ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 5–11

УДК 519.87+519.854

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ИЗДЕЛИЙ МНОГОРАЗОВОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ С УСЛОВИЕМ ОДНОЗНАЧНОСТИ ВЫБОРА ПОТРЕБИТЕЛЯ*)

Л. Е. Горбачевская

Исследуется задача булевого двухуровневого программирования, моделирующая выбор изделий многоразового использования. Показано, что задача является NP-трудной. Рассмотрен случай, когда она решается эффективно.

Задачи двухуровневого программирования возникают при анализе иерархических систем, в которых каждый уровень иерархии, руководствуясь своими целями и используя свои возможности, принимает решение, зная решения вышестоящих уровней. Требуется оптимизировать целевую функцию верхнего уровня, которая является результатом функционирования нижних уровней иерархии. Впервые такие задачи в игровой постановке рассматривались в [6]. Среди отечественных работ можно указать монографию Ю. Б. Гермейера [2]. В последние 10–15 лет интерес к моделям многоуровневого программирования значительно возрос. Обзор полученных результатов можно найти в [4, 5, 7], где приводятся постановки задач, их классификация и алгоритмы решения, указываются области применения.

Ранее в работе [1] рассматривалась одноуровневая задача выбора изделий многоразового использования, в которой требовалось минимизировать суммарные затраты, связанные с производством и эксплуатацией изделий. В настоящей статье исследуется двухуровневый вариант этой задачи. На верхнем уровне рассматривается задача производителя изделий, на нижнем уровне — задача потребителей этих изделий. Показано, что в общем случае двухуровневая задача является NP-трудной, но решается эффективно, если матрица потребительских затрат удовлетворяет условию квазивыпуклости.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00482).

1. Постановка задачи

Введем обозначения:

$I = \{1, \dots, n\}$ — множество видов изделий;

$J = \{1, \dots, m\}$ — множество работ;

c_i — затраты на подготовку производства изделий вида i;

g_i — затраты на производство одного изделия вида i;

p_{ij} — количество изделий вида i, необходимых для выполнения работы j;

d_{ij} — закупочные и эксплуатационные расходы потребителя при использовании изделий вида i для выполнения работы j;

x_i — переменная выбора производителем изделия вида i ($x_i \in \{0, 1\}$, $x = (x_i)$);

$I(x) = \{i \in I \mid x_i = 1\}$ — список видов изделий, выбираемых в варианте x;

X — множество всех векторов $x \neq 0$ с компонентами 0 и 1;

Z — множество всех векторов $x \neq 1$ с компонентами 0 и 1;

y_{ij} — переменная выбора потребителем изделий вида i для выполнения работы j ($y_{ij} \in \{0, 1\}$, $y = (y_{ij})$);

$Y(x)$ — множество возможных вариантов y потребительского выбора, описываемое ограничениями $\sum\limits_{i \in I} y_{ij} = 1$, $y_{ij} \leqslant x_i$, $i \in I$, $j \in J$.

Предполагается, что каждая работа должна быть выполнена изделиями одного вида. Изделие каждого вида можно использовать многократно для выполнения любых работ.

В принятых обозначениях двухуровневая модель выбора номенклатуры изделий многоразового использования имеет следующий вид.

Задача верхнего уровня (производственная): найти

$$F(x, y^*) = \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} g_i \max_{j \in J} p_{ij} y^*_{ij} \to \min_x, \quad x \in X, \tag{1}$$

где $y^* = (y^*_{ij})$ — оптимальное решение задачи нижнего уровня (потребительской задачи):

$$G(y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij} \to \min_y, \quad y \in Y(x). \tag{2}$$

Будем предполагать, что $d_{ij} \neq d_{kj}$ при всех j и $i \neq k$. При этом условии решение y^* определяется единственным образом: $y^*_{ij} = 1$, если $d_{ij} = \min\{d_{kj} \mid k \in I(x)\}$, и $y^*_{ij} = 0$ в противном случае.

