложении) некоторого класса графов, называемых базисными, и трех операций склейки, с помощью которых из базисных графов строятся все остальные внешнепланарные графы, удовлетворяющие СПМ.

S 1. Предварительные сведения

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1.1. *Двусвязный внешнепланарный граф G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда либо G — базисный граф, либо G получается операциями склейки из базисных графов одинакового четного диаметра, равного $d(G)$.*

Доказано, что для получения всех двусвязных внешнепланарных графов с СПМ нельзя отказаться ни от одной из операций склейки, т. е. каждая из них независима. Кроме того, каждая из операций склейки, применяемая к графам четного диаметра, сохраняет их диаметр и, следовательно, все двусвязные внешнепланарные графы с СПМ нечетного диаметра содержатся среди базисных. Отметим также, что базисные графы устроены следующим образом: каждый из них (за исключением цикла и графов на рис. 1) имеет внутреннюю n-грань, $n \leqslant 12$, к некоторым ребрам которой присоединены графы специального вида, названные лестницами и обобщенными лестницами (определения см. после замечания 1.1).

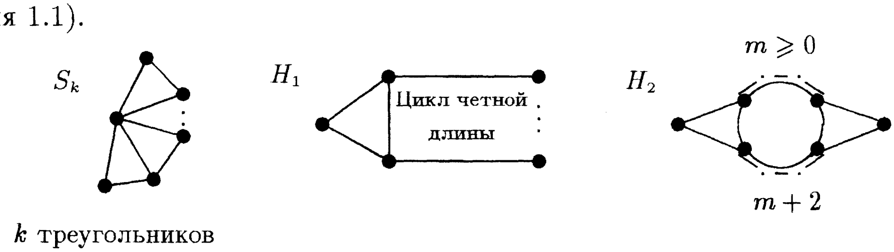

Рис. 1

Явное описание базисных графов с точностью до изоморфизма дает следующая

Теорема 1.2. 1. *Каждый базисный граф удовлетворяет* СПМ.

2. *Граф G является базисным тогда и только тогда, когда либо G — простой цикл, граф S_k, $k \geqslant 6$, H_1 или H_2 (рис. 1), либо G — граф из табл. 1.*

3. *Следующие базисные графы попарно неизоморфны: простой цикл, графы* $S_k, k \geqslant 6$, H_1, H_2 *(рис.* 1), *графы из табл.* 1 *с различными номерами.*

Самостоятельный интерес представляет следствие из теоремы 1.1.

Следствие. *Пусть G — двусвязный внешнепланарный граф без треугольников. Тогда G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда G — простой цикл длины не менее* 4 *или G — один из графов* 11 *видов, изображенных на рис.* 2.

Материал работы организован следующим образом. Она состоит из двух частей. В первой части, состоящей из S 1–5, вводится класс элементарных графов, рассмотрение которого объясняется тем, что описание базисных графов сводится к описанию элементарных графов. В S 1 приводятся основные определения и обозначения, в частности, даны понятия лепестка, лестницы, развилки, разделяющего ребра, элементарного графа, графа $\ll n, m \gg$ из табл. 1. В S 2 доказывается лемма о разбиении класса внешнепланарных графов, удовлетворяющих СПМ, на следующие три класса:

— элементарные графы,

— графы, имеющие так называемое разделяющее ребро,

— графы S_k, $k \geqslant 6$ (см. рис. 1).

В S 3 исследуются свойства лестниц в графах, удовлетворяющих СПМ. В S 4 для элементарных графов в случаях, обусловленных специальным расположением лестниц, а также соотношением между диаметром исходного графа и диаметром его внутренней грани, получена полная характеризация таких графов с СПМ. Для остальных случаев в лемме 4.5 указываются виды графов (см. рис. 6), явное описание которых дается в S 5. Таким образом, в первой части завершается описание элементарных графов, приведенное в теореме 1.3.

Теорема 1.3. *Граф G является элементарным тогда и только тогда, когда G — простой цикл, граф H_1, H_2 (см. рис.* 1) *или граф $< n, m >$ из табл.* 1 *для некоторых n, m.*

Будет также показано, что характеризация элементарных графов в теореме 1.3 получена с точностью до изоморфизма.

Вторая часть включает в себя S 6–9 и завершает характеризацию двусвязных внешнепланарных графов с СПМ. В S 6 устанавливаются свойства графов, имеющих разделяющее ребро и удовлетворяющих СПМ. В частности, в лемме 6.1 о видах лепестков выясняются виды развилок, а в лемме 6.3 классифицируются разделяющие ребра. В S 7 сначала приводится абстрактное определение базисных графов, а затем с использованием теоремы 1.3 дается их явное описание в табл. 1, т. е. доказывается

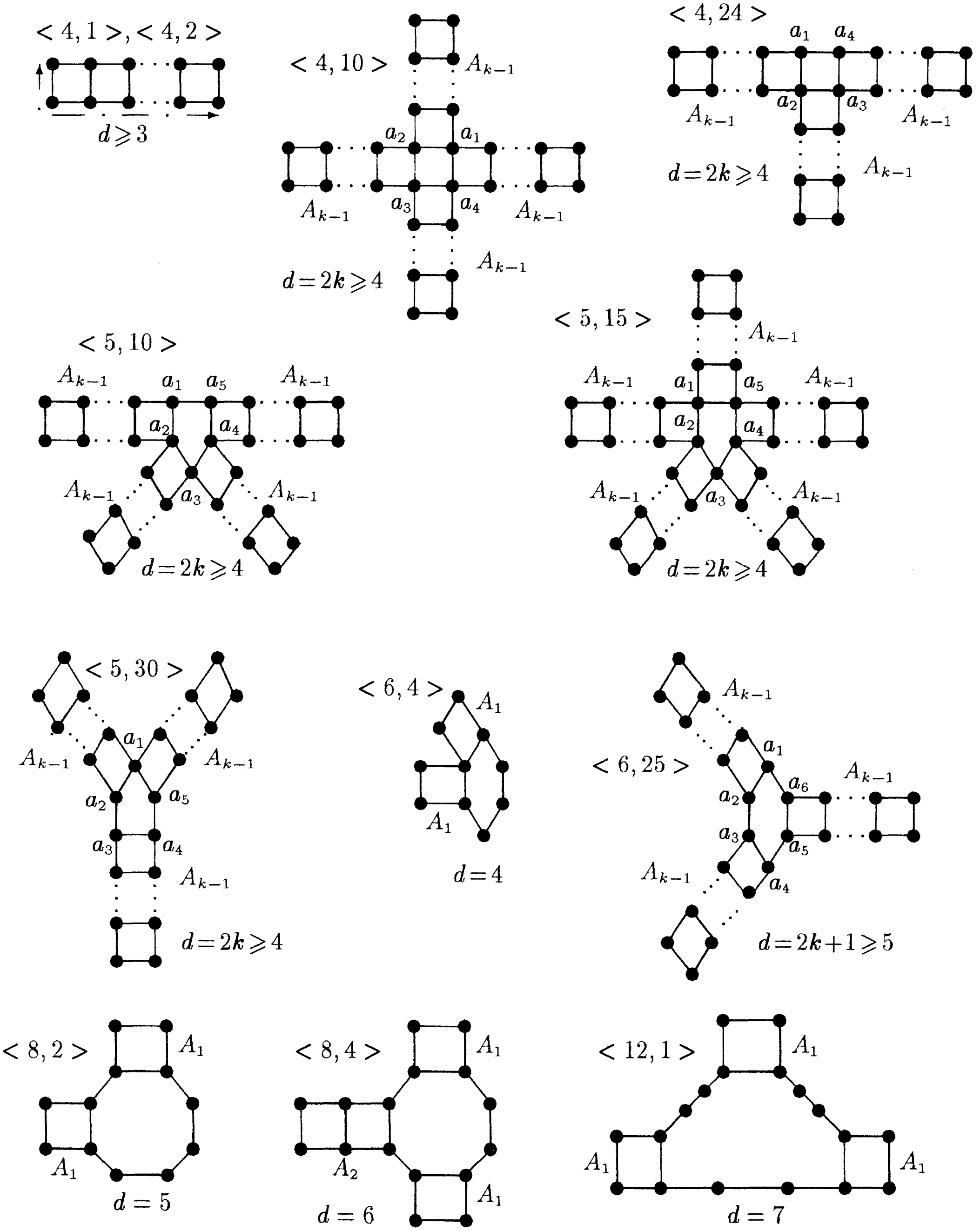

Рис. 2

теорема 1.2. Далее в S 8 для графов определяются операции склейки и показывается, что каждая из них сохраняет СПМ при «сборке» графов, а также приводятся некоторые дополнительные условия, обеспечивающие «разборку» графа по этим операциям, при которой также сохраняется СПМ. Показывается независимость каждой операции склейки. В S 9 проводится доказательство основной теоремы 1.1: достаточность следует из теоремы 1.2 и сохранения СПМ операциями склейки, а необходимость доказывается от противного. Предполагая, что граф G — контрпример с наименьшим числом разделяющих ребер, на основе полученных свойств графа G приходим к противоречию. В заключение доказывается следствие 1.1. Ряд технических утверждений данной работы приводится без доказательств, они подробно доказаны в [4–6].

Приведем теперь основные определения и обозначения, используемые в статье. Будем следовать общепринятым обозначениям теории графов из [2, 8]. Для графа G обозначим через

$V(G)$ — множество вершин,
$E(G)$ — множество ребер,
$\rho_G(x,y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y,
$d(G)$ — диаметр,
$e_G(x)$ — эксцентриситет вершины x,
$\deg x$ — степень вершины x,
$\widetilde{xy}$ — ребро с концами x, y,
$\vec{xy}$ — ориентированное ребро с началом x и концом y.

Будем использовать сокращения $\rho(x,y)$ и d, если понятно, о каком графе идет речь. Как обычно, $G \cup H$ обозначает объединение графов G и H, $G \setminus x$ — граф, получающийся из G удалением вершины $x \in V(G)$. Цепь в графе G, расстояние между концами которой равно ее длине, называется *кратчайшей*. Если это расстояние равно диаметру $d(G)$, то цепь называется *диаметральной*. Кратчайшая цепь называется *тупиковой*, если она не является подцепью никакой кратчайшей цепи большей длины. Кратчайшую цепь P с концами u_1, u_n такую, что

$$u_2, \dots, u_{n-1} \in V(P), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_G(u_i, u_{i+1}) = \rho_G(u_1, u_n)$$

(причем не обязательно $u_i \neq u_{i+1}$), будем обозначать через $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Подграф G графа H называется *изометрическим*, если для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ выполняется равенство $\rho_G(x,y) = \rho_H(x,y)$.

Для произвольной упорядоченной пары различных вершин $x, y \in V(L)$ цикла L через $r_L(x,y)$ будем обозначать такую вершину цикла L, что $\rho_L(x, r_L(x,y)) = \rho_L(x,y) + \rho_L(y, r_L(x,y)) = d(L)$.

Условимся теперь относительно изображений на рисунках: кратчайшую цепь будем изображать штрихпунктирной линией $\cdot - \cdot - \cdot - \cdot$, а простую цепь длины k — линией $\leftarrow \cdot - \cdot \overset{k}{-} \cdot - \cdot \rightarrow$.

Известна характеризация двусвязных плоских графов [2]: плоский граф двусвязен тогда и только тогда, когда граница всякой его грани является простым циклом. Далее всюду под графом будем понимать двусвязный внешнепланарный граф, для которого зафиксирована некоторая плоская укладка, причем все его вершины принадлежат границе внешней грани. В дальнейшем под гранью понимается простой цикл, являющийся границей этой грани, и, если не оговорено особо, эта грань подразумевается внутренней, n-вершинная грань называется n-гранью. Для краткости вместо $x \in V(G)$ в дальнейшем будем писать $x \in G$.

