ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 12–21

УДК 519.6

О ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКЕ КРИТЕРИЕВ В ВЕКТОРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*)

В. А. Емеличев, А. В. Пашкевич

В терминах понятий, сходных с оптимумом по Джоффриону, исследуется соотношение между эффективными решениями многокритериальной задачи с конечным множеством векторных оценок и решениями скалярной задачи оптимизации с функционалом, являющимся линейной сверткой частных критериев.

Пусть в векторной задаче

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \to \min_{x \in X}, \quad n \geqslant 2,$$

где значения частных критериев $f_i(x) \in \mathbf{R}$, множество векторных оценок

$$Y = f(X) = \{y = f(x) \mid x \in X\} \subseteq \mathbf{R}^n$$

конечно. Следуя [13], такую векторную задачу назовем дискретной.

В дальнейшем будем рассматривать лишь критериальное пространство $\mathbf{R}^n$. Поэтому естественно перейти к задаче

$$y \to \min, \quad y \in Y, \tag{1}$$

в которой, как мы уже условились, $|Y| < \infty$. Далее будем считать, что $|Y| > 1$.

Как обычно [1, 25], множество Парето (множество эффективных оценок) зададим равенством

$$P(Y) = \{y \in Y \mid p(y) = \varnothing\},$$

где $p(y) = \{y' \in Y \mid y' \leqslant y,\ y' \neq y\}$. Следуя [2, 3, 6, 14, 16, 17], введем также множество лексикографических оценок.

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Для каждой перестановки $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$ в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$ введем бинарное отношение лексикографического порядка между векторами $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$:

$$y \prec_s y' \iff y_{s_k} < y'_{s_k}, \quad \text{где } k = \min\{i \in N_n \mid y_{s_i} \neq y'_{s_i}\}.$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф97–266).

Пусть

$$L(Y,s) = \{y \in Y \mid l(y,s) = \varnothing\},$$

где $l(y,s) = \{y' \in Y \mid y' \prec_s y\}$. Элементы множества $L(Y) = \bigcup_{s \in S_n} L(Y,s)$ называются *лексикографическими оценками.* Легко видеть, что в нашем случае $(1 < |Y| < \infty)$

$$L(Y) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad L(Y) \subseteq P(Y). \tag{2}$$

Введем обозначения

$$\Lambda(Y) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} \Lambda(Y,\lambda), \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

$$\Lambda_n = \Big\{\lambda \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i \in N_n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ i \in N_n\Big\},$$

$$\Lambda(Y,\lambda) = \arg\min\Big\{\sum_{i \in N_n} \lambda_i y_i \mid y \in Y\Big\}, \qquad N_n = \{1,2,\ldots,n\}.$$

Один из важнейших подходов к нахождению эффективных оценок основан на использовании линейной свертки частных критериев $y_i = f_i(x)$. Сущность этого подхода заключается в скаляризации векторной задачи и выражается в виде следующего вполне очевидного включения, справедливого не только для дискретных задач [1, 13, 25]:

$$\Lambda(Y) \subseteq P(Y). \tag{3}$$

Задачу поиска множества Парето $P(Y)$ такого, что $\Lambda(Y) = P(Y)$, принято называть разрешимой с помощью алгоритма линейной свертки критериев. Различным аспектам разрешимости векторных дискретных задач с помощью такой свертки посвящена обширная литература (см., например, [4, 5, 7, 8, 10–13, 18, 23]).

Отметим, что для поиска множества Парето $P(Y)$ векторных дискретных задач используют также линейную свертку видоизмененных частных критериев [9, 15, 26, 27].

Широко известное множество Джоффриона (иначе: множество собственно эффективных оценок) векторной задачи в дискретном случае совпадает с множеством Парето [1, 25]. Следуя [16, 17], введем два множества $U(Y)$ и $V(Y)$, сходных с множеством Джоффриона.