2. Вычислительная сложность задачи

Рассмотрим NP-трудную задачу [3] о минимальном вершинном покрытии графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Покажем, что она сводится к задаче

(1), (2), которая, следовательно, также NP-трудна. Ребру $e_j = \{u, v\}$ поставим в соответствие пару вектор-столбцов (d_{ij}) и (p_{ij}), $i \in I$, полагая

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = u; \\ 2, & \text{если } i = v; \\ 2 + i, & \text{если } i \in I \setminus \{u, v\}; \end{cases} \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \{u, v\}; \\ n + 1, & \text{если } i \in I \setminus \{u, v\}. \end{cases}$$

Полагаем $c_i = 0$ и $g_i = 1$, $i \in I$. Пусть $V' = \{i_1, \dots, i_s\}$ — вершинное покрытие в графе G. Рассмотрим вектор $x \in X$ такой, что $I(x) = V'$. Так как V' — вершинное покрытие, то для каждого $j \in J$ величина $\min\limits_{i \in I(x)} d_{ij}$ равна либо 1, либо 2. Следовательно, для каждого $i \in I(x)$ величина $\max\limits_{j \in J} p_{ij} y^*_{ij}$ равна либо 0, либо 1. Поэтому

$$F(x, y^*) \leqslant s < n + 1. \tag{3}$$

Пусть x^* — оптимальное решение задачи (1), (2). Очевидно, что $F(x^*, y^*) < n+1$. Пусть $i_j = \arg \min\limits_{i \in I(x^*)} d_{ij}$. Тогда $p_{i_j j} = 1$, т. е. вершина i_j покрывает ребро e_j, а множество $I(x^*)$ является вершинным покрытием в графе G. Из (3) следует, что это покрытие является минимальным. Искомое сведение построено.

3. Свойство квазивыпуклости

Матрица (d_{ij}) называется *квазивыпуклой* [1], если $d_{kj} \leqslant \max\{d_{ij}, d_{lj}\}$ при каждом j и любых i, k, l таких, что $i < k < l$.

Теорема. *Если матрица (d_{ij}) квазивыпукла, то задача (1), (2) сводится к задаче нахождения*

$$\min_{(z_k) \in Z} \sum_{q \in Q} b_q \prod_{k \in \alpha_q} z_k, \tag{4}$$

где каждое множество $\alpha_q \subseteq I$ является либо отрезком $[r, s]$, либо объединением двух отрезков $[r, i-1]$ и $[i+1, s]$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Рассмотрим семейство таких подмножеств S_j, $j \in J$, множества I, что для некоторого $i \in I$ каждое множество S_j является либо отрезком $[r_j, i-1]$, либо отрезком $[i+1, r_j]$. Положим $T_j = S_j \cup \{i\}$, $j \in J$, и введем множества

$$J_1 = \{j \in J \mid S_j = [r_j, i-1]\}, \quad J_2 = \{j \in J \mid S_j = [i+1, r_j]\}.$$

Лемма 1. *При любом $z_k \in Z$ справедливо равенство*

$$\prod_{j \in J} \Bigl(1 - \prod_{k \in S_j} z_k + \prod_{k \in T_j} z_k\Bigr) = \Bigl(1 - \prod_{k \in S_p} z_k + \prod_{k \in T_p} z_k\Bigr)\Bigl(1 - \prod_{k \in S_q} z_k + \prod_{k \in T_q} z_k\Bigr),$$

где $p = \arg\max\{r_j \mid j \in J_1\}$ и $q = \arg\min\{r_j \mid j \in J_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $J_1 = [1,p]$, $J_2 = [p+1,m]$ и выполняются неравенства $r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_p$, $r_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$. Поэтому $q = p+1$. Пусть $P_l = \prod_{j\in J_l}\Bigl(1 - \prod_{k\in S_j} z_k + \prod_{k\in T_j} z_k\Bigr)$, где $l = 1,2$. Тогда

$$\prod_{j\in J}\Bigl(1 - \prod_{k\in S_j} z_k + \prod_{k\in T_j} z_k\Bigr) = P_1P_2.$$

Если $j < p$, то

$$\Bigl(1 - \prod_{k\in S_j} z_k + \prod_{k\in T_j} z_k\Bigr)\Bigl(1 - \prod_{k\in S_{j+1}} z_k + \prod_{k\in T_{j+1}} z_k\Bigr) = 1 - \prod_{k\in S_{j+1}} z_k + \prod_{k\in T_{j+1}} z_k.$$

Следовательно, $P_1 = 1 - \prod_{k\in S_p} z_k + \prod_{k\in T_p} z_k$. Если $p+1 \leqslant j < m$, то

$$\Bigl(1 - \prod_{k\in S_j} z_k + \prod_{k\in T_j} z_k\Bigr)\Bigl(1 - \prod_{k\in S_{j+1}} z_k + \prod_{k\in T_{j+1}} z_k\Bigr) = 1 - \prod_{k\in S_j} z_k + \prod_{k\in T_j} z_k.$$