Индукцией по числу внутренних граней доказывается следующая

Лемма 1.1. *Граф G является двусвязным внешнепланарным тогда и только тогда, когда либо G — простой цикл, либо G получается из простого цикла последовательным применением следующей операции: добавление новой простой цепи, соединяющей концы ребра, лежащего на внешней грани, с сохранением свойства, что все вершины принадлежат внешней грани.*

Следствие 1.2. *Всякая грань двусвязного внешнепланарного графа является его изометрическим подграфом.*

Непосредственно из СПМ и следствия 1.2 вытекает

Следствие 1.3. *Пусть граф G удовлетворяет* СПМ, *вершины x, y принадлежат грани L, $\deg x = \deg y = 2$ и $\rho_L(x,y) = d(L)$. Тогда $d(G) = d(L)$.*

Отметим следующее очевидное свойство внешнепланарного графа.

Лемма 1.2. *Для ребра $\widetilde{ab}$ графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Множество всех вершин графа G можно представить в виде объединения двух подмножеств V_1, V_2 таких, что $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$, $V_1 \neq \{a, b\}$, $V_2 \neq \{a, b\}$, и всякая простая цепь графа G, соединяющая вершину из V_1 с вершиной из V_2, содержит a или b.*

2. *В любой плоской укладке графа G, при которой все его вершины принадлежат внешней грани, ребро $\widetilde{ab}$ не принадлежит внешней грани.*

При выполнении любого из условий 1 или 2 леммы 1.2 ребро $\widetilde{ab}$ графа G будем называть *внутренним*, в противном случае — *внешним*.

Замечание 1.1. Множества вершин V_1, V_2 в лемме 1.2 определены однозначно, а граф G есть объединение двух порожденных подграфов G_1 и G_2 с множеством вершин V_1, V_2 соответственно.

Через G_{ab} будем обозначать граф G_i, $i \in \{1, 2\}$, с выделенной упорядоченной парой вершин (a, b), остающийся справа при переходе от вершины a к вершине b.

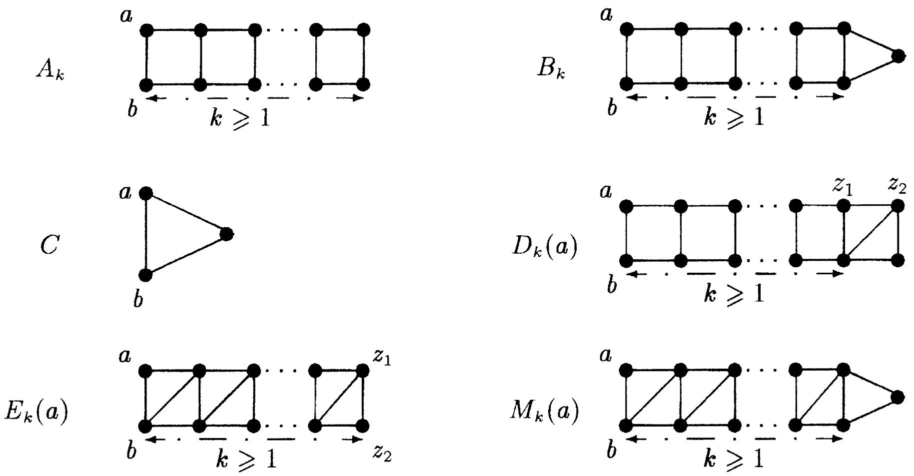

Рис. 3

Концы a, b внешнего ребра $\widetilde{ab}$ будем называть *внешнесмежными вершинами.* Через $w^+(x)$ $(w^-(x))$ обозначим вершину, следующую за x при обходе по внешней грани против часовой стрелки (по часовой стрелке). Очевидно, что вершины $w^\tau(x)$ и x — внешнесмежные, где $\tau \in \{+, -\}$.

Граф P с выделенной упорядоченной парой вершин (a, b), являющийся одним из графов A_k, B_k, C, $D_k(a)$, $E_k(a)$, $M_k(a)$, $k \geqslant 1$ (рис. 3), будем называть *лестницей.* В дальнейшем будем говорить, что P — лестница A, B, $D(a)$, $E(a)$ или $M(a)$ (символически $P \in \{A, B, D(a), E(a), M(a)\}$), опуская индекс k в обозначении лестницы, подразумевая под этим, что P является лестницей при некотором значении индекса k.

Пусть L — грань графа G и $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = a_1$ — все ее вершины, последовательно занумерованные против часовой стрелки. *Лепестком грани* L назовем граф $G_{a_i a_{i+1}}$ с выделенной упорядоченной парой вершин (a_i, a_{i+1}), $1 \leqslant i \leqslant n$, при условии, что $\widetilde{a_i a}_{i+1}$ — внутреннее ребро. *Лестницей* (*развилкой*) *грани* L будем называть лепесток грани L, являющийся (не являющийся) лестницей. *Лестница* (*развилка*) *графа* G — это лестница (развилка) некоторой его грани.

Пусть G_{ab} — лепесток графа G и $x \in \{a, b\}$. Будем использовать переменную $f_{G_{ab}}(x)$ для обозначения такой произвольной вершины из $G_{ab} \setminus \{a, b\}$, что $\rho_{G_{ab}}(x, f_{G_{ab}}(x)) = e_{G_{ab}}(x)$. Когда ясно, о каком G_{ab} идет речь, для краткости вместо $e_{G_{ab}}(x)$ и $f_{G_{ab}}(x)$ будем писать соответственно $e(x)$ и $f(x)$. Когда одновременно будут рассматриваться лепестки G_{ab}, G_{bc} графа G, то вместо $e_{G_{ab}}(b)$ и $e_{G_{bc}}(b)$ (вместо $f_{G_{ab}}(b)$ и $f_{G_{bc}}(b)$) будем писать соответственно $e(b, a)$ и $e(b, c)$ (соответственно $f(b, a)$ и $f(b, c)$).

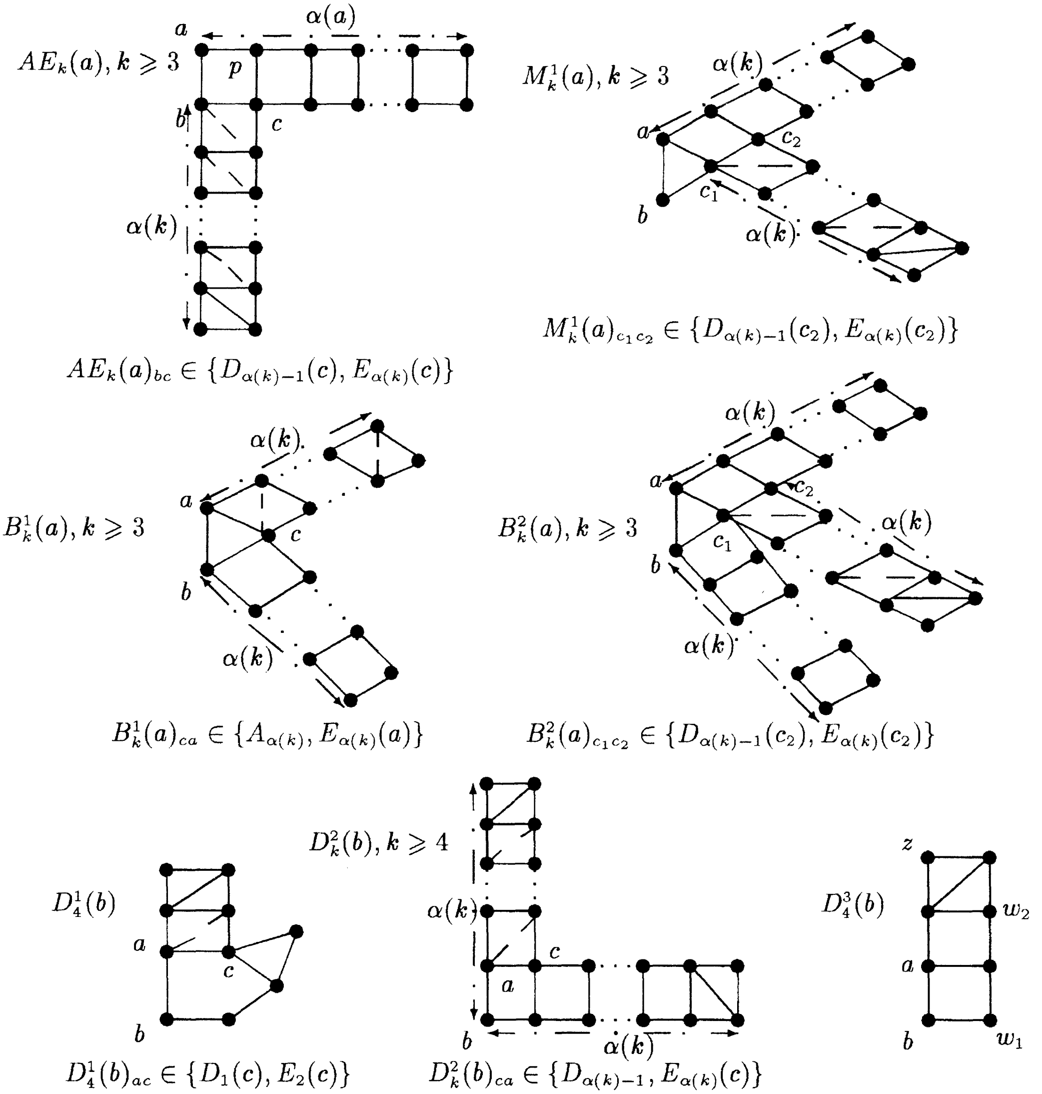

Рис. 4

Определение 1.1. Граф G называется элементарным, если G удовлетворяет СПМ и в G существует грань, все лепестки которой являются лестницами. Эта грань называется основанием графа G.

Ребро $\widetilde{ab}$ графа G назовем *разделяющим*, если $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро и каждый из графов G_{ab}, G_{ba} является развилкой, причем G отличен от графа S_k (см. рис. 1).

Для произвольного числа $k \geqslant 1$ определим два числа $\alpha(k) = \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$, $\beta(k) = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ и для графа G через $\alpha(G)$ и $\beta(G)$ обозначим $\alpha(d(G))$ и $\beta(d(G))$ соответственно.

Граф P с выделенной упорядоченной парой вершин (a,b), являющийся одним из графов $AE_k(a)$, $B_k^1(a)$, $B_k^2(a)$, $M_k^1(a)$, $k \geqslant 3$, $D_4^1(b)$, $D_m^2(b)$, $m \geqslant 4$, $D_4^3(b)$ (рис. 4), будем называть *обобщенной лестницей*. В дальнейшем будем использовать понятие *обобщенная лестница грани* (*графа*), определяемое аналогичным образом как для лестницы.

Граф из табл. 1 (см. приложение) — это произвольный граф, изоморфный любому графу G, определенному следующим образом. Граф G имеет n-грань, все вершины $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1$ которой занумерованы последовательно против часовой стрелки и каждый из лепестков $G_{a_i a_{i+1}}$ является одной из лестниц или обобщенных лестниц, указанных в клетке табл. 1, образованной пересечением столбца с названием $G_{i\, i+1}$ и строки с фиксированным номером m для выбранного значения n. Для такого графа G будем говорить, что $\ll n, m \gg$ его *номер в табл.* 1. Отметим, что в столбце с названием $d(G)$ приводится диаметр графа. *Граф* $< n, m >$ — это граф из табл. 1 с номером $\ll n, m \gg$, в котором все лепестки являются лестницами.

S 2. Разбиение на классы

Лемма 2.1. *Пусть граф G удовлетворяет СПМ, G_{ab} — лепесток n-грани L, $w^-(a) \in L$ и есть ребро $\widetilde{bw}^+(a)$. Тогда*

(a) *при $n \geqslant 4$ граф G_{ab} является треугольником или квадратом с диагональю;*

(b) *при $n = 3$ один из графов G_{ab}, G_{ba} является треугольником или G является графом S_k, изображенным на рис.* 1;

(c) *если $d \neq d(L)$, то* $\deg r_L(a,b) \geqslant 3$.

