ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 22–46

УДК 519.854

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА: СЛОЖНОСТЬ, АЛГОРИТМЫ, ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ*)

А. В. Еремеев, Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов

Задача о покрытии множества широко известна в дискретной оптимизации и имеет многочисленные приложения. В настоящей статье содержится обзор результатов, связанных со структурой и сложностью этой задачи, алгоритмами ее решения и результатами вычислительных экспериментов. Особое внимание уделяется последним достижениям.

Введение

Комбинаторная постановка задачи о покрытии множества состоит в следующем. Пусть даны множество $M = \{1, \dots, m\}$ и набор его подмножеств $M_1, \dots, M_n$ таких, что $\bigcup\limits_{j=1}^{n} M_j = M$. Совокупность подмножеств M_j, $j \in J \subseteq \{1, \dots, n\}$, называется *покрытием* множества M, если $\bigcup\limits_{j \in J} M_j = M$. Каждому M_j приписан вес $c_j \geqslant 0$. Требуется найти покрытие минимального суммарного веса. Задача называется *невзвешенной*, если все подмножества M_j имеют единичные веса.

Часто задача о покрытии формулируется как задача целочисленного программирования: найти

$$f^*(c, A) = \min\{cx \mid Ax \geqslant e,\ x \in \{0,1\}^n\}. \tag{1}$$

Здесь $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ с элементами $a_{ij} = 1$, если $i \in M_j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае; e — m-вектор из единиц; $c = (c_1, \dots, c_n)$ — вектор весов; $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор переменных с компонентами $x_j = 1$, если M_j входит в покрытие, и $x_j = 0$ в противном случае.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 96–0820) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 586).

Кроме того, в литературе рассматриваются обобщенные задачи о покрытии, в которых вместо e используется вектор натуральных чисел [4, 81, 98], и специальные классы задач [22, 32, 37, 72].

Значительное внимание уделяется задачам о покрытиях в графе, в частности задаче о вершинном покрытии, которая может быть сформулирована следующим образом. Пусть $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Для каждой вершины $v \in V$ определен вес $w_v > 0$. Подмножество $C \subseteq V$ называется *вершинным покрытием*, если каждое ребро из E инцидентно хотя бы одной вершине из C. Требуется найти вершинное покрытие минимального веса. Рассматриваются также задачи о покрытии вершин графа его вершинами или ребрами (задачи о доминирующем множестве вершин и о реберном покрытии) [18].

Задача о покрытии множества относится к числу NP-трудных. В частности, NP-трудной является даже невзвешенная задача о вершинном покрытии в случае, когда G — планарный граф и степени всех его вершин равны трем [5]. Интересен результат Ю. И. Журавлева [9] о сложности задачи о покрытии множеств. Он установил, что в классе локальных алгоритмов конечного индекса задача о вхождении подмножества M_j в какое-либо оптимальное покрытие не разрешима. К задаче о покрытии сводятся многие известные задачи дискретной оптимизации: задачи стандартизации, упаковки и разбиения множества [84], задача о наибольшей клике [5], задача минимизации полинома от булевых переменных [1] и др. Известна также и обратная сводимость задачи о покрытии к этим задачам [2, 5, 84].

На практике задачи о покрытии возникают при размещении пунктов обслуживания [18, 25], в системах информационного поиска, при назначении экипажей на транспорте [17, 18, 56, 57], проектировании интегральных схем [11] и конвейерных линий [55] и т. д. Задача о вершинном покрытии может использоваться при разработке систем контроля и наблюдения [25], в построении помехоустойчивых алгоритмов передачи информации [3, 53, 78], при диагностике оборудования [53, 78] и в других областях.

Значительное внимание в данной работе уделяется алгоритмическим вопросам, связанным с точным и приближенным решением задачи о покрытии. В п. 1 обсуждаются свойства релаксационных многогранников задачи, рассматриваются некоторые задачи специальной структуры и вопросы сложности приближенного решения этой задачи и ее частных случаев. В п. 2 излагаются основные идеи, используемые в алгоритмах решения задачи о покрытии, приводятся гарантированные оценки точности приближенных алгоритмов и результаты вероятностных

исследований. Информация о тестовых примерах, применяемых для сравнения алгоритмов, содержится в п. 3. Из-за ограниченности объема в данной статье доказательства опущены, а на многие важные результаты приведены лишь ссылки.

Необходимо отметить, что не затрагиваются также вопросы упрощения дизъюнктивных нормальных форм и их связь с задачей о покрытии. Материал по этой проблематике имеется в [10, 11, 29, 32]. Кроме того, не рассматриваются задачи о покрытии, возникающие в теории кодирования [23], а также задачи о покрытии шарами и другими телами в евклидовом пространстве [14, 30]. Не обсуждаются и практические приложения задачи о покрытии.

1. Некоторые свойства задачи о покрытии

1.1. Многогранники задачи

Исследованию релаксационных многогранных множеств $\Omega = \{x \in R^n \mid Ax \geqslant e,\ 0 \leqslant x \leqslant e\}$ и $\Omega' = \{x \in R^n \mid Ax \geqslant e,\ x \geqslant 0\}$ задачи о покрытии посвящены многие работы. Легко видеть, что при любом векторе $c \geqslant 0$ выполнено равенство

$$\min_{x\in\Omega} cx = \min_{x\in\Omega'} cx.$$

Многогранник Ω является целочисленным (т. е. все вершины имеют целочисленные координаты) тогда и только тогда, когда этим свойством обладает и многогранник Ω'. Матрица A, для которой многогранник Ω' является целочисленным, называется *идеальной*. Целочисленные многогранники для задачи о покрытии представляют большой интерес, так как задача в этом случае сводится к решению ЛП-релаксации $\min\{cx \mid x \in \Omega'\}$ и, следовательно, полиномиально разрешима. Вес оптимального решения ЛП-релаксациии далее будем обозначать через $\bar{f}(c, A)$.

