ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 114–118

УДК 519.87+519.854

О ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ОБЪЕМ ПРОИЗВОДСТВА*)

Ю. В. Шамардин

Рассмотрена задача о наилучшем выборе пунктов производства некоторого продукта. Объемы производства, которые предполагаются ограниченными, выбирает «производитель», но перевозку продукта в пункты спроса осуществляет «потребитель», минимизируя транспортные расходы. Требуется найти минимум производственных затрат с учетом реакции потребительской стороны. Показано, что если матрица транспортных затрат потребителя обладает свойством «сильной связности», то исходная двухуровневая задача сводится к задаче о «ближайшем соседе» и решается методом динамического программирования.

1. Постановка задачи

Двухуровневая модель выбора номенклатуры изделий исследовалась в работе [3]. Производитель стремится минимизировать свои затраты, зависящие от предпочтений потребителей продукции. Они выбирают те изделия из предлагаемых производителем, которые минимизируют закупочные и эксплуатационные расходы. Аналогично можно говорить о выборе пунктов производства некоторого продукта и потреблении его в заданных пунктах спроса. Объемы производства определяет производитель, но перевозку продукта в пункты спроса осуществляет потребитель, минимизируя суммарные транспортные расходы. Требуется найти минимум производственных затрат с учетом реакции потребительской стороны.

В [3] предполагалось, что объемы производства продукта являются «неограниченными», т. е. каждый пункт производства способен покрыть весь суммарный спрос. В данной статье рассматривается ситуация, когда объемы производства не должны превосходить заданных границ.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00482).

Обозначим через $I = \{1, \dots, n\}$ множество номеров пунктов производства и через $J = \{1, \dots, m\}$ множество номеров пунктов спроса. Производитель характеризуется следующими величинами:

a_i — максимально возможный объем производства в пункте $i \in I$;

$g_i(v)$ — затраты на производство v единиц продукта в пункте i, $0 \leqslant v \leqslant a_i$;

c_{ij} — затраты, связанные с реализацией в пункте спроса $j \in J$ единицы продукта, произведенного в пункте i;

v_i — переменные производителя — объем производства продукта в пункте i.

Потребительская сторона описывается следующими параметрами:

b_j — объем спроса в пункте j;

d_{ij} — транспортные расходы на перевозку единицы продукта из пункта производства i в пункт спроса j;

x_{ij} — переменные потребителя — объем поставок продукта из пункта производства i в пункт спроса j.

Объемы производства и спроса продукта считаем целыми числами. Через $[u, v]$ обозначим целочисленный сегмент $\{u, u+1, \dots, v\}$.

В принятых обозначениях задача заключается в минимизации суммарных затрат производителя:

$$\sum_{i \in I} g_i(v_i) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^* \to \min_{(v_i, x_{ij}^*)} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{j \in J} b_j, \quad v_i \in [0, a_i], \ i \in I, \tag{2}$$

и том условии, что вектор (x_{ij}^*) является оптимальным решением задачи потребителя: найти минимум суммарных транспортных расходов

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \to \min_{(x_{ij})} \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = v_i, \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geqslant 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \tag{4}$$

Равенство (2) гарантирует существование решения (x_{ij}^*) и означает, что лишний продукт не производится. Считается, что необходимое и достаточное условие непустоты допустимого множества двухуровневой задачи (1)–(4) выполняется, т. е.

$$\sum_{i \in I} a_i \geqslant \sum_{j \in J} b_j.$$

2. Свойство сильной связности

Модель (3), (4) представляет собой известную транспортную задачу. Напомним, что *методом северо-западного угла* называется следующий алгоритм [2] построения допустимого решения (x_{ij}) этой задачи.

Шаг 1. Положить $k = l = 1$ и $x_{ij} = 0$ при всех $i \in I$, $j \in J$.

Шаг 2. Вычислить величины $x_{kl} = \min\{v_k,\ b_l\}$, $v_k = v_k - x_{kl}$, $b_l = b_l - x_{kl}$.

Шаг 3. Если $v_k = 0$, то положить $k = k + 1$. Если $b_l = 0$, то положить $l = l + 1$.

Шаг 4. Если $k \leqslant n$ и $l \leqslant m$, то вернуться к шагу 2.

Конец

В общем случае построенный таким образом план перевозок (x_{ij}) не доставляет минимум функционалу (3), но можно выделить класс задач, в которых этот план оптимален. Введем следующее определение, аналогичное [1].

Матрица (d_{ij}) обладает свойством *сильной связности*, если при любых индексах $i < k$ и $j < l$ выполняется неравенство

$$d_{ij} - d_{kj} < d_{il} - d_{kl}, \tag{5}$$

т. е. разность $d_{ij} - d_{kj}$ монотонно возрастает, когда индекс j пробегает значения $1, \ldots, m$.

Свойство сильной связности матрицы известно в литературе как «свойство Монжа». Оно применяется в теории задачи о назначениях [5] и при построении эффективно разрешимых случаев задачи коммивояжера [4]. Нам потребуется следующая

Лемма. *Если матрица* (d_{ij}) *обладает свойством сильной связности, то задача* (3), (4) *имеет единственное оптимальное решение, и это решение строится методом северо-западного угла.*

Доказательство проведем индукцией по размерностям n и m матрицы (d_{ij}). При $n = 1$ или $m = 1$ утверждение очевидно, поскольку в этих случаях задача (3), (4) имеет единственное допустимое решение. Пусть $n \geqslant$, $m \geqslant 2$ и лемма верна для матриц с меньшим числом строк или столбцов.