Доказательство. (a) Пусть $n \geqslant 4$. Тогда в силу СПМ для вершин $a, r_L(a,b)$ и изометричности n-грани L в G найдется диаметральная цепь $(a, b, r_L(a,b), c) \subseteq G_{ba}$. Следовательно, $\rho(c,b) = d - 1$ и $\rho(x,b) \leqslant 1$ для любой вершины $x \in G_{ab}$. Достаточно показать, что в $G_{ab} \setminus \{a, b, w^+(a)\}$ имеется не более одной вершины. Предположим противное, т. е. существуют две вершины $u, v \in G_{ab} \setminus \{a, b, w^+(a)\}$. Тогда $1 \leqslant \rho(u,v) \leqslant 2$, а так как вершины u, v принадлежат некоторой диаметральной цепи, то $d(G) \leqslant 2$. С другой стороны, $\rho(v, w^-(a)) \geqslant 3$. Противоречие.

(b) Пусть $n = 3$ и G_{ab}, G_{ba} не являются треугольниками. В этом случае $w^-(b) \in G_{ab} \setminus \{a, w^+(a)\}$. Тогда, как и в случае (a), рассматривая в качестве $r_L(a,b)$ вершину $w^-(b)$, получаем $\rho(x,b) \leqslant 1$ для любой вершины $x \in G_{ba}$. Аналогично $\rho(x,b) \leqslant 1$ для любой вершины $x \in G_{ab}$. Поэтому G является графом S_k, изображенным на рис. 1.

(c) При $n = 3$ имеем $r_L(a,b) = b$, а ребро $\widetilde{ab}$ — внутреннее и, следовательно, $\deg r_L(a,b) \geqslant 3$. При $n \geqslant 4$ выше показано, что

$d = \rho(a, r_L(a,b)) + \rho(r_L(a,b), c)$. Поэтому если $d \neq d(L)$, то $\deg r_L(a,b) \geqslant 3$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть граф G удовлетворяет СПМ, ребро $\widetilde{ab}$ является внутренним, а граф G_{ab} является n-вершинным простым циклом L. Тогда либо $n \leqslant 4$, либо G есть граф H_1, изображенный на рис.* 1.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 5$. Тогда найдутся вершины $x, y \in L \setminus \{a, b\}$ такие, что $\rho(x,y) = d(L)$. Поскольку $\deg x = \deg y = 2$, по следствию 1.3 имеем $d(L) = d$. Теперь заметим, что $\rho(x,a) \leqslant 1$ и $\rho(x,b) \leqslant 1$ для любой вершины $x \in G \setminus L$. Действительно, если, например, $\rho(x,b) > 1$, то, выбирая такую вершину $y \in L$, что $\rho(y,a) = d(L)$, получаем $\rho(x,y) > d(L) = d$. Противоречие. Аналогично убеждаемся в том, что L — четный цикл. Далее, как и при доказательстве утверждения (а) леммы 2.1, убеждаемся, что в $G \setminus L$ имеется единственная вершина, т. е. G является графом H_1, изображенным на рис. 1. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3 (о разбиении на классы). *Пусть граф G удовлетворяет СПМ. Тогда выполняется в точности одно из следующих утверждений:*

1) *G — граф S_k, изображенный на рис. 1, $k \geqslant 6$;*

2) *G — элементарный граф, причем либо G имеет в основании не менее двух внутренних ребер, либо G — простой цикл, граф H_1 на рис. 1 или граф $< 4, 1 >$;*

3) *G имеет разделяющее ребро.*

Доказательство. Если G является графом S_k, изображенным на рис. 1, то ясно, что при $k = 4$ и $k = 5$ выполняется утверждение 2, а при $k \geqslant 6$ выполняется утверждение 1. Поэтому считаем, что G отличен от графа S_k.

Очевидно, что если G имеет внутреннюю грань, на которой есть хотя бы три внутренних ребра, то выполняется утверждение 2 или утверждение 3. Поэтому можно считать, что любая внутренняя грань графа G имеет не более двух внутренних ребер и G не является циклом. Пусть $L_1, \ldots, L_m$, $m \geqslant 2$ — все внутренние грани графа G, причем L_i имеет общие вершины только с L_{i-1} и L_{i+1}. Тогда по лемме 2.2 можно считать, что грани L_1 и L_m имеют не более четырех вершин (иначе G является графом H_1, изображенным на рис. 1) и $m \geqslant 3$ (иначе G — граф $< 4, 1 >$ или граф H_1 на рис. 1). Рассмотрим грань L_2. Можно считать, что $L_3 \cup \ldots \cup L_m$ — развилка грани L_2 (так как иначе G — элементарный граф с основанием L_2) и $L_1 \cup L_2$ — лестница грани L_3 (так как иначе выполняется утверждение 3). Переходя таким образом последовательно от L_i к L_{i+1}, получим, что либо выполняется утверждение 2 или 3, либо $L_1 \cup \ldots \cup L_{m-2}$ — лестница грани L_{m-1}. Последнее означает, что L_{m-1} —

основание элементарного графа G, т. е. выполняется утверждение 2. Таким образом, выполняется одно из трех утверждений леммы.

Из вида лестниц и определения элементарного графа нетрудно установить, что граф S_k, изображенный на рис. 1, при $k \geqslant 6$ не является элементарным и всякий элементарный граф не имеет разделяющих ребер. Поэтому справедливо только одно из утверждений, сформулированных в лемме. Лемма 2.3 доказана.

S 3. Свойства лестниц

Лемма 3.1. *Пусть G_{ba} — лестница графа G. Тогда*

1. *Выполняются соотношения:*

a) *если $G_{ba} = A_k$, то $e(a) = e(b) = k + 1$ и $\rho(b, f(a)) = \rho(a, f(b)) = e(a) - 1$;*

b) *если $G_{ba} = B_k$, то $e(a) = e(b) = k + 1$, $\rho(a, f(b)) \in \{e(a) - 1,\ e(a)\}$ и $\rho(b, f(a)) \in \{e(b) - 1,\ e(b)\}$;*

c) *если $G_{ba} = C$, то $e(a) = e(b) = 1$ и $\rho(a, f(b)) = \rho(b, f(a)) = e(a)$;*

d) *если $G_{ba} = D_k(a)$, то $e(a) = e(b) + 1 = k + 2$, $\rho(a, f(b)) \in \{e(b) - 1,\ e(b),\ e(b) + 1\}$ и $\rho(b, f(a)) = e(a) - 1$;*

e) *если $G_{ba} = E_k(a)$, то $e(a) = e(b) + 1 = k + 2$, $\rho(a, f(b)) \in \{e(b),\ e(b) + 1\}$ и $\rho(b, f(a)) = e(a) - 1$;*

f) *если $G_{ba} = M_k(a)$, то $e(a) = e(b) = k + 1$, $\rho(a, f(b)) = e(b)$ и $\rho(b, f(a)) \in \{e(a) - 1,\ e(a)\}$.*

2. $|e(b) - e(a)| \leqslant 1$.

3. $\forall f(a)\, (\rho(f(a), b) < e(a)) \Leftrightarrow G_{ba} \in \{A, D(a), E(a)\}$;
$\exists f(a)\, (\rho(f(a), b) = e(a)) \Leftrightarrow G_{ba} \notin \{A, D(a), E(a)\}$.

4. *Если (u, a, v) — тупиковая (в частности диаметральная) цепь в графе G и $v \in G_{ba} \setminus \{a, b\}$, то v совпадает с одной из вершин $f(a)$ или $f(b)$ лестницы G_{ba}, причем если (u, a, b) — кратчайшая цепь в G , то v совпадает с вершиной $f(a)$.*

Справедливость леммы непосредственно следует из вида лестниц.

Лемма 3.2. *Пусть $G_{a_1a_2}$, $G_{a_3a_4}$ — две лестницы графа G, удовлетворяющего СПМ, и (a_1, a_2, a_3, a_4) — кратчайшая цепь в G. Тогда $e(a_2) + \rho(a_2, a_3) + e(a_3) = d$.*

Доказательство. В силу СПМ для вершин $w^-(a_2) \in G_{a_1a_2}$ и $w^+(a_3) \in G_{a_3a_4}$ в графе G существует некоторая диаметральная цепь $(u, w^+(a_3), a_3, a_2, w^-(a_2), v)$. По утверждению 4 леммы 3.1 имеем $\rho(u, a_3) = e(a_3)$ и $\rho(a_2, v) = e(a_2)$. Лемма 3.2 доказана.

Доказательства приведенных ниже лемм можно найти в [4].

Лемма 3.3. *Пусть G_{ba} — лестница n-грани L графа G, удовлетворяющего СПМ, $\deg r_L(b,a) = 2$ и либо n четно, либо нет ребра $\widetilde{aw}^+(b)$. Тогда*

1) $d - d(L) + 1 = e(a) \geqslant e(b) \geqslant d - d(L)$;

2) *если n нечетно, то $G_{ba} \in \{A, D(a), E(a)\}$.*

Лемма 3.4. *Пусть G_{ba} — лестница n-грани L графа G, удовлетворяющего СПМ, и $\deg r_L(a,a') = 2$, где $a' \in L \setminus \{b\}$ — вершина, смежная с a. Тогда*

1) $d - d(L) + 1 \geqslant e(a) \geqslant d - d(L)$;

2) *если n нечетно, то $e(a) = d - d(L) + 1 \Leftrightarrow G_{ba} \in \{A, D(a), E(a)\}$.*

Лемма 3.5. *Пусть $G_1 = G_{a_1b_1}$, $G_2 = G_{b_2a_2}$ — две лестницы n-грани L в графе G, удовлетворяющем СПМ, и (a_1, b_1, b_2) — кратчайшая цепь длины $d(L)$ в G. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $e(b_1) + d(L) - 1 + e(b_2) = d$, *причем при четном n существуют i, j такие, что возможные комбинации видов для лестниц G_1, G_2 приведены в табл. 2, а если n нечетно и $G_i \in \{A, D(b_i), E(b_i)\}$, то $G_j \in \{C, E(a_j), M(a_j)\}$;*

2) $e(b_1)+d(L)-1+e(b_2) = d+1$, *причем при четном n существуют i, j такие, что возможные комбинации видов для лестниц G_1 G_2 приведены в табл. 3, а если n нечетно, то $G_i \in \{A, D(b_i), E(b_i)\}$ при любом i;*

3) $e(b_1) + d(L) - 1 + e(b_2) = d + 2$, *$n$ четно и $G_i \in \{D(b_i), E(b_i)\}$ при любом i. Здесь $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.*

Таблица 2

G_i	G_j
C	$C, B, D(a_j), E(a_j), M(a_j), M(b_j)$
$D(a_i)$	$D(a_j), E(a_j), M(b_j)$
$E(a_i)$	$B, E(a_j), M(a_j), M(b_j)$
$M(a_i)$	$M(a_j)$
$M(b_i)$	$M(b_j)$

Таблица 3

G_j	G_i
A	$A, B, C, M(a_i), M(b_i),$
$D(b_j)$	$C, M(a_i)$
$E(b_j)$	$B, C, M(a_i), M(b_i)$

Лемма 3.6. *Пусть $G_{a_3a_2}$, $G_{a_1a_4}$, $G_{a_5a_6}$ — три лестницы n-грани L в графе G, удовлетворяющем СПМ, и $(a_3, a_2, a_1, a_4, a_5)$ — кратчайшая цепь в G. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $e(a_2) + \rho(a_2, a_5) + e(a_5) = d$, *причем существуют $i, j \in \{1, 4\}$ такие, что $i \neq j$, $e(a_i) = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$, $e(a_j) = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$, $e(a_{i+1}) + \rho(a_{i+1}, a_i) = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil - 1$ и $e(a_{j+1}) + \rho(a_{j+1}, a_j) = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$;*

2) $e(a_2)+\rho(a_2,a_5)+e(a_5)=d+1$, *причем существуют* $i,j\in\{1,4\}$ *такие, что* $i\neq j$, $e(a_i)=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$, $e(a_j)=\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil$, $e(a_{i+1})+\rho(a_{i+1},a_i)=\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil$ *и* $e(a_{j+1})+\rho(a_{j+1},a_j)=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$;

3) $e(a_2)+\rho(a_2,a_5)+e(a_5)=d+2$, *причем* n *четно и существуют* $i,j\in\{1,4\}$ *такие, что* $i\neq j$, $e(a_i)=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$, $e(a_j)=\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil-1$, $e(a_{i+1})+\rho(a_{i+1},a_i)=\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil$ *и* $e(a_{j+1})+\rho(a_{j+1},a_j)=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+1$.