В [71] установлено, что для целочисленности Ω' достаточно, чтобы матрица A была уравновешенной, т. е. A не содержала квадратных подматриц нечетной размерности, в которых сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна 2 (см. также [6, 33, 54]). Заметим, что любая абсолютно унимодулярная (0,1)-матрица является уравновешенной [6].

Большой вклад в исследование идеальных матриц внес А. Лехман. В частности, он доказал следующую теорему. Пусть B — квадратная подматрица матрицы A, $\overline{B}$ — подматрица, полученная пересечением столбцов, образующих подматрицу B, со всеми оставшимися строками матрицы A (подматрица $\overline{B}$ может быть пуста). Предположим, что векторы $\hat{e}$ и $\bar{e}$, состоящие из единиц, имеют размерности, равные числу столбцов матрицы B и числу строк матрицы $\overline{B}$ соответственно.

Теорема 1 [85]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Каждая квадратная невырожденная подматрица B матрицы A такая, что $B^{-1}\hat{e} > 0$ и $\overline{B}B^{-1}\hat{e} \geqslant \bar{e}$, в каждом столбце и в каждой строке содержит ровно одну единицу.*

(2) *Для любых $c \in R^n_+$ и $y \in R^n_+$ таких, что $Ay \geqslant e$ и $f^*(c, A) \geqslant 1$, справедливо неравенство $cy \geqslant 1$.*

(3) $\bar{f}(c, A) = f^*(c, A)$ *при любом* $c \in R^n_+$.

Последнее утверждение означает, что матрица A идеальна. Пусть $N_i = \{j \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ i \in M_j\}$, $i = 1, \ldots, m$. Будем говорить, что строка i *доминирует* строку k, $k \neq i$, если $N_k \subseteq N_i$.

Известно [85], что свойством идеальности обладают также и подматрицы, полученные из идеальной матрицы в результате следующих двух операций:

удаление столбца (операция исключения из матрицы столбца j вместе со всеми строками с индексами из M_j);

сжатие столбца (исключение столбца с последующим удалением всех строк, которые доминируют какие-либо другие строки).

Естественно рассмотреть *минимальные неидеальные* матрицы, т. е. матрицы, которые не являются идеальными, но любые их подматрицы, полученные удалением и сжатием столбцов, идеальны. В работе [86] формулируются необходимые условия того, чтобы матрица была неидеальной и минимальной. Установлено, что к таким матрицам относятся квадратные матрицы порядка n вырожденной проективной плоскости F_{n-1}, отвечающие задаче о покрытии, в которой $M_1 = \{2, \ldots, n\}$, $M_j = \{1, j\}$, $j = 2, \ldots, n$. Одним из следствий результата А. Лехмана [86] является наличие единственной дробной вершины у полиэдра Ω' с минимальной неидеальной матрицей. Другие примеры минимальных неидеальных матриц имеются в работе [61].

Э. Балашем в [40] получена нижняя оценка величины $\bar{f}(e, A)$ для невзвешенных задач о покрытии с фиксированным значением оптимального целочисленного решения. Обозначим через $B(n, p)$ невзвешенную задачу о покрытии с матрицей A, имеющей $\binom{n}{p-1}$ различных строк, в каждой из которых содержится ровно $p - 1$ нулей. Очевидно, что для $B(n, p)$ мощность минимального покрытия равна p.

Теорема 2 [40]. *Пусть p удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant p \leqslant n$. Тогда для ЛП-релаксаций задач о покрытии таких, что $f^*(e, A) = p$, справедлива оценка*

$$\bar{f}(e, A) \geqslant \frac{n}{n - p + 1},$$

причем равенство достигается для ЛП-релаксации задачи $B(n, p)$.

Там же получена верхняя оценка отношения оптимальных значений задач и их линейных релаксаций.

Теорема 3 [40]. *Для невзвешенной задачи о покрытии не более чем с n переменными выполнено равенство*

$$\max_A \left\{ \frac{f^*(e,A)}{\bar{f}(e,A)} \right\} = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \textit{если } n \textit{ четное}, \\ \frac{n}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}, & \textit{если } n \textit{ нечетное}. \end{cases}$$

В [88] найдена верхняя оценка этого отношения как функция от m. Для общей задачи о покрытии аналогичный результат следует из оценки, полученной В. Хваталом [58] при анализе жадного алгоритма. Позднее данная оценка была доказана Н. Н. Кузюриным для задачи в более общей постановке [21]. Пусть элементы матрицы A — неотрицательные целые числа и $b \in Z^m_+$. Тогда отношение оптимальных значений целевой функции задачи $\min\{cx \mid Ax \geqslant b,\ x \in Z^n_+\}$ и ЛП-релаксации $\min\{cx \mid Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}$ не превышает $(1 + \ln be)\max\limits_{i,j} a_{ij}$.

Многогранник ЛП-релаксации играет особую роль при анализе задачи о вершинном покрытии. В этом случае ЛП-релаксация обладает свойством *полуцелочисленности*, т. е. существует оптимальное решение $\check{x}$ с компонентами $0, \frac{1}{2}, 1$ (см., например, [81]). Такое решение может быть найдено потоковым алгоритмом на вспомогательной сети, состоящей из $2(n+1)$ вершин и $2(m+n)$ дуг. В [91] установлено, что в целочисленных компонентах вектор $\check{x}$ совпадает с некоторым оптимальным решением задачи (1). Таким образом, размерность задачи о вершинном покрытии может быть понижена с помощью процедуры предварительной обработки, состоящей в поиске вектора $\check{x}$ и фиксации его целочисленных компонент.

Наряду с Ω и Ω' ведутся исследования многогранника $\operatorname{conv}(\Omega \cap Z^n)$ [44, 45, 54, 62]. В [44] описан класс фасет многогранника задачи о покрытии, определяемых неравенствами вида $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geqslant 2$, где $\alpha_j \in \{0,1,2\}$. В [45] доказано, что любая такая фасета может быть получена из неравенств, имеющих только три ненулевых коэффициента. В [62] описан класс фасет вида $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geqslant \beta$, где $\alpha_j \in \{0,1\}$ и $\beta > 0$ — целое.