Рассмотрим произвольный план перевозок (x_{ij}), допустимый в задаче (3), (4). В силу ограничений (4) имеем $x_{11} \leqslant \min\{v_1, b_1\}$. Если $x_{11} < \min\{v_1, b_1\}$, то в первом столбце и первой строке матрицы (x_{ij}) найдутся положительные элементы x_{k1} и x_{1l}, где $k, l \geqslant 2$. Положим $y = \min\{x_{k1}, x_{1l}\}$ и построим новое допустимое решение (x'_{ij}), которое

отличается от (x_{ij}) только следующими четырьмя компонентами:

$$x'_{11} = x_{11} + y, \quad x'_{1l} = x_{1l} - y,$$
$$x'_{k1} = x_{k1} - y, \quad x'_{kl} = x_{kl} + y.$$

Обозначим через f и f' значения функционала (3) на решениях (x_{ij}) и (x'_{ij}) соответственно. С учетом неравенств $y > 0$ и (5) получаем

$$f - f' = y\Big((d_{1l} - d_{kl}) - (d_{11} - d_{k1})\Big) > 0.$$

Следовательно, в любом оптимальном решении (x^*_{ij}) задачи (3), (4) должно быть $x^*_{11} = \min\{v_1, b_1\}$. Это доказывает индукционный шаг и лемму в целом.

Лемма позволяет следующим образом преобразовать рассматриваемую двухуровневую задачу.

Теорема. *Если матрица транспортных затрат* (d_{ij}) *обладает свойством сильной связности, то двухуровневая задача* (1)–(4) *сводится к задаче о «ближайшем соседе»:*

$$\sum_{i\in I} f_i(w_{i-1}, w_i) \to \min_{(w_i)} \tag{6}$$

при ограничениях

$$w_0 = 0, \quad w_n = \sum_{j\in J} b_j, \quad w_i - w_{i-1} \in [0, a_i], \quad i \in I. \tag{7}$$

Доказательство. Суммарный объем продукта, произведенного в пунктах $1, \ldots, i$, обозначим через $w_i = \sum_{k=1}^{i} v_k$. Сделаем замену переменных $v_1, \ldots, v_n$ на $w_1, \ldots, w_n$ по формуле $v_i = w_i - w_{i-1}$, $i \in I$, полагая $w_0 = 0$. Нетрудно видеть, что ограничения (2) переходят в ограничения (7).

Выразим функционал (1) через новые переменные. Рассмотрим затраты производителя на реализацию продукта, произведенного в пункте i. Определим индексы k_i и l_i из соотношений

$$\sum_{j=1}^{k_i-1} b_j \leqslant w_{i-1} \leqslant \sum_{j=1}^{k_i} b_j, \quad \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j \leqslant w_i \leqslant \sum_{j=1}^{l_i} b_j, \quad 1 \leqslant k_i \leqslant l_i \leqslant m.$$

В силу леммы оптимальное решение задачи (3), (4) имеет такую структуру, что продукт из пункта i реализуется только в пунктах спроса $j \in [k_i, l_i]$. Поэтому затраты на реализацию (обозначим их через $h_i(w_{i-1}, w_i)$) равны

$$h_i(w_{i-1}, w_i) = c_{ik_i}\left(\sum_{j=1}^{k_i} b_j - w_{i-1}\right) + \sum_{j=k_i+1}^{l_i-1} c_{ij} b_j + c_{il_i}\left(w_i - \sum_{j=1}^{l_i-1} b_j\right),$$

если $k_i < l_i$, и $h_i(w_{i-1}, w_i) = c_{ik_i}(w_i - w_{i-1})$, если $k_i = l_i$. Вместе с затратами на производство продукта получаем

$$f_i(w_{i-1}, w_i) = g_i(w_i - w_{i-1}) + h_i(w_{i-1}, w_i).$$

Таким образом, в переменных w_i, $i \in I$, функционал (1) принимает вид (6). Теорема доказана.

Задача (6), (7) решается методом динамического программирования. Положим

$$\alpha_k = \min\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i,\ \sum_{j\in J} b_j\right\},\quad k \in [1, n],$$

и введем функции

$$F_k(t) = \min_{(w_i)} \sum_{i=1}^{k} f_i(w_{i-1}, w_i),\quad t \in [0, \alpha_k],\quad k \in [1, n],$$

где минимум ищется при ограничениях $w_0 = 0$, $w_k = t$, $w_i - w_{i-1} \in [0, a_i]$, $i \in [1, k]$. Оптимум в задаче (6), (7) равен $F_n(\alpha_n)$. Обычными рассуждениями получаем рекуррентные соотношения

$$F_1(t) = f_1(0, t),\quad t \in [0, \alpha_1],$$
$$F_k(t) = \min\{F_{k-1}(s) + f_k(s, t) \mid s \in [\max\{0, t - a_k\}, t]\}.$$

Здесь $t \in [0, \alpha_k]$ при $k \in [2, n-1]$ и $t = \alpha_n$ при $k = n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.** Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
3. **Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В.** Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 3–11.
4. **Burkard R. E.** Efficiently solvable special cases of hard combinatorial optimization problems // Math. Programming. Ser. B. 1997. V. 79, N 1–3. P. 55–70.
5. **Derigs U., Goecke O., Schrader R.** Monge sequences and a simple assignment algorithm // Discrete Appl. Math. 1986. V. 15, N 2–3. P. 241–248.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.