Кроме того, если (a_3,a_2,a_6) *— кратчайшая цепь в графе* G, *то справедливо утверждение* 1.

Доказательство. Пусть $\Sigma=e(a_2)+\rho(a_2,a_5)+e(a_5)$. Сначала покажем, что $d\leqslant\Sigma\leqslant d+2$. Действительно, если (a_3,a_2,a_5,a_6) — кратчайшая цепь, то по лемме 3.2 имеем $\Sigma=d$. Пусть (a_3,a_2,a_5,a_6) не является кратчайшей цепью и, следовательно, $\rho(a_3,a_5)=d(L)$. Тогда в силу леммы 3.5 имеем $d\leqslant\Sigma\leqslant d+2$, причем если $\Sigma=d+2$, то n четно. Из леммы 3.2 получаем следующую систему соотношений:

$$e(a_2)+\rho(a_2,a_1)+e(a_1)=d, \tag{3.1}$$

$$e(a_4)+\rho(a_4,a_5)+e(a_5)=d, \tag{3.2}$$

$$e(a_2)+\rho(a_2,a_5)+e(a_5)=\Sigma. \tag{3.3}$$

В силу утверждения 2 леммы 3.1 имеем $|e(a_1)-e(a_4)|\leqslant 1$. Предположим, что $e(a_1)=e(a_4)$. Тогда из (3.1) и (3.2) следует, что $e(a_2)+\rho(a_2,a_1)=e(a_5)+\rho(a_4,a_5)$. Следовательно, из (3.3) получаем $\Sigma=2(e(a_2)+\rho(a_2,a_1))+1$, а из (3.8) имеем $e(a_1)=d-\frac{\Sigma-1}{2}$. Теперь, используя три возможных значения Σ, получаем утверждения 1–3. Аналогично убеждаемся в справедливости этих утверждений в случае, когда $|e(a_1)-e(a_4)|=1$. Лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.7. *Пусть* $G_{a_1a_2}$, $G_{a_3a_4}$, $G_{a_5a_6}$, $G_{a_7a_8}$ *— лестницы грани* L *графа* G, *вершина* a_i *расположена в* L *между вершинами* a_{i-1},a_{i+1} *при* $2\leqslant i\leqslant 7$ *и* $\rho(a_2,a_3)\leqslant 1$, $\rho(a_6,a_7)\leqslant 1$, $a_1\neq a_8$, $a_4\neq a_5$. *Тогда граф* G *не удовлетворяет* СПМ.

Доказательство. Можно считать, что $\rho(a_2,a_3)\geqslant\rho(a_6,a_7)$. Предположим противное, т. е. граф G удовлетворяет СПМ. Так как $d(L)\geqslant 3$ по условию леммы, то по лемме 3.2 имеем

$$e(a_2)+\rho(a_2,a_3)+e(a_3)=d,\quad e(a_7)+\rho(a_7,a_6)+e(a_6)=d. \tag{3.4}$$

Покажем, что

$$e(a_i)\leqslant\left\lfloor\tfrac{d}{2}\right\rfloor,\quad i\in\{2,3,6,7\}. \tag{3.5}$$

Предположим, например, что $e(a_2)>\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$. Если $e(a_7)\leqslant\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$, то из (3.4) имеем $e(a_6)\geqslant d-\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor-1$. Поэтому $\rho(f(a_2),f(a_6))>d$. Значит,

$e(a_7) > \lfloor\frac{d}{2}\rfloor$. Если $e(a_7) \geqslant \lceil\frac{d}{2}\rceil + 1$ или $e(a_2) \geqslant \lceil\frac{d}{2}\rceil + 1$, то $\rho(f(a_2), f(a_7)) \geqslant \lfloor\frac{d}{2}\rfloor + \lceil\frac{d}{2}\rceil + 1 > d$. Поэтому

$$e(a_2) = e(a_7) = \lceil\tfrac{d}{2}\rceil. \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.6) следует, что

$$e(a_6) = \lfloor\tfrac{d}{2}\rfloor - \rho(a_6, a_7). \tag{3.7}$$

Тогда, используя (3.6) и (3.7), получаем $\rho(f(a_2), f(a_6)) > d$. Противоречие. Таким образом, (3.5) доказано.

В силу (3.4) и (3.5) можно считать, что $e(a_2) = \lfloor\frac{d}{2}\rfloor$ и $e(a_6) \geqslant \lceil\frac{d}{2}\rceil - \rho(a_6, a_7)$. Тогда $\rho(f(a_2), f(a_6)) \geqslant \min\{e(a_2) + \rho(a_2, a_3) + 2 + e(a_6) - 1, e(a_2) - 1 + 2 + \rho(a_7, a_6) + e(a_6)\} \geqslant d + 1$. Противоречие. Лемма 3.7 доказана.

S 4. Вспомогательные результаты

Лемма 4.1. *Пусть в основании L элементарного графа G имеется не менее двух внутренних ребер и $d(L) = d(G)$. Тогда G является графом $< 6, 1 >$ или графом H_2, изображенным на рис. 1.*

Доказательство основано на том, что всякий лепесток грани L является треугольником, и использует лемму 3.2.

Лемма 4.2. *Пусть $G_{a_1a_2}$, $G_{a_3a_4}$ — две лестницы основания L элементарного графа G, (a_1, a_2, a_3, a_4) — кратчайшая цепь и $d(L) \neq d(G)$. Тогда либо $d(L) - 1 \leqslant \rho(a_1, a_4) \leqslant d(L)$, либо G является графом $< 8, 1 >$ или графом $< 9, 1 >$.*

Доказательство. Пусть $\rho(a_1, a_4) \leqslant d(L) - 2$. Покажем, что G является графом $< 8, 1 >$ или $< 9, 1 >$. Выберем такие вершины $x, y \in L$, что $(x, a_1, a_2, a_3, a_4, y)$ — кратчайшая цепь в G длины $d(L)$ и $x \neq a_1$, $y \neq a_4$. В силу СПМ в графе G существует некоторая диаметральная цепь (u, x, a_1, a_4, y, v).

Покажем, что $\deg x \geqslant 3$ и $\deg y \geqslant 3$. Предположим, например, что $\deg x = 2$. Тогда $u = x$, и поскольку $d(L) \neq d(G)$, то $\deg y \geqslant 3$ и $v \neq y$. Поэтому в основании L есть хотя бы три различных внутренних ребра $\widetilde{a_1a_2}$, $\widetilde{a_3a_4}$, $\widetilde{a_5a_6}$, причем $y \in \{a_5, a_6\}$, $v \in G_{a_5a_6} \setminus \{a_5, a_6\}$ и (a_1, a_3, a_6) — кратчайшая цепь в графе G. Используя лемму 3.2, получаем $\rho(x, a_3) = d - 1 - \rho(a_4, a_5) - \rho(a_5, v) \geqslant d - 1 - \rho(a_4, a_5) - e(a_5) \geqslant e(a_4) - 1$. Поскольку (a_1, a_3, a_6) — кратчайшая цепь, то с учетом утверждения 1 леммы 3.6 имеем $e(a_3) + \rho(x, a_3) \geqslant e(a_3) + e(a_4) - 1 = d$. С другой стороны, (x_1, x, a_1, a_3, a_4) — кратчайшая цепь в силу выбора вершин x, y. Значит, $d \geqslant \rho(x_1, f(a_3)) = e(a_3) + \rho(a_3, x) + 1$, где $x_1 \in L$ и $\rho(x, x_1) = 1$. Противоречие.

Значит, $\deg x \geqslant 3$, $\deg y \geqslant 3$ и в основании L есть четыре внутренних ребра $\widetilde{a_i a_{i+1}}$, $i \in \{1,3,5,7\}$, причем $x \in \{a_7, a_8\}$ и $y \in \{a_5, a_6\}$. Тогда (a_7, a_8, a_3, a_4), (a_1, a_2, a_5, a_6) — кратчайшие цепи. Используя утверждение 1 леммы 3.6 и соотношение $e(a_2) + \rho(a_2, a_3) + e(a_3) = d$ из леммы 3.2, нетрудно видеть, что d четно, $a_2 = a_3$ и

$$e(a_2) = e(a_3) = \tfrac{d}{2}, \quad e(a_1) = e(a_4) = \tfrac{d}{2} + 1, \tag{4.1}$$

$$\rho(a_1, a_8) + e(a_8) = \rho(a_4, a_5) + e(a_5) = \tfrac{d}{2} - 1. \tag{4.2}$$

Приведенные выше рассуждения также показывают, что если $G_{b_1 b_2}$, $G_{b_3 b_4}$ — лестницы основания L и (b_1, b_2, b_3, b_4) — кратчайшая цепь длины не более $d(L) - 2$, то $b_2 = b_3$ и $e(b_2) = e(b_3) = \frac{d}{2}$.

Покажем, что $a_8 = x$. Действительно, если это не так, то $a_7 = x$. Тогда кратчайшая цепь (a_7, a_8, a_1, a_2) имеет длину не более $d(L) - 2$. Поэтому по доказанному выше $e(a_1) = \frac{d}{2}$ и получаем противоречие с (4.1). Итак, $a_8 = x$ и аналогично $a_5 = y$; при этом (a_8, a_1, a_3, a_5) — кратчайшая цепь длины $d(L)$.

Убедимся в том, что $\rho(a_1, a_8) = 1$. Если это не так, то $\rho(a_1, a_8) \geqslant 2$ в силу выбора вершины x. Поэтому (a_3, a_4, a_5, a_6) — кратчайшая цепь длины не более $d(L) - 2$. Тогда по доказанному имеем $e(a_4) = \frac{d}{2}$. Противоречие с (4.1).

Значит, $\rho(a_1, a_8) = 1$ и аналогично $\rho(a_4, a_5) = 1$. Следовательно, $d(L) = 4$ и $d > 4$. Поэтому по лемме 3.7 в грани L имеется точно четыре внутренних ребра. Поскольку $d > 4$, то в силу (4.1) и леммы 2.1 имеем $G_{a_1 a_2} \neq E(a_1)$. Следовательно, из (4.1) и утверждения 1 леммы 3.1 получаем $G_{a_1 a_2} = D_{\frac{d}{2}-1}(a_1)$. Аналогично имеем $G_{a_3 a_4} = D_{\frac{d}{2}-1}(a_4)$. Поэтому в G нет ребра $\widetilde{a_4 w}^+(a_3)$ и по лемме 3.3 имеем $e(a_4) = d - d(L) + 1$. Отсюда и из (4.1) следует, что $d = 8$. Тогда из (4.2) имеем

$$e(a_5) = e(a_8) = 2. \tag{4.3}$$

Пусть $\Sigma = e(a_7) + \rho(a_7, a_6) + e(a_6)$.

Предположим сначала, что L является 8-гранью. По лемме 3.2 имеем $\Sigma = d$. Следовательно, $e(a_6) = e(a_7) = 3$ в силу (4.3) и утверждения 2 леммы 3.1. Применяя утверждение 1 леммы 3.1 и лемму 2.1, получаем $G_{a_5 a_6} = D_1(a_6)$ и $G_{a_7 a_8} = D_1(a_7)$. Таким образом, G есть граф $< 8.1 >$.