В последние годы для исследования задач целочисленного программирования, анализа и построения алгоритмов их решения развивается метод регулярных разбиений [13]. Многие результаты, в том числе для задачи о покрытии при $c \in Z^n_+$, получены на основе *L-разбиения*, которое определяется следующим образом. Точки x, y из R^n ($x \succ y$) эквивалентны, если не существует точки $z \in Z^n$ такой, что $x \succeq z \succeq y$.

Здесь $\succ, \succeq$ — символы лексикографического сравнения. Элементы данного разбиения называются *L-классами*. L-разбиение обладает свойством согласованности с лексикографическим порядком, т. е. элементы R^n/L могут быть лексикографически упорядочены. Пусть $V_1, V_2 \in R^n/L$. Множество V_1 лексикографически больше множества V_2 ($V_1 \succ V_2$), если $x \succ x'$ для любых $x \in V_1$, $x' \in V_2$. Так как для ограниченного множества S фактор-множество S/L конечно, то оно может быть представлено в виде $S/L = \{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$, где $V_k \succ V_{k+1}$, $k = 1, \ldots, r-1$. Установлено, что многогранник Ω задачи о покрытии обладает *альтернирующей L-структурой*, т. е. в Ω/L допустимые целочисленные точки и дробные L-классы чередуются при их лексикографическом упорядочении, причем $V_1, V_r \in Z^n$.

В этом методе рассматривается также релаксационный многогранник

$$\widetilde{\Omega} = \{(x_0, x) \in R^{n+1} \mid cx = x_0,\ x \in \Omega\}.$$

Решение лексикографической задачи $\operatorname{lex}\min(\widetilde{\Omega} \cap Z^{n+1})$ равносильно нахождению лексикографически минимального оптимального решения исходной задачи о покрытии.

Введем множество $\widetilde{\Omega}_*$, называемое *дробным накрытием*:

$$\widetilde{\Omega}_* = \{y \in \tilde{\Omega} \mid y \prec \tilde{\Omega} \cap Z^{n+1}\}.$$

Оно соответствует части многогранника $\widetilde{\Omega}$, последовательно исключаемой в различных методах решения целочисленных задач, основанных на аппарате непрерывной оптимизации. Фактор-множество $\widetilde{\Omega}_*/L$ называется *L-накрытием*. Мощность L-накрытия может рассматриваться как обобщение разрыва двойственности $f^*(c, A) - \bar{f}(c, A)$.

С помощью данного подхода получены верхние и нижние оценки числа итераций двойственного дробного процесса отсечения при использовании L-регулярных отсечений [13]. Правильное отсечение называется *L-регулярным*, если оно исключает элемент L-разбиения, содержащий лексикографический минимум текущего многогранника (например, L-регулярными являются некоторые отсечения Гомори). С помощью L-разбиения вводится понятие *глубины отсечения*, под которой понимается число L-классов, полностью исключаемых из L-накрытия текущей задачи.

Пусть $I(\widetilde{\Omega})$ — число отсечений, используемых при решении задачи о покрытии, $H(\widetilde{\Omega})$ — верхняя оценка глубины отсечений. Тогда справедливы неравенства [13]

$$H(\widetilde{\Omega})^{-1}|\widetilde{\Omega}_*/L| \leqslant I(\widetilde{\Omega}) \leqslant |\widetilde{\Omega}_*/L|.$$

Для класса так называемых вполне регулярных отсечений, в котором содержатся отсечения B-алгоритма из [15] и алгоритма из [36], показано, что $H(\widetilde{\Omega}) = n+1$ (см., например, [13]).

1.2. Специальные классы задач

Пусть $B^n = \{0,1\}^n$ — единичный n-мерный куб. Под q-м слоем в B^n понимается множество $B^n_q = \{x \in B^n \mid \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = q\}$. Пусть $l < k$, $\zeta \in B^n_l$ и $\xi \in B^n_k$. Вершина ξ *покрывает* вершину ζ, если $\zeta_j \leqslant \xi_j$ при любом $j = 1,\dots,n$. Требуется найти мощность минимального покрытия вершин l-го слоя в B^n вершинами k-го слоя, которая обозначается через $M(n,k,l)$. Данная задача о покрытии имеет матрицу A размера $\binom{n}{l} \times \binom{n}{k}$, в каждой строке которой содержится $\binom{n-l}{k-l}$ единиц, а в каждом столбце — $\binom{k}{l}$ единиц. Такие задачи имеют большое значение в комбинаторике. Очевидно, что справедлива оценка $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$. При фиксированных k и l, $l < k$, для семейства задач о покрытии l-го слоя в B^n вершинами k-го слоя предложен эффективный алгоритм [22], позволяющий строить такие *асимптотически хорошие* покрытия $J_n(k,l)$, что $|J_n(k,l)| \cdot \binom{k}{l}/\binom{n}{l} \to 1$ при $n \to \infty$. Оценки и точные значения $M(n,k,l)$ при некоторых значениях параметров n, k, l даны в [19, 32, 37]. С помощью этих результатов могут быть получены оценки оптимальных решений и для более широкого класса задач [19].

Пусть U — n-элементное множество, l,k — целые числа ($l < k < n$). Подмножество множества U, состоящее из q элементов, назовем q-подмножеством. *Системой Штейнера* называется такое семейство S k-подмножеств из U, что любое l-подмножество из U содержится ровно в одном k-подмножестве. Вопрос о существовании систем Штейнера для параметров n, k, l связан с величиной $M(n,k,l)$. Очевидно, что мощность систем Штейнера, если они существуют, равна $\binom{n}{l}/\binom{k}{l}$. Для соответствующей задачи о покрытии это означает, что разрыв двойственности равен 0. С поиском некоторых систем Штейнера связан вопрос о существовании проективных плоскостей заданного порядка [19, 37]. Системы Штейнера имеют и прикладное значение, в частности в области планирования экспериментов.