Определение 1. $U(Y) = \bigcup_{s \in S_n} U(Y,s)$, где множество $U(Y,s)$ определяется следующим образом: $y^0 \in U(Y,s)$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, тогда и только тогда, когда $y^0 \in P(Y)$ и выполняются два условия:

1a) $y^0_{s_1} \leqslant y_{s_1}$ при любом $y \in Y$;

1b) $\exists \Theta > 0\ \forall y \in Y\ \forall i = 2, 3, \dots, n\ \exists j \in N_{i-1}$

$$(y^0_{s_i} > y_{s_i} \Rightarrow y^0_{s_i} - y_{s_i} + \Theta(y^0_{s_j} - y_{s_j}) \leqslant 0).$$

Определение 2. $y^0 \in V(Y)$ тогда и только тогда, когда $y^0 \in P(Y)$ и существует $\Theta > 0$ такое, что при любых $y \in Y$, $i \in N_n$ и $j \in N_n$

$$(y^0_i > y_i \quad \& \quad y^0_j < y_j) \Rightarrow y^0_i - y_i + \Theta(y^0_j - y_j) \leqslant 0. \tag{4}$$

В [16] было показано, что в случае, когда множество Парето внешне устойчиво и $P(Y) = L(Y)$, справедливы равенства

$$P(Y) = U(Y) = V(Y) = L(Y) = \Lambda(Y),$$

т. е. задача поиска множества Парето разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев. В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия такой разрешимости векторных задач дискретной оптимизации в терминах множеств $U(Y)$ и $V(Y)$ (следствия 3 и 5). Кроме того, для таких задач найдены новые качественные результаты, касающиеся связи множеств $L(Y)$, $U(Y)$, $\Lambda(Y)$, $V(Y)$ и $P(Y)$ (теорема 2).

Нам понадобится

Лемма 1 [16]. $U(Y) \subseteq \Lambda(Y)$.

Далее докажем следующую лемму.

Лемма 2. $V(Y) = P(Y)$.

Доказательство. По определению имеем $V(Y) \subseteq P(Y)$. Докажем включение $P(Y) \subseteq V(Y)$. Для произвольного решения $y^0 \in P(Y)$ определим число

$$\Theta(y^0) = \max\{h(y^0, y) \mid y \in Y\},$$

где

$$h(y^0, y) = \max\left\{\frac{y^0_i - y_i}{y_j - y^0_j} \mid (i, j) \in J(y^0, y)\right\},$$

$$J(y^0, y) = \{(i, j) \in N_n \times N_n \mid y^0_i > y_i,\ y^0_j < y_j\}.$$

Существование такого числа $\Theta(y^0)$ гарантируется неравенствами $1 < |Y| < \infty$. Следовательно, $y^0 \in V(Y)$, что и доказывает лемму 2.

Имеет место следующая

Теорема 1 [16, 17]. *Если $L(Y) \subseteq V(Y)$, то $L(Y) = U(Y)$.*

Заметим, что в [16, 17] теорема 1 доказана без предположения о дискретности задачи, т. е. при любом множестве векторных оценок.

С учетом (2) и леммы 2 из теоремы 1 следует

Лемма 3. $L(Y) = U(Y)$.

Наконец, применяя леммы 1–3 и включение (3), получаем основной результат.

Теорема 2. *Для всякой векторной дискретной задачи* (1) *справедливы соотношения*

$$L(Y) = U(Y) \subseteq \Lambda(Y) \subseteq V(Y) = P(Y).$$

Отсюда вытекает следующий известный результат.

Следствие 1 [2, 3, 6, 14, 17, 21, 24]. $L(Y) \subseteq \Lambda(Y)$.

Следствие 1 утверждает, что векторная дискретная задача поиска множества лексикографических оценок $L(Y)$ разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев.

Непосредственно из теоремы 2 получаем сопутствующие результаты.

Следствие 2. $L(Y) = \Lambda(Y) \Longleftrightarrow U(Y) = \Lambda(Y)$.

Следствие 3. $P(Y) = \Lambda(Y) \Longleftrightarrow V(Y) = \Lambda(Y)$.

Следствие 4. $L(Y) = \Lambda(Y) = P(Y) \Longleftrightarrow U(Y) = V(Y)$.

Согласно следствиям 3 и 4 как равенство $V(Y) = \Lambda(Y)$, так и равенство $V(Y) = U(Y)$ является достаточным условием для разрешимости задачи поиска множества Парето с помощью алгоритма линейной свертки критериев.

Воспользовавшись известным равенством

$$\Lambda(Y) = P(\mathrm{conv}Y) \cap Y,$$

установленным для дискретных задач в [23] (см. также [22]), из следствия 3 и теоремы 2 попутно получаем следующие три следствия. Здесь $\mathrm{conv}Y$ — выпуклая оболочка множества Y.