Если L является 9-гранью, то, используя леммы 3.5, 2.1 и 3.1, получаем, что G есть граф $< 9.1 >$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Пусть в основании L элементарного графа G имеется точно два внутренних ребра и $d \neq d(L)$. Тогда G — один из следующих графов:* $< 3, i >$, $1 \leqslant i \leqslant 4$; $< 4, i >$, $2 \leqslant i \leqslant 7$; $< 5, i >$, $1 \leqslant i \leqslant 4$; $< 6, i >$, $2 \leqslant i \leqslant 4$; $< 7, i >$, $1 \leqslant i \leqslant 2$; $< 8, 2 >$.

Доказательство этой леммы имеется в [4].

Лемма 4.4. *Пусть в основании L элементарного графа G есть внутренние ребра $\widetilde{b_1b_2}$, $\widetilde{b_3b_4}$, $\widetilde{b_5b_6}$, а $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ является кратчайшей цепью и $d(L) \neq d(G)$. Тогда G — один из следующих графов: $< 8, 1 >$; $< 9, 1 >$; $< 6, i >$, $5 \leqslant i \leqslant 13$; $< 7, j >$, $3 \leqslant j \leqslant 6$.*

Доказательство. Пусть G не является графом $< 8, 1 >$, $< 9, 1 >$. Тогда по лемме 4.2 получаем $d(L) - 1 \leqslant \rho(b_1, b_4)$ и $d(L) - 1 \leqslant \rho(b_3, b_6)$. Поскольку $3 \leqslant \rho(b_1, b_6) \leqslant d(L)$, то $d(L) = 3$. Теперь, используя лемму 3.7, нетрудно установить, что G — граф одного из видов на рис. 5, где $\rho(a_i, a_{i+1}) = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant 5$, $1 \leqslant \rho(a_1, a_6) \leqslant 2$ и указано расположение всех внутренних ребер в основании L.

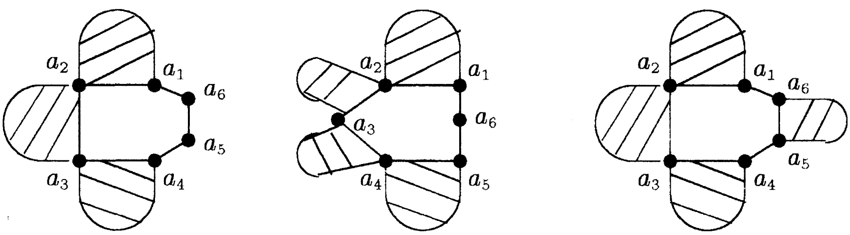

Рис. 5

1. Пусть G — граф вида (1) на рис. 5. По утверждению 1 леммы 3.6 можно считать, что

$$e(a_2, a_3) = \lfloor \tfrac{d}{2} \rfloor + 1,\ e(a_3, a_2) = \lceil \tfrac{d}{2} \rceil,\ e(a_2, a_1) = \lceil \tfrac{d}{2} \rceil - 1,\ e(a_3, a_4) = \lfloor \tfrac{d}{2} \rfloor. \quad (4.4)$$

Поэтому, используя вид лестницы $G_{a_2a_3}$ при четном d и симметрию рисунка при нечетном d, можно считать, что в G нет ребра $\widetilde{a_2w}^-(a_3)$. Тогда по лемме 3.3

$$e(a_2, a_3) = d - 2, \quad (4.5)$$

а по лемме 3.4

$$e(a_2, a_1) \geqslant d - 3. \quad (4.6)$$

Из (4.4), (4.5), (4.6) имеем $d - 2 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ и $\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 \geqslant d - 3$. Следовательно, $d = 5$ и из (4.4) получаем

$$G_{a_2a_3} \in \{A_2, B_2, M_2(a_2)\},\ e(a_2, a_1) = e(a_3, a_4) = 2. \quad (4.7)$$

Если L является 6-гранью, то по лемме 3.3 имеем $e(a_1) = e(a_4) = 3$. Применяя лемму 2.1, получаем $G_{a_1a_2} = D_1(a_1)$ и $G_{a_3a_4} = D_1(a_4)$, т. е. G является графом $< 6, 5 >$.

Пусть L — 7-грань. Из леммы 3.3 и (4.7) получаем $G_{a_2a_3} = A_2$. По лемме 3.4

$$e(a_1) \geqslant 2, \quad e(a_4) \geqslant 2. \quad (4.8)$$

Заметим, что $G_{a_1a_2} \in \{D_1(a_1), M_1(a_2)\}$. Действительно, в силу (4.7), (4.8) и утверждения 2 леммы 3.1 имеем $2 \leqslant e(a_1) \leqslant 3$. Если $e(a_1) = 3$, то по (4.7), утверждению 1 леммы 3.1 и лемме 2.1 получаем $G_{a_1a_2} = D_1(a_1)$. Пусть теперь $e(a_1) = 2$. Тогда в G есть ребро $\widetilde{a_1w}^-(a_2)$ (так как иначе по лемме 3.3 $e(a_1) = 3$). Значит, $G_{a_1a_2} = M_1(a_2)$.

Аналогично $G_{a_3a_4} \in \{D_1(a_4), M_1(a_3)\}$. Таким образом, G является графом $< 7, 3 >$.

2. Пусть G — граф вида (2) на рис. 5. Из утверждения 1 леммы 3.6 следует, что d четно и

$$\begin{gathered} e(a_3, a_2) = e(a_3, a_4) = \tfrac{d}{2}, \quad e(a_2, a_3) = e(a_4, a_3) = \tfrac{d}{2} + 1, \\ e(a_2, a_1) = e(a_4, a_5) = \tfrac{d}{2} - 1. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Тогда по утверждению 1 леммы 3.1 имеем $G_{a_2a_3} \in \{D_{\frac{d}{2}-1}(a_2), E_{\frac{d}{2}}(a_2)\}$, $G_{a_3a_4} \in \{D_{\frac{d}{2}-1}(a_4), E_{\frac{d}{2}}(a_4)\}$. Следовательно, в G нет ребра $\widetilde{a_2w}^-(a_3)$. По лемме 3.3 имеем $e(a_2, a_3) = d - 2$. Поэтому из (4.9) получаем

$$d = 6, \; e(a_2, a_1) = e(a_4, a_5) = 2. \tag{4.10}$$

В силу (4.10) возможные виды графов $G_{a_1a_2}$, $G_{a_4a_5}$ указаны в утверждении 1 леммы 3.5.

Пусть L — 6-грань. Учитывая утверждение 1 леммы 3.5 и лемму 2.1, с точностью до перенумерации вершин основания получаем, что либо $G_{a_1a_2} = D(a_1)$ и $G_{a_4a_5} \in \{D(a_5), M(a_4)\}$, либо $G_{a_1a_2} = M(a_2)$ и $G_{a_4a_5} = M(a_4)$. Если $G_{a_4a_5} = M(a_4)$, то $G_{a_3a_4} = D(a_4)$, а если $G_{a_1a_2} = M(a_2)$, то $G_{a_2a_3} = D(a_2)$. Таким образом, G является графом $< 6, 6 >$, $< 6, 7 >$ или $< 6, 8 >$.

Пусть L является 7-гранью. Покажем, что $G_{a_1a_2} = M_1(a_2)$ и $G_{a_4a_5} = M_1(a_4)$. Действительно, в G есть ребро $\widetilde{a_1w}^-(a_2)$, так как иначе $e(a_1) = 4$ по лемме 3.3, что в силу утверждения 2 леммы 3.1 противоречит (4.10). Поэтому с учетом (4.10) имеем $G_{a_1a_2} \in \{E_1(a_2), M_1(a_2)\}$. Если $G_{a_1a_2} = E_1(a_2)$, то из утверждения 1 леммы 3.5 следует $G_{a_4a_5} \in \{C, E(a_5), M(a_5)\}$, что невозможно в силу (4.10) и леммы 2.1. Значит, $G_{a_1a_2} = M_1(a_2)$. Аналогично $G_{a_4a_5} = M_1(a_4)$. Таким образом, G является графом $< 7, 4 >$.

3. Если G — граф вида (3) на рис. 5, то, применяя леммы 2.1 и 3.1–3.6, убеждаемся в том, что G имеет требуемый вид. Лемма 4.4 доказана.

Лемма 4.5. *Пусть в n-вершинном основании L элементарного графа G имеется не менее трех внутренних ребер, $d(L) \neq d(G)$ и не выполняются условия леммы 4.4. Тогда G является графом одного из видов на рис. 6, на котором для каждого вида приведены значения n и расположение всех внутренних ребер в основании графа.*

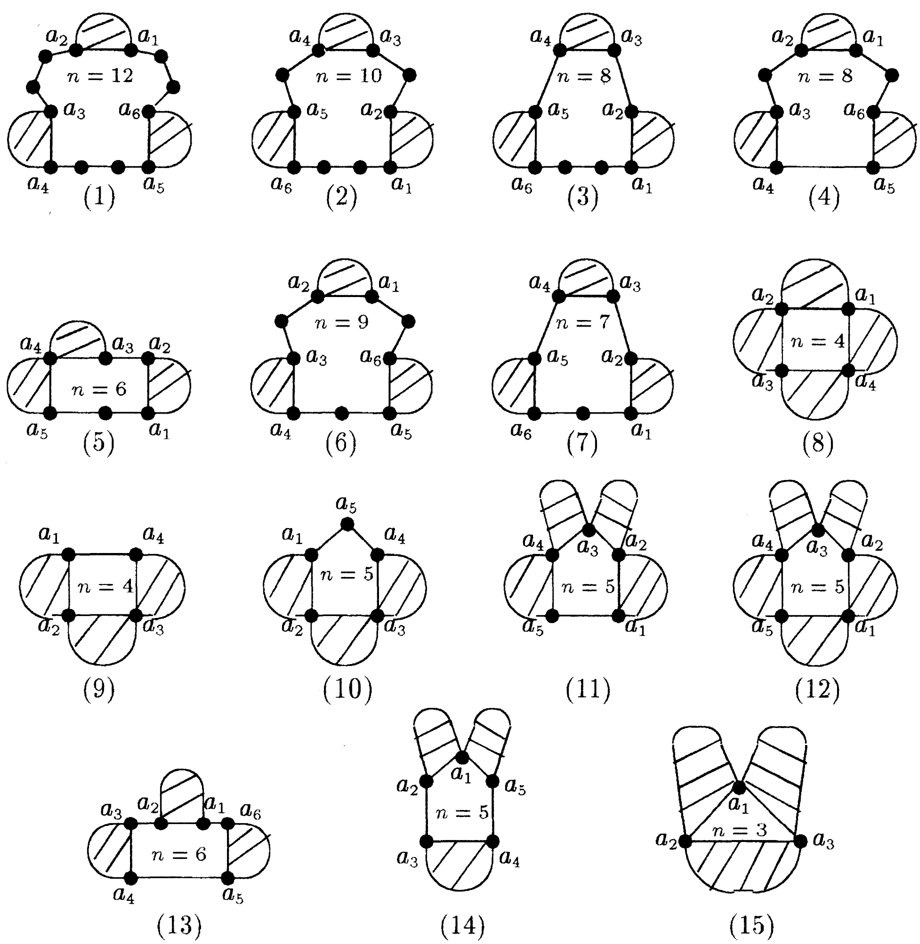

Рис. 6

Доказательство. Если $n \leqslant 5$, то G является графом одного из видов (8)–(12), (14), (15) на рис. 6. Поэтому будем считать, что $d(L) \geqslant 3$.