При численной проверке различных алгоритмов решения задачи о покрытии в качестве тестовых примеров используются так называемые задачи Штейнера. Это задачи о покрытии с параметрами n и $m = \binom{n}{2}/3$, в которых строки матрицы A составляют систему троек Штейнера, т. е. такой набор троек n-элементного множества, что любая пара его элементов содержится ровно в одной тройке. Необходимым и достаточным условием существования систем троек Штейнера

является условие $n \equiv 1,3 \pmod 6$ [35]. Для любого такого n система Штейнера может быть построена рекурсивным способом из систем троек Штейнера меньшего порядка.

В [31] исследуется L-структура невзвешенных задач о покрытии $B(n,p)$ из семейства, предложенного Э. Балашем [40]. Обозначим через $K(n,p)$ лексикографическую задачу, соответствующую задаче $B(n,p)$. В [31] показано, что мощность L-накрытия в задаче $K(n,p)$ может расти экспоненциально с увеличением числа переменных.

Теорема 4 [31]. *Для задачи $K(n, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$ справедлива оценка*

$$|\widetilde{\Omega}_*/L| \geqslant \frac{2^{n-4}}{n-3}.$$

Число ограничений в указанных задачах также экспоненциально зависит от n. Легко показать, что эти задачи являются трудными для метода ветвей и границ (схемы Лэнд и Дайг). В [31] рассмотрены задачи $G(k)$ с $n = 3k$ и матрицей A, на диагонали которой расположены блоки размера 3×3 с двумя единицами в каждой строке и в каждом столбце.

Теорема 5 [31]. *Для задачи $G(k)$ справедлива оценка*

$$|\widetilde{\Omega}_*/L| \geqslant \frac{3^{\frac{n}{3}} - 3}{8}.$$

При решении этих задач первым алгоритмом Гомори число используемых L-регулярных отсечений не превосходит n, в то время как упомянутый метод ветвей и границ требует 2^{k+1} ветвлений.

1.3. Сложность приближенного решения

Ввиду того, что в общем виде задача о покрытии NP-трудна, естественно искать приближенные алгоритмы полиномиальной сложности, доставляющие решения со значениями целевой функции, близкими к оптимуму. Принято говорить, что приближенный алгоритм для задачи минимизации имеет *относительную погрешность* δ, если для произвольной индивидуальной задачи получаемое им решение превышает оптимум не более чем в δ раз.

Интересные результаты по сложности приближенного решения NP-трудных задач получены с использованием вероятностных методов и новой вероятностной характеризации класса NP. Установлено [96], что существование полиномиального алгоритма для задачи о покрытии, имеющего относительную погрешность $\delta = \alpha \ln m$, где $\alpha > 0$ — некоторая константа, влечет равенство $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$. В [69] доказано, что если справедлива гипотеза $\mathrm{NP} \neq \mathrm{DTIME}(n^{O(\log\log n)})$, то при любом $\varepsilon > 0$ для задачи

о покрытии не существует полиномиального алгоритма с относительной погрешностью $\delta = (1-\varepsilon)\ln m$. Известная сводимость задачи о покрытии к задаче о доминирующем множестве вершин в графе сохраняет отношение суммарного веса покрытия к оптимуму. Таким образом, обе задачи одинаково трудны с точки зрения приближенного решения с заданной точностью.

В отличие от общей постановки для задачи о вершинном покрытии известен приближенный полиномиальный алгоритм [46] с относительной погрешностью $\delta = 2$. Тем не менее, как показано в [79], для этой задачи не существует полиномиального приближенного алгоритма с относительной погрешностью $\delta < 7/6$ при условии, что $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. Нижние оценки точности приближенного решения получены и в частных случаях задачи о вершинном покрытии. В [67] установлено, что для всюду ε-плотных графов приближенное решение задачи о вершинном покрытии с относительной погрешностью $\delta < \frac{7+\varepsilon}{6+2\varepsilon}$ является NP-трудной проблемой (граф $G = (V, E)$ называется *всюду ε-плотным*, если $\min\limits_{v\in V} \deg v \geqslant \varepsilon|V|$). В [59] найдена нижняя оценка точности, когда степени вершин ограничены сверху.

Одна из первых оценок сложности приближенного решения задачи о вершинном покрытии была получена Р. Г. Нигматуллиным в терминах абсолютной погрешности [28]. Из результатов этой работы для невзвешенной задачи о вершинном покрытии следует NP-трудность задачи отыскания покрытия, мощность которого превосходит минимальную мощность не более чем на $|V|^{1-\varepsilon}$ при данном $\varepsilon > 0$.

2. Алгоритмы

2.1. Приближенные алгоритмы

Для задач о покрытии разработано значительное число приближенных алгоритмов с априорными оценками точности получаемых решений. Одним из первых приближенных алгоритмов, предложенных для невзвешенной задачи о покрытии, является жадный алгоритм. В этом алгоритме на каждой итерации в качестве очередного элемента покрытия выбирается подмножество, покрывающее наибольшее число элементов из M, не покрытых на предыдущих итерациях. В работе Р. Г. Нигматуллина [29] (см. также [26]) при $f^*(e, A) > 1$ для жадного алгоритма показано, что

$$\delta \leqslant 1 + \frac{\ln m - \ln f^*(e, A)}{f^*(e, A)\ln(1 + 1/(f^*(e, A) - 1))} \leqslant 1 + \ln m - \ln f^*(e, A).$$

Близкий результат был независимо получен в работах Д. Джонсона [82] и Л. Ловаса [88]:

$$\delta \leqslant 1 + \ln \max_{j=1,\dots,n} |M_j|. \qquad (2)$$

В [97] было установлено, что в невзвешенном случае для жадного алгоритма справедливо неравенство $\delta \leqslant \ln m - \ln\ln m + 0,78$, что близко к известной нижней оценке из [69]. Обозначим через $f_{gr}(e, A)$ мощность покрытия, найденного жадным алгоритмом. В [26] показано, что если в каждой строке матрицы A содержится не менее k единиц, то $f_{gr}(e, A) \leqslant 1 + \frac{n}{k}\left(1 + \ln\frac{mk}{n}\right)$. Очевидно, это неравенство дает также верхнюю оценку мощности оптимального покрытия для указанного класса матриц. В ряде работ получены неалгоритмические верхние оценки мощности наименьших покрытий для некоторых классов невзвешенных задач о покрытии [24, 32, 34].