Следовательно, $P_2 = 1 - \prod_{k\in S_{p+1}} z_k + \prod_{k\in T_{p+1}} z_k$. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим произвольный вектор $x \in X$. Пусть y^* — оптимальное решение задачи (2). При каждом $i \in I$ определим такую перестановку $(j_1^i, \ldots, j_m^i)$ элементов множества J, что $p_{ij_1^i} \leqslant \ldots \leqslant p_{ij_m^i}$. Нетрудно видеть, что

$$\max_{j\in J} p_{ij}y_{ij}^* = p_{ij_m^i} + \sum_{l=m}^{2}(p_{ij^i_{(l-1)}} - p_{ij_l^i})\prod_{r=l}^{m}(1 - y^*_{ij_r^i}) - p_{ij_1^i}\prod_{r=1}^{m}(1 - y^*_{ij_r^i}). \quad (5)$$

Для любых $i \in I$ и $j \in J$ введем множества $S_{ij} = \{k \in I \mid d_{kj} < d_{ij}\}$ и $T_{ij} = S_{ij} \cup \{i\}$. Нетрудно видеть, что если матрица (d_{ij}) квазивыпукла, то каждое множество S_{ij} является либо отрезком $[r, i-1]$, либо отрезком $[i+1, r]$. Поэтому либо $T_{ij} = [r,i]$, либо $T_{ij} = [i,r]$. Компоненты y_{ij}^* оптимального решения задачи нижнего уровня представимы равенствами

$$y_{ij}^* = \prod_{k\in S_{ij}}(1 - x_k) - \prod_{k\in T_{ij}}(1 - x_k), \quad i \in I,\ j \in J. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в равенство (5) и вводя обозначение $z_i = 1 - x_i$, получаем

$$\max_{j\in J} p_{ij}y_{ij}^* = p_{ij_m^i} + \sum_{l=m}^{2}(p_{ij^i_{(l-1)}} - p_{ij_l^i})\prod_{r=l}^{m}\Bigl(1 - \prod_{k\in S_{ij_r^i}} z_k + \prod_{k\in T_{ij_r^i}} z_k\Bigr)$$
$$- p_{ij_1^i}\prod_{r=1}^{m}\Bigl(1 - \prod_{k\in S_{ij_r^i}} z_k + \prod_{k\in T_{ij_r^i}} z_k\Bigr). \quad (7)$$

Используя лемму 1 и учитывая вид множеств S_{ij} и T_{ij}, раскроем скобки в выражении (7). В результате при каждом $i \in I$ получаем равенство

$$\max_{j \in J} p_{ij} y_{ij}^* = \sum_{q \in Q_i} a_q \prod_{k \in \alpha_q} z_k,$$

где каждое множество $\alpha_q \subseteq I$ является либо отрезком $[r, s]$, либо объединением двух отрезков $[r, i-1]$ и $[i+1, s]$. Следовательно, задача (1), (2) сводится к задаче (4). Теорема доказана.

Лемма 2. *Указанная в теореме сводимость может быть реализована с использованием $O(n^2 m + nm \log m)$ операций и $O(n^2 m)$ ячеек памяти.*

Доказательство. Поиск перестановок столбцов в каждой строке матрицы (p_{ij}) требует $O(nm \log m)$ операций при объеме памяти $O(mn)$. Построение множеств S_{ij} и T_{ij} реализуется за $O(n^2 m)$ операций при объеме памяти $O(n^2 m)$. На раскрытие скобок в выражении (7) с учетом леммы 1 необходимо $O(m \log m)$ операций при объеме памяти $O(m)$. Следовательно, сводимость реализуется за $O(n^2 m + nm \log m)$ операций при объеме памяти $O(n^2 m)$. Лемма 2 доказана.

Покажем, что задача (4) решается эффективно методом динамического программирования. Введем некоторые обозначения. Рассмотрим числа k, t, r такие, что $0 \leqslant k \leqslant t \leqslant r \leqslant n$. Определим множества

$$E(r) = \{(z_1, \dots, z_r) \mid z_i \in \{0, 1\}\},$$
$$B(t, r) = \{(z_1, \dots, z_r) \mid z_t = 0, z_i = 1, i \in [t+1, r]\},$$
$$A(k, t, r) = \{(z_1, \dots, z_r) \mid z_k = z_t = 0, z_i = 1, i \in [k+1, t-1] \cup [t+1, r]\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\bigcup_{t=1}^{r} B(t, r) = E(r) \setminus \{(1, \dots, 1)\}, \tag{8}$$

$$\bigcup_{k=0}^{t-1} A(k, t, r) = B(t, r), \tag{9}$$

$$\text{если } (z_1, \dots, z_r) \in A(k, t, r), \text{ то } (z_1, \dots, z_{t-1}) \in B(k, t-1). \tag{10}$$