Покажем, что в L существуют две кратчайшие цепи (a_1, a_2, a_3, a_4), (a_2, a_1, a_6, a_5) такие, что $\widetilde{a_1 a_2}$, $\widetilde{a_3 a_4}$ и $\widetilde{a_5 a_6}$ — внутренние ребра в основании L. Действительно, пусть $\widetilde{a_1 a_2}$, $\widetilde{a_3 a_4}$, $\widetilde{a_5 a_6}$ — три произвольных внутренних ребра в основании L таких, что вершина a_{i+1} расположена в L между вершинами a_i, a_{i+2} при $1 \leqslant i \leqslant 4$. Обозначим через α_1 (соответственно α_2 и α_3) длину простой цепи в основании L с концами a_1, a_4 (соответственно a_3, a_6 и a_5, a_2), проходящей через вершины a_2, a_3 (соответственно a_4, a_5 и a_6, a_1). Тогда

$$n = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - 3. \tag{4.11}$$

Будем считать, что среди α_1, α_2, α_3 нет двух чисел, не превосходящих $d(L)$, иначе требуемые кратчайшие цепи очевидны. Можно считать, что $\alpha_1 \geqslant d(L)+1$ и $\alpha_2 \geqslant d(L)+1$. Тогда $n \geqslant \alpha_3 + 2d(L) - 1 \geqslant 2d(L)+1$ и, значит, n нечетно и $\alpha_3 = 2$.

Так как условия леммы 4.4 не выполняются, то G не является графом $< 8, 1 >$ и $< 9, 1 >$. По лемме 4.2 имеем $\alpha_3 \geqslant d(L) - 1$, и, следовательно, $n = 7$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$. В силу следствия 1.3 и условия $d \neq d(L)$ в грани L имеется внутреннее ребро, лежащее на кратчайшей цепи с концами a_2, a_3 или a_4, a_5. Теперь очевидно, что в L существуют две кратчайшие цепи с требуемыми свойствами. Пусть такими цепями являются (a_1, a_2, a_3, a_4) и (a_3, a_4, a_5, a_6). По лемме 4.2 имеем

$$d(L) - 1 \leqslant \alpha_1 \leqslant d(L), \quad d(L) - 1 \leqslant \alpha_2 \leqslant d(L). \tag{4.12}$$

В силу симметрии можно считать, что

$$\alpha_3 \geqslant \max(\alpha_1, \alpha_2). \tag{4.13}$$

Поскольку не выполняются условия леммы 4.4, то

$$\alpha_1 + \alpha_2 - 1 \geqslant d(L) + 1 \tag{4.14}$$

и из (4.11) имеем

$$\alpha_3 \leqslant \begin{cases} d(L)+1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ d(L)+2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{4.15}$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуются следующие два свойства.

Свойство 1. В основании L имеется точно три внутренних ребра. Действительно, в силу (4.12) и невыполнения условий леммы 4.4 на кратчайших цепях с концами a_2, a_3 и a_4, a_5 нет внутренних ребер. Теперь предположим от противного, что в L есть внутреннее ребро $\widetilde{a_7a_8}$, лежащее на кратчайшей цепи с концами a_6, a_1. Можно считать, что (a_4, a_3, a_8) — кратчайшая цепь (так как иначе (a_3, a_4, a_7) — кратчайшая цепь). Следовательно, учитывая (4.12), получаем, что (a_2, a_1, a_8, a_7) — кратчайшая цепь длины не более 3. Поэтому в силу леммы 4.2 имеем $d(L) - 1 \leqslant \rho(a_2, a_7) \leqslant 3$. Значит, $3 \leqslant d(L) \leqslant 4$. Теперь очевидно справедливы условия леммы 3.7, поскольку в L есть четыре внутренних ребра и не выполняются условия леммы 4.4. Поэтому G не удовлетворяет СПМ, что противоречит элементарности графа G. Таким образом, свойство 1 доказано.

Свойство 2. Если $\alpha_1 = d(L) - 1$ или $\alpha_2 = d(L) - 1$, то n четно. Действительно, пусть, от противного, например, $\alpha_1 = d(L) - 1$ и n нечетно. Тогда в силу (4.14) $\alpha_2 \geqslant 3$. Сначала предположим , что $\alpha_2 = 3$. Тогда из (4.11) следует, что $\alpha_3 = d(L)+2$. Поэтому $r_L(a_5, a_6) \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$. По свойству 1 $\deg r_L(a_5, a_6) = 2$. В силу утверждения (c) леммы 2.1 в G нет ребра $\widetilde{a_6 w}^+(a_5)$. Поэтому по лемме 3.3 имеем $e(a_6) = d - d(L)+1$. Аналогично $e(a_3) = d - d(L)+1$ и по лемме 3.2 $e(a_2) = d-(\alpha_1-2)-e(a_3) = 2$. Теперь нетрудно проверить, что $\rho(f(a_6), f(a_2)) > d$, пришли к противоречию, предполагая $\alpha_2 = 3$. Следовательно, $\alpha_2 \geqslant 4$. Кроме того, из (4.11) и (4.12) следует, что $\alpha_3 \geqslant 4$. Поэтому существуют вершины $x, y \in L \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ такие, что $\rho(a_1, x) = 1$, $\rho(a_4, y) = 1$ и $\rho(x, y) = d(L)$. По свойству 1 имеем $\deg x = \deg y = 2$. Тогда $d = d(L)$ по следствию 1.3. Противоречие с условием леммы. Тем самым свойство 2 доказано.

Теперь воспользуемся оценками (4.12), (4.13) и (4.15) для величин α_i и разберем следующие три возможных случая (с точностью до симметрии).

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = d(L)-1$. Тогда n четно по свойству 2, а $d(L)-1 \leqslant \alpha_3 \leqslant d(L)+1$ в силу (4.13), (4.15). Если $\alpha_3 = d(L)-1$, то из (4.11) получаем $2d(L) = n = 3d(L)-6$. Следовательно, $n = 12$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$, т. е. G — граф вида (1) на рис. 6. Если $\alpha_3 = d(L)$, то аналогично получаем $n = 10$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 5$, т. е. G — граф вида (2) на рис. 6. Если $\alpha_3 = d(L)+1$, то имеем $n = 8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 5$, т. е. G — граф вида (3) на рис. 6.

2. $\alpha_1 = d(L)$ и $\alpha_2 = d(L)-1$. Тогда n четно по свойству 2 и в силу (4.13), (4.15) имеем $d(L) \leqslant \alpha_3 \leqslant d(L)+1$. Если $\alpha_3 = d(L)$, то из (4.11) получаем $2d(L) = n = 3d(L)-4$. Следовательно, $n = 8$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 4$, $\alpha_2 = 3$, т. е. G — граф вида (4) на рис. 6. Если $\alpha_3 = d(L)+1$, то аналогично имеем $n = 6$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$, т. е. G — граф вида (5) на рис. 6.

3. $\alpha_1 = \alpha_2 = d(L)$. Тогда из (4.13), (4.15) следует, что $d(L) \leqslant \alpha_3 \leqslant d(L)+2$. Если $\alpha_3 = d(L)$, то из (4.11) получаем $n = 6$ или $n = 9$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, т. е. G — граф вида (6) или (13) на рис. 6. Если $\alpha_3 = d(L)+1$, то из (4.11) имеем $n = 3d(L)-2 \geqslant 7$. Следовательно, $n = 7$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, т. е. G — граф вида (7) на рис. 6. Если $\alpha_3 = d(L)+2$, то из (4.11) получаем $2d(L)+1 \geqslant n = 3d(L)-1$. С другой стороны, $d(L) \geqslant 3$. Поэтому этот случай невозможен. Лемма 4.5 доказана.

S 5. Доказательство теоремы 1.3

Пусть G — элементарный граф и L — его n-вершинное основание. Покажем, что G является одним из графов, указанных в теореме 1.3. В силу следствия 1.2 и лемм 2.3, 4.1 и 4.3 можно считать, что $d(G) > d(L)$ и в основании L имеется не менее трех внутренних ребер. Кроме того, будем считать, что не выполняются условия леммы 4.4 (иначе G

является графом $< n, m >$ при подходящих n, m). Таким образом, выполнены условия леммы 4.5 и, значит, G — граф одного из видов на рис. 6, где для каждого вида приведены значения n и расположение всех внутренних ребер в основании L.

I. Пусть G — граф вида (1) на рис. 6. Из леммы 3.2 имеем $e(a_2) + 3 + e(a_3) = d$, а $e(a_2) = e(a_3) = d - 5$ по лемме 3.3. Следовательно, $d = 7$ и $e(a_2) = 2$. Аналогично $e(a_i) = e(a_{i+1}) = 2$ при $i \in \{1, 3, 5\}$. Используя утверждение 1 леммы 3.1 и лемму 2.1, получаем $G_{a_i a_{i+1}} \in \{A_1, B_1\}$, т. е. G является графом $< 12, 1 >$. Таким образом, случай I разобран.

II. Пусть G — граф вида (2) на рис. 6. Из леммы 3.2 имеем

$$e(a_4) + 2 + e(a_5) = d, \tag{5.1}$$

$$e(a_6) + 3 + e(a_1) = d, \tag{5.2}$$

а по лемме 3.3

$$\begin{gathered} e(a_3) = e(a_4) = d - 4, \\ d - 4 = e(a_5) \geqslant e(a_6), \quad d - 4 = e(a_2) \geqslant e(a_1). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Следовательно, из (5.1), (5.3) имеем $d = 6$. В силу (5.2), (5.3) можно считать, что $e(a_6) = 1$, $e(a_1) = 2$. Используя (5.3), лемму 2.1 и утверждение 1 леммы 3.1, получаем $G_{a_3 a_4}, G_{a_1 a_2} \in \{A_1, B_1\}$, $G_{a_5 a_6} = E_1(a_5)$, т. е. G является графом $< 10, 1 >$. Таким образом, случай II рассмотрен.

III. Пусть G — граф вида (3) на рис. 6. По лемме 3.3

$$e(a_3) = e(a_4) = d - 3. \tag{5.4}$$

В силу леммы 2.1 и утверждения 1 леммы 3.1 имеем $G_{a_3 a_4} \in \{A_{d-4}, B_{d-4}\}$. Из (5.4) и леммы 3.2 следует, что

$$e(a_2) = e(a_5) = 2. \tag{5.5}$$

Пусть $\Sigma = e(a_2) + 3 + e(a_5)$. В силу леммы 3.5 возможны следующие три случая:

1. $\Sigma = d$. Тогда из (5.5), утверждения 1 леммы 3.5 и леммы 2.1 получаем $d = 7$, $G_{a_1 a_2} = D_1(a_1)$, $G_{a_5 a_6} = D_1(a_6)$, т. е. G является графом $< 8, 3 >$.

2. $\Sigma = d + 1$. Тогда $d = 6$ согласно (5.5). Используя утверждение 2 леммы 3.5 и лемму 2.1, с точностью до перенумерации вершин основания получаем $G_{a_1 a_2} = A_1$ и $G_{a_5 a_6} \in \{A_1, B_1\}$, т. е. G является графом $< 8, 4 >$.

3. $\Sigma = d + 2$. Тогда из (5.5) и утверждения 3 леммы 3.5 получаем $d = 5$, $G_{a_1 a_2} = E_1(a_2)$ и $G_{a_5 a_6} = E_1(a_5)$, т. е. G является графом $< 8, 5 >$. Таким образом, случай III разобран.

В остальных случаях так же, используя свойства лестниц из S 3, получаем, что граф G является одним из требуемых графов (доказательство см. в [5]). Все полученные графы имеют основание, и непосредственной проверкой можно убедиться, что эти графы удовлетворяют СПМ. Следовательно, такие графы элементарны. Теорема 1.3 доказана.