Для задачи о покрытии с произвольными весами В. Хватал предложил модификацию жадного алгоритма, где на каждой итерации в покрытие включается подмножество M_j с максимальным отношением числа покрываемых элементов, не покрытых на предыдущих итерациях, к весу c_j (если $c_j = 0$, то отношение полагаем равным $+\infty$). В [58] показано, что для данной модификации оценка (2) справедлива при любых положительных весах.

С помощью техники рандомизированного округления для обобщенной задачи о покрытии вида $\min\{cx \mid Ax \geqslant b,\ x \in Z_+^n\}$, где $b > 0$, в [98] предложен алгоритм с новой относительной погрешностью:

$$\delta \leqslant 1 + O\left(\max\left\{\ln\left(m\beta/\bar{f}\right)/\beta,\ \sqrt{\ln\left(2\left\lceil m\beta/\bar{f}\right\rceil\right)/\beta}\right\}\right),$$

где $\bar{f}$ — оптимальное значение целевой функции ЛП-релаксации обобщенной задачи и $\beta = \min\limits_{i=1,\ldots,m} b_i$. В основе применяемой здесь техники лежит выявление некоторого распределения вероятностей, при котором близкие к оптимуму допустимые решения появляются достаточно часто (при этом, как правило, используется информация о решении ЛП-релаксации задачи). С помощью полученного распределения строится детерминированный алгоритм, в котором на основе решения ЛП-релаксации происходит последовательная фиксация целочисленных значений переменных, округленных вниз или вверх. Данный подход к получению приближенных решений с гарантированными относительными погрешностями был предложен в [94] для задачи об упаковке и в [20] для обобщенной задачи о покрытии.

В случае, когда число единиц в каждой строке матрицы A ограничено сверху константой Δ, известен алгоритм [46, 81] с временной сложностью $O(mn)$ и относительной погрешностью Δ (более сильные результаты содержатся в работе [77]).

Для задачи о вершинном покрытии вопрос о существовании эффективного алгоритма с относительной погрешностью меньше 2 до сих пор открыт. Вместе с тем для многих частных случаев этой задачи

разработаны алгоритмы с лучшими относительными погрешностями. Например, в случае, когда $\max_{v \in V} \deg v \leqslant d$, в [76] предложен эффективный алгоритм временной сложности $O(dn^{3/2})$ с относительной погрешностью $2 - \frac{3}{d+2}$. Известен алгоритм [47] с относительной погрешностью $2 - \frac{\ln \ln n}{2 \ln n}$ и временной сложностью $O(n^3)$. В [77] предложен приближенный алгоритм с относительной погрешностью $2 - (1 - o(1))\frac{2 \ln \ln d}{\ln d}$. Для невзвешенной задачи о вершинном покрытии в случае планарного графа существует полиномиальная приближенная схема, а в случае всюду ε-плотного графа известен приближенный алгоритм [83] с относительной погрешностью $\frac{2}{1+\varepsilon}$ и временной сложностью $O(mn)$. В [67] этот результат перенесен на общую задачу о вершинном покрытии: если для любой вершины $v \in V$ вес смежных с v вершин не превышает $\rho w(V)$, то за время $O(mn)$ строится решение с относительной точностью $\frac{2}{1+\rho}$.

Подробный обзор по приближенным алгоритмам содержится в [81]. Последние достижения в этой области могут быть найдены в сети Интернет по адресу http://www.nada.kth.se/nada/theory/problemlist (см. [63]).

2.2. Вероятностный анализ задач и алгоритмов

Как отмечалось выше, в худшем случае получение точного или «хорошего» приближенного решения задачи о покрытии представляет большую трудность. В связи с этим возникает вопрос о возможности эффективного решения задачи при заданных предположениях о распределении вероятностей на множестве индивидуальных задач. Рассмотрим некоторые вероятностные результаты, относящиеся к невзвешенным задачам, когда исходные данные представлены случайной матрицей или графом. Как выяснилось, для достаточно широких классов случайных задач при помощи простых эвристик обнаруживаются асимптотически точные решения.

К. Верцеллисом [99] получены асимптотические оценки мощности наименьшего покрытия, когда исходные данные задач образуют случайную последовательность матриц $\{A_{m,n}\}$, где матрица $A_{m,n}$ имеет размерность $m \times n$, $n = n(m)$ и $m \to \infty$. Элементы матриц предлагается генерировать независимо, назначая $a_{ij} = 0$ с фиксированной вероятностью q и $a_{ij} = 1$ с вероятностью $1 - q$. Если в случайной матрице $A_{m,n}$ содержится строка из нулей, то соответствующая задача о покрытии оказывается неразрешима.

Теорема 6 [99]. *Если $n = n(m)$ и $\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{n}{\ln m} < \frac{1}{\ln(1/q)}$, то с вероятностью 1 последовательность $\{A_{n,m}\}$ содержит лишь конечное число матриц, имеющих по крайней мере одну единицу в каждой строке. Если $n = n(m)$ и $\lim_{m\to\infty} \frac{n}{\ln m} = \infty$, то с вероятностью 1 последовательность*

$\{A_{n,m}\}$ содержит лишь конечное число матриц, имеющих строку из нулей.

В [99] предложен простой полиномиальный алгоритм, являющийся асимптотически точным при указанном способе генерации случайных задач. Обозначим через $f_a(e, A_{m,n(m)})$ вес решения, полученного этим алгоритмом. В случае, когда матрица $A_{m,n}$ задает неразрешимую задачу о покрытии, величины $f_a(e, A_{m,n(m)})$ и $f^*(e, A_{m,n(m)})$ будем считать произвольными натуральными числами.