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$. Обозначим через $P(z)$ полином (4). Рассмотрим полиномы

$$P_r(z_1, \dots, z_r) = \sum_{q \in Q \mid \alpha_q \subseteq [1, r]} b_q \prod_{k \in \alpha_q} z_k, \quad r = \overline{1, n}.$$

Введем обозначения $S(t, r) = \min\limits_{(z_1, \dots, z_r) \in B(t, r)} P_r(z_1, \dots, z_r)$. Отметим, что

$$S(0, 0) = 0, \ S(0, r) = \sum_{q \in Q \mid \alpha_q \subseteq [1, r]} b_q, \quad r = \overline{1, n}.$$

Используя равенство (9), получаем

$$S(t,r) = \min_{k=\overline{0,t-1}} \min_{(z_1,\dots,z_r)\in A(k,t,r)} P_r(z_1,\dots,z_r). \tag{11}$$

Рассмотрим величину $\min\limits_{(z_1,\dots,z_r)\in A(k,t,r)} P_r(z_1,\dots,z_r)$. Пусть

$$Q_1 = \{q \in Q \mid \alpha_q \subseteq [t+1,r]\},$$
$$Q_2 = \{q \in Q \mid \alpha_q = [s,t-1] \cup [t+1,p],\ \alpha_q \subset [k+1,r]\}.$$

Для любого набора $(z_1,\dots,z_r) \in A(k,t,r)$ имеем

$$P_r(z_1,\dots,z_r) = \sum_{q\in Q_1\cup Q_2} b_q + \sum_{q\in Q|\alpha_q\subseteq[1,t-1]} b_q \prod_{k\in\alpha_q} z_k. \tag{12}$$

Обозначим первую сумму в равенстве (12) через $f(k,t,r)$. Тогда можно записать

$$P_r(z_1,\dots,z_r) = P_{t-1}(z_1,\dots,z_{t-1}) + f(k,t,r).$$

Из (10) следует, что

$$\min_{(z_1,\dots,z_r)\in A(k,t,r)} P_r(z_1,\dots,z_r)$$
$$= \min_{(z_1,\dots,z_{t-1})\in B(k,t-1)} P_{t-1}(z_1,\dots,z_{t-1}) + f(k,t,r) = S(k,t-1) + f(k,t,r).$$

Из (11) получаем

$$S(t,r) = \min_{k=\overline{0,t-1}} \{S(k,t-1) + f(k,t,r)\}. \tag{13}$$

Так как $Z = E(n) \setminus \{(1,\dots,1)\}$ и $P(z) = P_n(z)$, то из равенства (8) следует, что

$$\min_{z\in Z} P(z) = \min_{t=\overline{1,n}} \min_{(z_1,\dots,z_n)\in B(t,n)} P_n(z_1,\dots,z_n) = \min_{t=\overline{1,n}} S(t,n).$$

Следовательно, задача (4) решается методом динамического программирования по рекуррентным соотношениям (13).

Расчет и хранение чисел $f(k,t,r)$ требуют $O(n^3|Q|)$ операций и $O(n^3)$ ячеек памяти. Здесь $|Q| = O(nm)$. Значения $S(t,r)$ вычисляются за $O(n^3)$ операций при объеме памяти $O(n^2)$. Согласно лемме 2 указанное в теореме сведение задачи (1), (2) к задаче (4) реализуется за $O(n^2m + nm\log m)$ операций при объеме памяти $O(n^2m)$. В целом временная сложность решения задачи (1), (2) составляет $O(n^4m + nm\log m)$ при объеме памяти $O(n^3 + n^2m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
4. **Ben-Ayed O.** Bilevel linear programming // Comput. Oper. Res. 1993. V. 20, N 5. P. 485–501.
5. **Shimizu K., Ishizuka Y., Bard J. F.** Nondiffentiable and two-level mathematical programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
6. **Stackelberg H. V.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.
7. **Vicente L. N., Calamai P. H.** Bilevel and multilevel programming: a bibliography review // J. Global Optim. 1994. V. 5, N 3. P. 291–306.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.,
переработанный вариант —
3 ноября 2000 г.