Нетрудно заметить, что при доказательстве теоремы 1.3 каждый вновь включаемый в табл. 1 элементарный граф G неизоморфен уже имеющимся в таблице элементарным графам. Это обусловлено тем, что учитываются следующие характеристики: число вершин в основании L рассматриваемого графа G, соотношение диаметров $d(L)$ и $d(G)$, число внутренних ребер в основании L и их расположение с учетом перенумерации вершин основания, соотношения величин $e(a)$ и $e(b)$ для всех лестниц G_{ab} основания графа G и их численные значения и, наконец, типы лестниц основания. Таким образом, справедливо

Замечание 5.1. Следующие элементарные графы попарно неизоморфны: простой цикл, граф H_1, граф H_2 (см. рис. 1), граф $< n, m >$ и граф $< n', m' >$ из табл. 1 при любых n и m таких, что $n' \neq n$ или $m' \neq m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 116–132. (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. **Федоряева Т. И.** Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 49–67.
4. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики. I. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 1).
5. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики. II. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 2).
6. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики. III. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. 51 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 3).
7. **Федоряева Т. И.** Графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики: Автореф. дис. канд. ... физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т математики, 1996. 12 с.
8. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

$n=3$				
m	G_{12}	G_{23}	G_{31}	$d(G)$
1	$C, E_1(1)$	$C, E_1(3)$		2
2	C	$M_{d-2}(2)$		$d \geqslant 3$
3	A_k	A_k	$A_k, E_k(3), AE_d(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}3$
4	$D_{k-1}(2), D_d^2(2)$ и при $d=4$ $D_4^1(2), D_4^2(2)$	$A_{k-1}, E_{k-1}(2)$	$D_{k-1}(3), E_k(3), D_d^2(3)$ и при $d=4$ $D_4^1(3), D_4^2(3)$	$d=2k \geqslant 4$
5	$E_k(2)$	A_{k-1}	$E_k(3)$	$d=2k \geqslant 4$
6	$A_k, E_k(1), AE_d(1)$	$E_k(2), AE_d(2)$	$E_k(3), AE_d(3)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}3$
7	A_{k-1}	$M_{k-1}(3), D_{k-1}(2), E_k(2)$, $D_d^2(2)$ и при $d=4$ $D_4^1(2)$	$M_{k-1}(3)$	$d=2k \geqslant 4$
8	A_1	A_1	C	3
9	$E_k(2), AE_d(2)$	$E_k(2)$	A_k	$d{=}2k{+}1{\geqslant}3$
10	$E_1(2)$	$E_1(2)$	$B_1, M_1(3), M_3^1(1)$	3
11	$D_{k-1}(2)$	$D_{k-1}(2), E_k(2)$	$B_k, M_k(3), B_d^1(1), B_d^1(3)$, $B_d^2(1), B_d^2(3), M_d^1(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
12	$E_k(2)$	$D_{k-1}(2)$	$M_k(3), M_d^1(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
13	C	C	C	2
14	B_{k-1}	B_{k-1}	$B_{k-1}, M_{k-1}(1)$	$d=2k \geqslant 4$
15	B_{k-1}	$M_{k-1}(3), M_{k-1}(2)$	$M_{k-1}(1)$	$d=2k \geqslant 4$
16	$M_{k-1}(2)$	$M_{k-1}(3)$	$M_{k-1}(1)$	$d=2k \geqslant 4$
17	$E_1(1), AE_3(1)$	A_1	C	3
18	$E_1(1)$	$B_1, M_1(2), B_3^1(2), B_3^1(3)$, $B_3^2(2), B_3^2(3), M_3^1(3)$	C	3
19	$D_{k-1}(1), E_k(1)$	$B_k, M_k(2), B_d^1(2), B_d^1(3)$, $B_d^2(2), B_d^2(3), M_d^1(3)$	$M_{k-1}(3)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
20	$D_{k-1}(1)$, $E_k(1), D_d^2(1)$ и при $d=4$ $D_4^1(1)$	$M_{k-1}(2)$	$E_{k-1}(3)$	$d=2k \geqslant 4$
21	$D_1(2), D_4^2(2), D_4^1(2)$	C	$D_1(3), D_4^2(3), D_4^1(3)$	4
22	C	$D_4^3(2)$	$D_1(1), E_2(1)$	4
23	$E_1(1)$	$D_4^3(2)$	$M_1(3), D_1(1), E_2(1)$	4
24	C	$D_4^3(2)$	$D_4^1(1), D_4^2(1)$	4

$n = 4$					
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{41}	$d(G)$
1	A_1				3
2	A_{d-3}		A_1		$d \geqslant 4$
3	A_{d-2}		C		$d \geqslant 3$
4	$E_1(1)$		$D_{d-3}(4)$		$d \geqslant 4$
5	$E_1(1)$		$E_1(4)$		3
6	$A_1, B_1, M_1(2), B_3^2(1), M_3^1(1)$	$E_1(3)$			3
7	$D_1(1), D_4^2(1), D_4^1(1), D_4^3(1)$	$D_1(3), D_4^1(3), D_4^2(3), D_4^3(3)$			4
8	$D_{k-1}(2), D_d^2(2)$	$D_{k-2}(3), E_{k-1}(3)$	$D_{k-2}(3)$	$D_{k-1}(4), E_k(4), D_d^2(4)$	$d = 2k \geqslant 6$
9	$D_1(2), E_2(2), D_4^1(2), D_4^2(2), D_4^3(2)$	$E_1(3)$	$E_1(3)$	$D_1(4), E_2(4), D_4^1(4), D_4^2(4), D_4^3(4)$	4
10	A_{k-1}	A_{k-1}	$A_{k-1}, B_{k-1}, M_{k-1}(3), M_{k-1}(4)$	$A_{k-1}, B_{k-1}, M_{k-1}(1)$	$d = 2k \geqslant 4$
11	$D_{k-1}(2), E_k(2)$	A_{k-1}	$D_{k-1}(3), E_k(3)$	$A_k, B_k, M_k(4), B_d^1(1), B_d^1(4), B_d^2(1), B_d^2(4), M_d^1(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
12	$E_1(2)$	C	$E_1(3)$	A_1	3
13	$D_{k-1}(2), E_k(2)$	B_{k-1}	$D_{k-1}(3), E_k(3)$	A_k	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
14	$D_{k-1}(2), E_k(2)$	$M_{k-1}(3)$	$D_{k-1}(3)$	A_k	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
15	C	$A_1, B_1, B_3^1(2), B_3^1(3), B_3^2(1), B_3^2(3)$	C		3
16	$C, E_1(1)$	$A_1, B_1, M_1(3), B_3^1(2), B_3^1(3), B_3^2(2) B_3^2(3), M_3^1(2)$	$E_1(4)$		3
17	$M_1(2), D_1(1), D_4^1(1), D_4^2(1)$	$D_1(3), D_4^1(3), D_4^2(3), D_4^3(3)$	C		4
18	$M_1(2), D_1(1), D_4^1(1), D_4^2(1)$	$D_1(3), E_2(3), D_4^1(3), D_4^2(3), D_4^3(3)$	$E_1(4)$		4
19	$D_{k-1}(1), M_{k-1}(2)$	$A_k, B_k, B_d^1(2), B_d^1(3), B_d^2(2), B_d^2(3)$	$D_{k-1}(4), M_{k-1}(3)$		$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
20	$D_{k-1}(1)$	$M_k(2), M_d^1(3)$	$D_{k-1}(4), M_{k-1}(3)$		$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
21	$D_{k-1}(1), M_{k-1}(2), D_d^2(1)$	$D_{k-1}(3), D_d^2(3)$	$M_{k-2}(3)$		$d = 2k \geqslant 6$

$n = 4$					
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{41}	$d(G)$
22	$D_{k-1}(1)$, $M_{k-1}(2), D_d^2(1)$	$E_k(3), D_{k-1}(3)$	$D_{k-2}(4)$		$d = 2k \geqslant 6$
23	$A_1, E_1(2), AE_3(2)$	$E_1(3)$	C		3
24	A_{k-1}	A_{k-1}, B_{k-1}, $M_{k-1}(2)$	A_{k-1}		$d = 2k \geqslant 4$
25	$A_{k-1}, E_{k-1}(2)$	A_{k-1}, B_{k-1}	$B_{k-1}, M_{k-1}(3)$		$d = 2k \geqslant 4$
26	$A_{k-1}, E_{k-1}(2)$	$M_{k-1}(3)$	B_{k-1}		$d = 2k \geqslant 4$
27	A_{k-1}	$M_{k-1}(2)$	$B_{k-1}, M_{k-1}(3)$		$d = 2k \geqslant 4$
28	A_k	$D_{k-1}(3), E_k(3)$	A_{k-1}		$d=2k+1\geqslant 5$
29	$A_k, E_k(2), AE_d(2)$	$D_{k-1}(3)$	$B_{k-1}, M_{k-1}(3)$		$d=2k+1\geqslant 5$
30	$A_k, E_k(2), AE_d(2)$	$E_k(3)$	B_{k-1}		$d=2k+1\geqslant 5$
31	$B_k, M_k(2), B_d^1(1), B_d^1(2)$, $B_d^2(1), B_d^2(2), M_d^1(1)$	$D_{k-1}(3)$	$E_{k-1}(3)$		$d=2k+1\geqslant 5$
32	$B_k, M_k(2), B_d^2(1), M_d^1(1)$	$E_k(3), D_{k-1}(3)$	A_{k-1}		$d=2k+1\geqslant 5$
33	$E_1(2)$	C	$E_1(3)$		3
34	$D_1(2), E_2(2)$, $D_4^1(2), D_4^2(2), D_4^3(2)$	$E_1(3)$	$E_1(3)$		4
35	$D_{k-1}(2), E_k(2)$	A_{k-1}, B_{k-1}	$D_{k-1}(3), E_k(3)$		$d=2k+1\geqslant 5$
36	$D_{k-1}(2)$	$M_{k-1}(2)$	$D_{k-1}(3), E_k(3)$		$d=2k+1\geqslant 5$
37	$D_{k-1}(2)$, $E_k(2), D_d^2(2)$	$D_{k-2}(3)$	$D_{k-2}(3)$, $E_{k-1}(3)$		$d = 2k \geqslant 6$
38	$D_{k-1}(2), E_k(2), D_d^2(2)$	$E_{k-1}(3)$	$D_{k-2}(3)$		$d = 2k \geqslant 6$
39	A_{k-1}		$AE_d(4)$	$E_k(1)$, $D_{k-1}(1)$	$d=2k+1\geqslant 5$
40			$AE_3(4)$	$E_1(1)$	3
41	$D_4^3(1)$	$D_4^1(3)$, $D_4^2(3), D_4^3(3)$	$E_1(4)$		4

$n = 5$						
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{51}	$d(G)$
1	$E_1(1)$		$E_1(4)$			3
2	$C, E_1(1)$	$A_1, E_1(2), AE_3(2)$				3
3	$D_1(1), M_1(2)$, $D_4^1(1), D_4^2(1)$	$D_1(3), M_1(2)$, $D_4^1(3), D_4^2(3)$				4
4	$C, E_1(1)$	A_1	$C, E_1(4)$			3
5	C	$D_1(2), E_2(2)$, $D_4^1(2), D_4^2(2)$	$M_1(3)$, $D_1(4), D_4^1(4)$			4