Теорема 7 [99]. *Пусть $n = n(m)$, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{n}{\ln m} = \infty$ и $\alpha > 0$ таково, что $n(m) \leqslant m^\alpha$ при любом $m \geqslant 1$. Тогда*

1) $\frac{f^*(e,A_{m,n(m)})}{\ln m} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{\ln(1/q)}$ *почти наверное*;

2) $\frac{f_a(e,A_{m,n(m)})}{f^*(e,A_{m,n(m)})} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$ *почти наверное.*

Исследование числа итераций одного класса точных алгоритмов при аналогичном распределении случайных матриц проводилось в [87]. В этой работе показано, что временная сложность рассмотренных алгоритмов, как правило, существенно ниже по сравнению с их временной сложностью в худшем случае.

Другой подход к порождению случайных задач использован в работе Н. Н. Кузюрина [19], в которой случайные матрицы последовательности $\{A_{m(n),n,k(n)}\}$ выбираются с равномерным распределением из множества всех матриц с n столбцами и $m(n)$ строками и в каждой строке содержится ровно $k(n)$ единиц. В этом случае при дополнительных предположениях о росте величин $m(n)$ и $k(n)$ для жадного алгоритма доказана сходимость по вероятности $f_{gr}(e, A_{m(n),n,k(n)})/f^*(e, A_{m(n),n,k(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

В литературе значительное внимание уделяется задаче о вершинном покрытии в случайном графе. Многие авторы рассматривают задачу о вершинном покрытии в графе с n вершинами, любая пара которых соединяется ребром с фиксированной вероятностью $p \in (0, 1)$ независимо от наличия других ребер. При $p = \frac{1}{2}$ этот способ генерации графа дает равномерное распределение на множестве n-вершинных помеченных графов. Типичное оптимальное решение ЛП-релаксации невзвешенной задачи о вершинном покрытии описывает следующая

Теорема 8 [93]. *При любом $p \in (0, 1)$ для указанного выше распределения случайных графов ЛП-релаксация невзвешенной задачи о вершинном покрытии имеет единственное оптимальное решение $\check{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$.*

Таким образом, для почти всех случайных графов предварительная фиксация целочисленных компонент оптимального решения

ЛП-релаксации невзвешенной задачи о вершинном покрытии не дает понижения размерности задачи (в [93] показано, что при $p = \frac{1}{2}$ и $n = 100$ вероятность присутствия в векторе $\check{x}$ целочисленных компонент не превышает $1,4 \cdot 10^{-8}$).

Асимптотические оценки мощности α_0 наименьшего вершинного покрытия в случайном n-вершинном графе могут быть легко получены с помощью известных оценок для наибольшего независимого множества или клики [16, 52]. В частности, при любом $p > 0$ установлено существование такого числа $\gamma(p)$, что $\alpha_0 \geqslant n - \gamma(p) \ln n$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, при фиксированном p отношение n/α_0 с ростом n стремится по вероятности к 1. Поэтому любой эвристический алгоритм построения вершинного покрытия является асимптотически точным.

Асимптотические оценки мощности наименьшего доминирующего множества вершин и числа тупиковых (т. е. минимальных по включению) вершинных покрытий приводятся в [16]. Р. Г. Нигматуллиным [27] получены асимптотические оценки числа тупиковых покрытий вершин графа ребрами.

2.3. Эвристики

Для поиска приближенных решений задач большой размерности широкое распространение получили методы лагранжевой релаксации [41, 48, 56], генетические алгоритмы [7, 39, 50], поиск с запретами [95], алгоритмы муравьиной колонии [38], нейронные сети [75] и другие эвристические алгоритмы. Большая часть эвристических методов основана на частичном переборе покрытий с учетом накапливаемой при этом статистической информации. Как правило, сравнение эвристик осуществляется на основе вычислительного эксперимента, так как априорные оценки точности на практике часто оказываются далеки от экспериментальных результатов, а теоретический вероятностный анализ затрудняется сложностью вычислительных схем.

Методы лагранжевой релаксации впервые были предложены для приближенного решения ЛП-релаксации задачи коммивояжера [33, 80] и широко используются для получения оценок оптимального значения целевой функции и построения приближенного решения в различных задачах целочисленного программирования. Отличительная особенность этих методов состоит в том, что во многих случаях они позволяют получать решения, достаточно близкие к оптимуму, при сравнительно малых вычислительных затратах.

При решении задачи о покрытии распространен подход, когда i-й строке матрицы A, $i = 1, \ldots, m$, ставится в соответствие множитель

Лагранжа u_i. Для произвольного вектора $u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m_+$ вычисляется лагранжиан

$$L(u) = ue + \min_{x \in \{0,1\}^n} (c - uA)x = ue + (c - uA)x(u),$$

где вектор $x(u) = \arg\min_{x \in \{0,1\}^n} (c - uA)x$ легко отыскивается аналитически. Так как $\max_{u \geqslant 0} L(u) = \bar{f}(c, A)$, то подбором вектора u может быть получено значение оптимума целевой функции ЛП-релаксации или его нижняя оценка $z = L(u)$. В целях экономии вычислительных затрат обычно ограничиваются приближенным решением задачи максимизации $L(u)$ с помощью следующей процедуры. Начиная с некоторого вектора u^0, строится последовательность векторов $u^1, \dots, u^T$ с компонентами $u_i^t = \max\{0,\ u_i^{t-1} + \sigma_t g_i(u^{t-1})\}$, где $g(u) = e - Ax(u)$ — вектор субградиента и $\sigma_t \in R_+$ — длина шага. Для вычисления z используется вектор $\tilde{u} = \arg\max_{t=1,\dots,T} L(u^t)$. Компоненты вектора $c - \tilde{u}A$ содержат полезную информацию о «ценности» покрывающих множеств и могут быть использованы в жадных и других эвристиках [41, 42, 56]. Как правило, в процессе работы алгоритма на основе полученного вектора $\tilde{u}$ осуществляется фиксация некоторых переменных задачи, после чего снова выполняется процедура субградиентной оптимизации. Судя по опубликованным экспериментальным данным, вычислительная схема из [56] по качеству решений представляется наиболее перспективной среди известных эвристик, основанных на лагранжевой релаксации.