Следствие 5. $P(Y) = \Lambda(Y) \Longleftrightarrow P(Y) \subseteq P(\mathrm{conv}Y) \Longleftrightarrow \Lambda(Y) = V(Y)$.

Следствие 6. $\Lambda(Y) = P(\mathrm{conv}Y) \cap V(Y)$.

Следствие 7. *Если* $L(Y) = P(Y)$, *то*

$$P(\mathrm{conv}Y) \cap U(Y) = \Lambda(Y) = P(\mathrm{conv}Y) \cap V(Y).$$

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Покажем, что включение $U(Y) \subseteq \Lambda(Y)$ (см. теорему 2) может быть строгим.

Пусть $n = 2$, $Y = \{y', y'', y'''\}$, $y' = (1, 8)$, $y'' = (3, 3)$, $y''' = (8, 1)$. Тогда $L(Y) = \{y', y'''\}$. При $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ имеем $y'' \in \Lambda(Y, \lambda) \subseteq \Lambda(Y)$. Следовательно, с учетом леммы 3 получаем $U(Y) \neq \Lambda(Y)$.

Пример 2. Убедимся, что и включение $\Lambda(Y) \subseteq V(Y)$ (см. теорему 2) может быть строгим.

Пусть $n = 2$, $Y = \{y', y'', y'''\}$, $y' = (2,8)$, $y'' = (6,6)$, $y''' = (8,2)$. Тогда из леммы 2 следует, что $P(Y) = V(Y) = \{y', y'', y'''\}$. Вместе с тем при любом $\lambda \in \Lambda_2$ имеем

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i y'_i,\ \sum_{i=1}^{2} \lambda_i y'''_i\right\} \leqslant 5, \qquad \sum_{i=1}^{2} \lambda_i y''_i = 6.$$

Поэтому $y'' \notin \Lambda(Y)$. Следовательно, $\Lambda(Y) \neq V(Y)$.

Пример 3. Покажем, что утверждение, обратное следствию 7, неверно.

Пусть $n = 2$, $Y = \{y', y'', y'''\}$, $y' = (1,8)$, $y'' = (7,7)$, $y''' = (8,1)$. Нетрудно убедиться, что $L(Y) = \{y', y'''\}$. В силу леммы 3 справедливо равенство $L(Y) = U(Y)$.

Непосредственно из определения множества $\Lambda(Y)$ следует, что $y' \in \Lambda(Y, \lambda')$ при $\lambda' = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ и $y''' \in \Lambda(Y, \lambda''')$ при $\lambda''' = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Поэтому справедливо включение $\{y', y'''\} \subseteq \Lambda(Y)$. Вместе с тем при любом $\lambda \in \Lambda_2$

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i y'_i, \sum_{i=1}^{2} \lambda_i y'''_i\right\} \leqslant \frac{9}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{2} \lambda_i y''_i = 7,$$

т. е. $y'' \notin \Lambda(Y)$. Следовательно, $\Lambda(Y) = \{y', y'''\}$.

Нетрудно видеть, что $P(Y) = \{y', y'', y'''\}$. Учитывая лемму 2, убеждаемся в том, что $V(Y) = P(Y) = \{y', y'', y'''\}$.

Из сказанного следует, что

$$\{y', y'''\} = L(Y) = U(Y) = \Lambda(Y) \neq V(Y) = P(Y) = \{y', y'', y'''\},$$

т. е. $L(Y) \neq P(Y)$.

Так как $\Lambda(Y) = P(\mathrm{conv}Y) \cap P(Y) \subseteq P(\mathrm{conv}Y)$, то $P(\mathrm{conv}Y) \cap \Lambda(Y) = \Lambda(Y)$. Следовательно,

$$P(\mathrm{conv}Y) \cap U(Y) = \Lambda(Y).$$

Поэтому с учетом следствия 6 имеем

$$P(\mathrm{conv}Y) \cap U(Y) = \Lambda(Y) = P(\mathrm{conv}Y) \cap V(Y).$$

Однако, как уже установлено, $L(Y) \neq P(Y)$.

Следующие примеры показывают, что при $|Y| = \infty$ теорема 2 неверна.

Пример 4. Пусть $n = 2, Y = \{y = (y_1, y_2) \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant 1, y_2 = 1 - \sqrt{y_1}\}$, $s' = (1,2), s'' = (2,1)$. Тогда очевидно, что $P(Y) = Y$, $y^0 = (0,1) \in L(Y, s') \subseteq L(Y)$.