$n = 5$						
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{51}	$d(G)$
6	$M_1(2)$	$B_2, M_2(2)$, $B_5^1(2), B_5^1(3)$, $B_5^2(2), B_5^2(3)$, $M_5^1(3)$	$M_1(3)$			5
7	$E_1(2)$	$B_1, M_1(2)$	$E_1(3)$			4
8	$M_{k-1}(2)$, $D_{k-1}(1)$	A_k	$D_{k-1}(4)$, $E_k(4)$	A_{k-1}		$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
9	$D_{k-1}(1)$	A_k	$D_{k-1}(4)$	$E_{k-1}(4)$		$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
10	A_{k-1}	A_{k-1}	A_{k-1}	A_{k-1}, $E_{k-1}(4)$		$d = 2k \geqslant 4$
11	$E_1(1)$	$D_1(2), E_2(2)$, $D_4^2(2), D_4^3(2)$ $D_4^1(2)$	$D_1(4), E_2(4)$, $D_4^2(4), D_4^3(4)$ $D_4^1(4)$	$E_1(5)$		4
12	$D_{k-2}(1)$	$D_{k-1}(2)$, $E_k(2), D_d^2(2)$	$D_{k-1}(4)$, $E_k(4), D_d^2(4)$	$D_{k-2}(5)$		$d = 2k \geqslant 6$
13	$E_1(1)$	$D_1(2), E_2(2)$, $D_4^2(2), D_4^3(2)$ $D_4^1(2)$	$D_1(4), D_4^1(4)$, $D_4^2(4), D_4^3(4)$	C		4
14	$D_{k-2}(1)$	$D_{k-1}(2)$, $E_k(2), D_d^2(2)$	$D_{k-1}(4)$, $D_d^2(4)$	$M_{k-2}(4)$		$d = 2k \geqslant 6$
15	A_{k-1}	A_{k-1}	A_{k-1}	A_{k-1}	A_{k-1}	$d = 2k \geqslant 4$
16	$M_{k-1}(1)$		$D_{k-2}(3)$		$B_k, B_d^1(1), B_d^1(5)$, $B_d^2(1), B_d^2(5)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}7$
17	$M_1(1)$		$E_1(3)$		$B_2, B_5^1(1), B_5^1(5)$, $B_5^2(1), B_5^2(5)$	5
18	$M_{k-2}(1)$		$D_{k-2}(3)$		$D_{k-1}(1), D_d^2(1)$	$d = 2k \geqslant 6$
19	C		$E_1(3)$		$D_1(1), D_4^1(1)$, $D_4^2(1), D_4^3(1)$	4
20	$E_{k-1}(1)$		$D_{k-2}(3)$		B_{k-1}	$d = 2k \geqslant 6$
21	$E_1(1)$		$E_1(3)$		B_1	4
22	$E_{k-1}(1)$		$D_{k-1}(3)$		$D_{k-1}(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
23	A_{k-1}		$D_{k-2}(3)$		$B_{k-1}, M_{k-1}(1)$	$d = 2k \geqslant 6$
24	A_1		$E_1(3)$		$B_1, M_1(1)$	4
25	A_{k-1}		$D_{k-1}(3)$		$D_{k-1}(1), E_k(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
26	$D_{k-1}(2)$		$D_{k-2}(3)$		$B_k, M_k(1), B_d^1(1)$, $B_d^1(5), B_d^2(1)$, $B_d^2(5), M_d^1(2)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}7$
27	$D_1(2)$		$E_1(3)$		$B_2, M_2(1), B_5^1(1)$, $B_5^1(5), B_5^2(1)$, $B_5^2(5), M_5^1(2)$	5

$n = 5$						
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{51}	$d(G)$
28	$D_{k-2}(2)$		$D_{k-2}(3)$		$D_{k-1}(1)$, $E_k(1), D_d^2(1)$	$d = 2k \geqslant 6$
29	$E_1(2)$		$E_1(3)$		$D_1(1), E_2(1)$, $D_4^1(1), D_4^2(1), D_4^3(1)$	4
30	$A_{k-1}, E_{k-1}(1)$		A_{k-1}		$A_{k-1}, E_{k-1}(1)$	$d = 2k \geqslant 4$
31	A_k		A_{k-1}		$M_{k-1}(1), D_{k-1}(5)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
32	$D_{k-1}(2), D_d^2(2)$		A_{k-2}		$D_{k-1}(5), D_d^2(5)$	$d = 2k \geqslant 6$
33	$M_{k-1}(1)$, $D_{k-1}(2), D_d^2(2)$		A_{k-2}		$M_{k-1}(1)$	$d = 2k \geqslant 6$
34	$M_{k-1}(1)$, $D_{k-1}(2)$		A_{k-1}		$E_k(1), AE_d(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
35	$B_{k-1}, M_{k-1}(1)$		B_{k-2}		B_{k-1}	$d = 2k \geqslant 6$
36	$B_1, M_1(1)$		C		B_1	4
37	$B_{k-1}, M_{k-1}(1)$		B_{k-1}		$D_{k-1}(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
38	B_{k-1}		B_{k-1}		$E_k(1)$	$d{=}2k{+}1{\geqslant}5$
39	C		C		$E_1(1)$	3
40	$D_{k-2}(1), E_{k-1}(1)$		B_{k-1}		$D_{k-2}(1)$	$d = 2k \geqslant 6$
41	$E_1(1)$		B_1		$E_1(1)$	4
42	C	$D_4^1(2)$, $D_4^2(2)$	$D_4^2(4)$, $D_4^3(4)$			4

$n = 6$							
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{61}	$d(G)$
1	C		C		C		3
2	A_1, B_1		$E_1(4)$				4
3	$D_1(1)$		$D_1(4)$				5
4	A_1, B_1, $M_1(2)$	A_1, B_1					4
5	$D_1(1)$	$A_2, B_2, M_2(2)$, $B_5^1(2), B_5^1(3)$, $B_5^2(2), B_5^2(3)$	$D_1(4)$				5
6	$D_1(1)$	$D_2(2)$, $E_3(2), D_6^2(2)$	$D_2(4)$, $E_3(4), D_6^2(4)$	$D_1(5)$			6
7	$D_1(1)$	$D_2(2)$, $E_3(2), D_6^2(2)$	$D_2(4), D_6^2(4)$	$M_1(4)$			6
8	$M_1(2)$	$D_2(2), D_6^2(2)$	$D_2(4), D_6^2(4)$	$M_1(4)$			6
9	$D_1(1)$	$D_2(2)$, $E_3(2), D_6^2(2)$	$D_2(4), D_6^2(4)$		$E_1(6)$		6

$n=6$							
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{61}	$d(G)$
10	$D_{k-2}(1)$	$D_{k-1}(2)$, $E_k(2), D_d^2(2)$	$D_{k-1}(4)$, $D_d^2(4)$		$D_{k-3}(6)$		$d=2k\geqslant 8$
11	$D_{k-1}(1)$	A_k	$D_{k-1}(4)$		A_{k-2}, B_{k-2}		$d=2k+1\geqslant 7$
12	$D_1(1)$	A_2	$D_1(4)$		C		5
13	$D_{k-1}(1)$	B_k, $M_k(3), B_d^1(2)$, $B_d^1(3), B_d^2(2)$, $B_d^2(3), M_d^1(2)$	$D_{k-1}(4)$		A_{k-2}		$d=2k+1\geqslant 7$
14	$D_1(1)$		$D_2(4)$, $E_3(4), D_6^2(4)$	$D_1(5)$			6
15	$D_1(1)$		$D_2(4), D_6^2(4)$	$M_1(4)$			6
16	A_1		$D_1(4), E_2(4)$	A_1, B_1			5
17	A_1		$D_1(4)$	$M_1(4)$			5
18	B_1		$D_1(4), E_2(4)$	A_1			5
19	B_1		$D_1(4)$	$E_1(4)$			5
20	$E_1(2)$		$E_1(4)$	$E_1(4)$			4
21	$E_1(1)$		A_2, B_2, $B_5^1(3), B_5^1(4)$, $B_5^2(3), B_5^2(4)$	$M_1(4)$			5
22	$E_1(1)$		$A_2, B_2, M_2(4)$, $B_5^1(3), B_5^1(4)$, $B_5^2(3), B_5^2(4)$, $M_5^1(4)$	$D_1(5)$			5
23	C		$A_1, B_1, M_1(4)$	A_1			4
24	C		A_1, B_1	$E_1(4)$			4
25	A_{k-1}, B_{k-1}		A_{k-1}, B_{k-1}		A_{k-1}, B_{k-1}		$d=2k+1\geqslant 5$
26	$E_1(1)$		A_1, B_1		C		4
27	$D_{k-2}(1)$		A_{k-1}, B_{k-1}		A_{k-2}, B_{k-2}		$d=2k\geqslant 6$
28	$D_1(1)$		A_1, B_1		$E_1(5)$		5
29	$D_{k-1}(1)$		A_{k-1}, B_{k-1}		$D_{k-2}(5)$		$d=2k+1\geqslant 7$
30	$E_1(1)$		A_2, B_2, $B_5^1(3), B_5^1(4)$, $B_5^2(3), B_5^2(4)$		$E_1(6)$		5
31	$D_{k-2}(1)$		A_k, B_k, $B_d^1(3), B_d^1(4)$, $B_d^2(3), B_d^2(4)$		$D_{k-2}(6)$		$d=2k+1\geqslant 7$
32	$D_1(1)$		C		$D_1(5)$		5
33	$D_{k-1}(2)$		A_{k-2}, B_{k-2}		$D_{k-1}(5)$		$d=2k+1\geqslant 7$
34	$E_1(1)$		$E_1(3)$		$E_1(5)$		4
35	$D_{k-2}(1)$		$D_{k-2}(3)$		$D_{k-2}(5)$		$d=2k\geqslant 6$
36	$E_1(1)$		$D_2(3), D_6^2(3)$		$D_1(6)$		6
37	$D_{k-3}(1)$		$D_{k-1}(3), D_d^2(3)$		$D_{k-2}(6)$		$d=2k\geqslant 8$

$n=7$								
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{67}	G_{71}	$d(G)$
1	$E_1(1)$		A_1					4
2	$D_1(1)$		$D_1(4)$					5
3	$D_1(1), M_1(2)$	A_2	$D_1(4), M_1(3)$					5
4	$M_1(2)$	$D_2(2)$, $E_3(2), D_6^2(2)$	$D_2(4)$, $E_3(4), D_6^2(4)$	$M_1(4)$				6
5	$D_1(1)$	$D_2(2)$, $E_3(2), D_6^2(2)$	$D_2(4), D_6^2(4)$		$E_1(6)$			6
6	$M_1(2)$	$D_2(2), D_6^2(2)$	$D_2(4), D_6^2(4)$		$E_1(6)$			6
7	A_1		B_1		A_1			5
8	$D_1(1)$		B_2		A_1			6
9	$E_1(1)$		$D_1(3)$		A_1			5
10	$D_1(1)$		$B_3, B_7^1(3), B_7^1(4)$ $B_7^2(3), B_7^2(4)$		$D_1(6)$			7
11	$E_1(1)$		$D_2(3), D_6^2(3)$		$D_1(6)$			6
12	$E_1(1)$		A_2		$E_1(6)$			5
13	$E_1(2)$		C		$E_1(5)$			4
14	B_1		B_1		$E_1(5)$			5
15	C		$E_1(3)$		$E_1(5)$			4
16	B_1		B_2		B_1			6
17	C		$D_1(3)$		B_1			5
18	C		A_1		C			4

$n=8$									
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{67}	G_{78}	G_{81}	$d(G)$
1	$D_3(1)$, $D_8^2(1)$	$D_3(3)$, $D_8^2(3)$		$D_1(5)$			$D_1(7)$		8
2	A_1, B_1		A_1, B_1						5
3	$D_1(1)$		A_3, B_3, $B_7^1(3), B_7^1(4)$, $B_7^2(3), B_7^2(4)$		$D_1(6)$				7
4	A_1		A_2, B_2		A_1, B_1				6
5	$E_1(2)$		A_1, B_1		$E_1(5)$				5
6	A_1, B_1			$E_1(5)$		$E_1(6)$			5
7	$E_1(2)$			$E_1(5)$		A_1, B_1			5
8	C			A_1, B_1		A_1, B_1			5

$n = 9$										
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{67}	G_{78}	G_{89}	G_{91}	$d(G)$
1	$D_3(1)$, $D_8^2(1)$	$D_3(3)$, $D_8^2(3)$		$D_1(5)$				$D_1(8)$		8
2	B_1			B_1			B_1			6
3	C			$E_1(4)$			A_1, B_1			5
4	$E_1(1)$			$E_1(4)$			$E_1(7)$			5

$n = 10$											
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{67}	G_{78}	G_{89}	$G_{9\ 10}$	$G_{10\ 1}$	$d(G)$
1	A_1, B_1			A_1, B_1			$E_1(7)$				6

$n = 12$													
m	G_{12}	G_{23}	G_{34}	G_{45}	G_{56}	G_{67}	G_{78}	G_{89}	$G_{9\ 10}$	$G_{10\ 11}$	$G_{11\ 12}$	$G_{12\ 1}$	$d(G)$
1	A_1, B_1				A_1, B_1				A_1, B_1				7

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
3 июня 1999 г.