Генетический алгоритм является эвристическим методом случайного поиска, основанным на имитации эволюции биологической популяции [74]. Для задачи о покрытии при работе многих вариантов генетического алгоритма происходит последовательная смена популяций, каждая из которых является семейством покрытий, называемых *особями* популяции. Покрытия начальной популяции строятся случайным способом. Лучше других зарекомендовала себя стационарная схема генетического алгоритма, в которой очередная популяция отличается от предыдущей лишь одной или двумя новыми особями [7, 43, 50]. При построении новой особи из текущей популяции выбирается пара «родительских» особей J', J'' и на их основе в процедуре *скрещивания* формируется (случайно или детерминировано) некоторый набор покрывающих множеств J_χ. Затем J_χ подвергается *мутации* (случайному изменению), после чего из него строится особь, которая замещает в новой популяции покрытие с наибольшим весом. Обновление популяции выполняется заданное число раз, и результатом работы алгоритма является лучшее из найденных покрытий.

В процедуре скрещивания генетического алгоритма Дж. Бисли и П. Чу [50] набор J_χ заполняется случайно выбранными элементами родительских покрытий. Полученный после мутации набор покрывающих множеств может не быть покрытием. В этом случае он дополняется до допустимого решения с помощью жадного алгоритма. Другой вариант генетического алгоритма разработан в [7] с использованием вычислительной схемы, сохраняющей допустимость решений при скрещивании и мутации. Заметное повышение качества получаемых решений дало здесь применение скрещивания, в котором набор J_χ формируется из объединения родительских покрытий по возможности оптимальным образом. Рассматривались также варианты генетического алгоритма, в которых элементами популяции могут быть произвольные наборы покрывающих множеств (не только покрытия). Однако, судя по результатам экспериментальных исследований [39], такие вычислительные схемы уступают описанным выше. Для одного варианта генетического алгоритма в [66] получены априорные оценки вероятностей появления особей заданного качества при решении задач о покрытии из семейства $G(k)$ [31] и некоторых других задач.

Принципы коллективного поиска используются также в алгоритмах муравьиной колонии [38], где многократное применение рандомизированного жадного алгоритма с учетом статистической информации имитирует поведение муравьев. Работоспособность таких алгоритмов, как и алгоритмов поиска с запретами [95], пока трудно сравнить с результатами других авторов из-за различия в способах экспериментального исследования.

2.4. Точные методы

Как отмечено в п. 1.1, точное решение задачи о покрытии может быть получено за полиномиальное время, если матрица A идеальна, т. е. все вершины многогранника Ω' целочисленны. Сюда относятся задачи о вершинном покрытии в двудольном графе и на дереве. Эффективные точные алгоритмы известны и для некоторых задач о покрытии, многогранники которых, вообще говоря, не обладают свойством целочисленности. В частности, если каждый столбец матрицы A содержит ровно две единицы, то задачу о покрытии можно рассматривать как задачу реберного покрытия в графе, которая эффективно сводится к поиску максимального паросочетания [18]. В [83] установлена полиномиальная разрешимость так называемых сверхплотных задач о покрытии.

Для решения общей задачи о покрытии предложено большое число точных алгоритмов, основанных на методах ветвей и границ [4, 11, 18, 41, 42, 51, 70], отсечения [42, 73], перебора L-классов [12, 68] и др.

Верхние оценки временной сложности точных методов сопоставимы со сложностью переборных алгоритмов [13, 31, 87]. В связи с этим при решении практических задач большую актуальность приобретают эвристические способы сокращения перебора. Значительное внимание уделяется разработке гибридных алгоритмов, в которых переборные схемы комбинируются с отсечениями и различными эвристиками для получения верхних и нижних оценок оптимума целевой функции на вспомогательных подзадачах.

Работа Э. Балаша и А. Ху [42] — одна из первых, в которой схема ветвей и границ для задачи о покрытии была успешно совмещена с лагранжевой эвристикой. Эта работа оказала большое влияние на исследования в данном направлении. С использованием аналогичного подхода в [51] был предложен гибридный алгоритм ветвей и границ, включающий в себя отсечения Гомори, лагранжеву релаксацию и другие эвристики. Хорошие вычислительные свойства в эксперименте продемонстрировал алгоритм из [41], также основанный на схеме ветвей и границ. Отличительной особенностью этого алгоритма является динамическая субградиентная процедура, используемая для решения подзадач лагранжевой релаксации. С помощью алгоритма из [41] успешно решались тестовые задачи со случайными данными до 4000 переменных [49], а также задачи назначения экипажей с реальными данными при n, близких к 10^4. Другой перспективный подход к поиску нижних оценок использован в работе М. Фишера и П. Кедиа [70]. Этот алгоритм можно применять к задаче (1), дополненной ограничениями в виде равенств.

В [12] общий метод перебора L-классов из [13] был адаптирован к решению задачи о покрытии. Этот алгоритм основан на лексикографическом упорядочении элементов L-разбиения релаксационного многогранника и последовательном их исключении при помощи решения линейных подзадач. В гибридном алгоритме из [68] перебор L-классов комбинируется с генетическим алгоритмом из [7] и лагранжевой эвристикой. В разработанной здесь схеме генетический алгоритм используется для нахождения начального решения, а с помощью лагранжевой эвристики находятся нижние и верхние оценки целевой функции на подзадачах, возникающих в процессе перебора L-классов. Эксперименты показали перспективность гибридного подхода. Время решения задач гибридным алгоритмом во многих случаях оказалось в несколько раз меньше по сравнению с базовым алгоритмом [12].

Здесь мы не останавливаемся на точных и эвристических алгоритмах для задачи о вершинном покрытии. Алгоритмы, разработанные для эквивалентных ей задач о клике и независимом множестве наибольшего веса, приведены в [43, 53, 60, 89].

3. Тестовые задачи и экспериментальные исследования

В настоящее время имеется достаточно много тестовых задач для экспериментального исследования и сравнения алгоритмов. Множество этих задач можно разбить на три основные группы: задачи специальной структуры [7, 31, 72, 75], прикладные задачи [41, 56, 95] и задачи со случайными исходными данными [38, 42, 51].