Покажем, что $L(Y) \neq U(Y)$. Ясно, что при любом $\Theta > 0$ имеем

$$y' = \left(\frac{1}{\Theta^2+1},\ 1-\sqrt{\frac{1}{\Theta^2+1}}\right) \in Y, \quad 1 = y^0_{s'_2} > y'_{s'_2} = 1-\sqrt{\frac{1}{\Theta^2+1}}.$$

В то же время после несложных преобразований получаем

$$\frac{y^0_{s'_2} - y'_{s'_2}}{y'_{s'_1} - y^0_{s'_1}} = \frac{y^0_2 - y'_2}{y'_1 - y^0_1} > \Theta.$$

Ввиду (4) это означает, что $y^0 \notin U(Y, s')$.

Далее, так как $y'' = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \in Y$ и $y^0_{s''_1} = 1 > \frac{1}{2} = y''_{s''_1}$, то $y^0 \notin U(Y, s'')$.

Итак, $y^0 \notin U(Y) = U(Y, s') \cup U(Y, s'')$. Следовательно, $L(Y) \neq U(Y)$.

Пример 5. Пусть множество Y имеет тот же вид, что и в примере 4. Поэтому по-прежнему $P(Y) = Y$. Рассмотрим два вектора

$$y^0 = (0,1) \in P(Y), \quad y = \left(\frac{1}{\Theta^2+1},\ 1-\sqrt{\frac{1}{\Theta^2+1}}\right) \in P(Y).$$

Ясно, что при любом числе $\Theta > 0$ верны неравенства

$$y^0_2 = 1 > y_2, \quad y^0_1 = 0 < y_1,$$

из которых после несложных преобразований получаем

$$\frac{y^0_2 - y_2}{y_1 - y^0_1} > \Theta.$$

Поэтому $y^0 \notin V(Y)$. Следовательно, $V(Y) \neq P(Y)$.

Следующий пример показывает, что в случае, когда $|Y| = \infty$, $U(Y) \neq \varnothing$ и $V(Y) \neq \varnothing$, не только не выполняется включение $U(Y) \subseteq V(Y)$, но эти множества могут даже не пересекаться.

Пример 6. Пусть $n = 4$,

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant 2,\ y_2 = {y_1}^2,\ y_3 = (2-y_1)^2,\ y_4 = 2 - y_1\}.$$

Поскольку подробное изложение технически слишком громоздко, ограничимся лишь схемой решения.

Пусть $y' = (0,0,4,2)$, $y'' = (2,4,0,0)$. Тогда очевидно, что $y', y'' \in P(Y)$. Для доказательства включений $y' \in U(Y, s')$ и $y'' \in U(Y, s'')$, где $s' = (1,2,3,4)$, $s'' = (4,3,2,1)$, в качестве Θ (см. условие 1b) достаточно взять число 4, поскольку неравенства 1a из определения 1 в этих случаях очевидны.

Методом от противного нетрудно показать, что множество $U(Y)$ не содержит других векторов, поэтому $U(Y) = \{y', y''\}$.

Чтобы убедиться в том, что $y' \notin V(Y)$, достаточно рассмотреть вектор

$$y = \left(\frac{1}{\Theta+1}, \frac{1}{(\Theta+1)^2}, \left(2 - \frac{1}{\Theta+1}\right)^2, 2 - \frac{1}{\Theta+1}\right) \in Y.$$

Тогда для любого числа $\Theta > 0$ справедливы неравенства

$$y_3' > y_3,\ y_2' < y_2, \quad y_3' - y_3 + \Theta(y_2' - y_2) > 0,$$

которые и означают, что вектор $y' \notin V(Y)$.

Аналогично, взяв вектор

$$z = \left(2 - \frac{1}{\Theta+1}, \left(2 - \frac{1}{\Theta+1}\right)^2, \frac{1}{(\Theta+1)^2}, \frac{1}{\Theta+1}\right) \in Y,$$

легко убеждаемся в справедливости неравенств

$$y_1'' > z_1, \quad y_3'' < z_3, \quad y_1'' - z_1 + \Theta(y_3'' - z_3) > 0$$

при любом $\Theta > 0$. Отсюда следует, что $y'' \notin V(Y)$.

Для того чтобы доказать непустоту множества $V(Y)$, рассмотрим вектор $y^0 = (1, 1, 1, 1)$. Прежде всего ясно, что $y^0 \in P(Y)$. Далее, выбрав (см. определение 2) число $\Theta = 2$ и перебрав всевозможные пары $(i, j) \in N_n \times N_n$, $i \neq j$, убеждаемся в том, что импликация (4) верна во всех этих случаях, т. е. $y^0 \in V(Y)$.

Итак, в рассматриваемом примере

$$U(Y) \cap V(Y) = \varnothing, \quad U(Y) \neq \varnothing, \quad V(Y) \neq \varnothing.$$

В заключение заметим, что в случае бикритериальной дискретной задачи из теоремы 2 и следствия 1 из [20] вытекает

Следствие 8. *В случае двух критериев ($n = 2$) формула*

$$\forall y^* \in P(Y)\ \forall y, y' \in Y \left(((y_1 < y_1^* < y_1')\&(y_2' < y_2^* < y_2)) \Longrightarrow \begin{vmatrix} y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \\ y_1' - y_1 & y_2' - y_2 \end{vmatrix} \geqslant 0 \right)$$

является необходимым и достаточным условием выполнения равенств

$$\Lambda(Y) = V(Y) = P(Y).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.** Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.
2. **Емеличев В. А., Гирлих Э., Янушкевич О. А.** Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 2. С. 3–14.
3. **Емеличев В. А., Гладкий А. А., Янушкевич О. А.** О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1996. № 3. С. 82–86.
4. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки критериев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 7. С. 1082–1094.
5. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 1. С. 9–11.
6. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 3. С. 365–371.
7. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** Разрешимость векторной траекторной задачи на «узкие места» с помощью алгоритма линейной свертки критериев // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 4. С. 29–33.
8. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** О разрешимости одного класса дискретных векторных задач с помощью алгоритма линейной свертки критериев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 11. С. 1404–1408.
9. **Емеличев В. А., Пашкевич А. В., Янушкевич О. А.** Условия эффективности решения векторной задачи оптимизации // Дискрет. математика. 1999. Т. 11, вып. 1. С. 140–145.
10. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** К вычислительной сложности дискретных многокритериальных задач // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 1. С. 78–85.
11. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Многокритериальные задачи об остовах графа // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 3. С. 544–547.
12. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 2. С. 171–183.

13. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискрет. математика. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 3–33.

14. **Емеличев В. А., Янушкевич О. А.** Алгоритм линейной свертки в последовательной оптимизации критериев. Минск, 1996. 28 с. (Препринт / АН Беларуси. Ин-т техн. кибернетики; № 5).

15. **Емеличев В. А., Янушкевич О. А.** Условия Парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 153–160.

16. **Емеличев В. А., Янушкевич О. А.** О задачах лексикографической оптимизации // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 4. С. 30–37.

17. **Емеличев В. А., Янушкевич О. А.** Линейная свертка критериев в задачах лексикографической оптимизации // Докл. АН Беларуси. 1999. Т. 43, № 2. С. 29–32.

18. **Кравцов М. К.** Неразрешимость векторной дискретной оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 2. С. 89–96.

19. **Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** О разрешимости векторной задачи с помощью алгоритма линейной свертки критериев // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 4. С. 502–509.

20. **Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** Линейная свертка критериев в бикритериальной оптимизации // Изв. вузов. Математика. 1998. № 12. С. 63–70.

21. **Лебедев Б. Д., Подиновский В. В., Стырикович Р. С.** Задача оптимизации по упорядоченной совокупности критериев // Экономика и мат. методы. 1971. Т. 7, вып. 4. С. 612–616.

22. **Меламед И. И.** Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1997. № 9. С. 119–125.

23. **Меламед И. И., Сигал И. Х.** Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 8. С. 1260–1270.

24. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.

25. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1986.

26. **Burkard R. E., Keiding H., Krarup J., Pruzan P. M.** A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0-1 programming problems // Comput. Oper. Res. 1981. V. 8, N 2. P. 241–247.

27. **Emelichev V. A., Yanushkevich O. A.** The tests of efficiency for a discrete multicriteria optimization problem // Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation. Romania. 1998. V. 27, N 2. P. 237–242.

Адрес авторов:

Белорусский
государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: eva@mmf.bsu.unibell.by

Статья поступила
29 октября 1999 г.,
переработанный вариант —
28 августа 2000 г.