Значительная часть этих задач доступна в сети Интернет и используется многими авторами. Большое количество примеров содержится в электронных библиотеках OR-Library [49] (http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html) и DIMACS Challange II [60] (ftp://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/graph/). В нашем институте совместно с ОмГУ также разрабатывается библиотека задач и алгоритмов дискретной оптимизации DOL, включающая задачи о покрытии (http://dol.iitam.omsk.net.ru).

3.1. Тестовые задачи специальной структуры

При сравнении алгоритмов многие авторы используют невзвешенные задачи о покрытии, возникающие в комбинаторике. Например, представляют интерес упоминавшиеся выше задачи о системах троек Штейнера. В [72] отмечено, что для задач этого типа точные решения находятся очень сложно. Судя по публикациям, оптимальные решения известны для таких задач с размерностью до 81 переменной [90]. Новые приближенные решения примеров большей размерности получены в [92].

В экспериментах также используются примеры, связанные с известной задачей Эрдеша [37, 64] о раскраске гиперграфа: найти минимальное число $m_d(r)$ таких r-элементных подмножеств из базового d-элементного множества U, чтобы при любой раскраске элементов из U в два цвета хотя бы одно выбранное r-элементное подмножество оказывалось монохроматичным. Предполагается, что $d \geqslant 2r - 1$.

При данных r и d эта задача сводится к задаче о покрытии, в которой M — множество всевозможных раскрасок базового множества, а покрывающими подмножествами являются r-элементные подмножества из U. Подмножество M' из r элементов *покрывает* раскраску множества U, если при этой раскраске подмножество M' оказывается монохроматичным. Легко видеть, что при фиксированном r величина $m_d(r)$ не возрастает с ростом d. При $r = 4$ и $d = 9$ минимальное покрытие состоит из 26 элементов [68]. Лучшие известные покрытия при $r = 4$ и d =10, 11, 12, 13 состоят соответственно из 25, 23, 23, 23 элементов [7, 75]. Минимальность этих покрытий не доказана.

Другая серия трудных комбинаторных примеров связана с вопросом Эрдеша [65, 75] о покрытии ребрами циклов длины 4 в гиперкубе

(ребро *покрывает* цикл, содержащий это ребро). Перечисленные тестовые примеры содержатся в библиотеке OR-Library.

При тестировании точных и эвристических алгоритмов решения задачи о вершинном покрытии могут использоваться серии примеров специальной структуры [78], предложенных для задачи о наибольшей клике (после перехода к дополнительному графу). Задачи Штейнера также могут быть сформулированы как задачи о вершинном покрытии в графах специального вида [89]. Вместе с тем имеются задачи специальной структуры и относительно небольшой размерности, решение которых представляет значительную трудность.

3.2. Задачи со случайными данными и задачи из практики

Для сравнения алгоритмов решения задачи о покрытии используется много примеров, построенных случайным образом. Наиболее известны серии 4, 5, 6 с размерностями задач $n = 1000 \div 2000$ и $m = 200$, предложенные в работе Э. Балаша и А. Ху [42], а также серии A, B, ..., H задач большей размерности ($n = 3000 \div 10^4$, $m = 300 \div 1000$), сгенерированные Дж. Бисли [48] аналогично сериям 4, 5, 6. Эти задачи построены для матриц с заданной разреженностью (2% единиц в сериях 4, 5, A, C, G; 5% единиц в сериях 6, B, D, H; 10% и 20% единиц в сериях E и F соответственно), в каждой строке которых содержится не менее двух единиц и в каждом столбце — не менее одной единицы. Веса выбраны случайным образом в диапазоне от 1 до 100. Широкий разброс весов и небольшая плотность матриц этих задач позволяют в точных алгоритмах существенно уменьшить число анализируемых вариантов по сравнению с переборными алгоритмами [51]. Исходные данные описанных задач доступны в библиотеке OR-Library. Достаточно трудные случайные задачи размерностей $n = m = 100$ построены в [38] (серия E5). В этих задачах все веса равны единице, а матрица содержит по 5 единиц в каждой строке.

Для задачи о вершинном покрытии известны многочисленные тестовые примеры на случайных графах. Описание таких невзвешенных задач содержится в [60]. Исходные данные доступны в библиотеке DIMACS. Результаты экспериментов с задачами на графах и случайными весами вершин приведены в [43]. Программы генерации взвешенных задач о вершинном покрытии всюду ε-плотных графов и некоторые примеры, предложенные Ю. А. Кочетовым, имеются в библиотеке DOL.

В экспериментах используются исходные данные, связанные с практикой. Задачи, возникающие при составлении расписания машинистов на железной дороге, рассмотрены в [56], а в [41, 95] приведены задачи

оптимизации расписания водителей автобусов. Данные примеров из работы [56] содержатся в электронной библиотеке OR-Library. Они отличаются большой размерностью (до 5000 ограничений и 10^6 переменных) и сильной разреженностью матриц. Коэффициенты целевой функции принадлежат множеству $\{1, 2\}$.

По результатам известных нам экспериментов можно сделать вывод о том, что в настоящее время достаточно устойчиво решаются задачи о покрытии с малой зависимостью в распределении элементов матрицы A и задачи с разреженными матрицами. Существенное упрощение вызывает широкий разброс коэффициентов целевой функции. Вместе с тем решение задач специальной структуры и относительно небольшой размерности представляет значительную трудность.

Для задач большой размерности перспективна, на наш взгляд, разработка лагранжевых эвристик, генетических алгоритмов, алгоритмов поиска с запретами, а также гибридных алгоритмов.

Подробные результаты экспериментальных исследований опубликованы в [7, 38, 41, 42, 50, 51, 56].

Авторы благодарны А. Д. Закревскому, Ю. А. Кочетову, Н. Н. Кузюрину за ряд ценных советов при подготовке настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А.** О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. Вып. 23. С. 3–11.
2. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
3. **Берж К.** Теория графов и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
4. **Герман О. В., Ефремов О. В.** Алгоритм решения обобщенной задачи о покрытии // Экономика и мат. методы. 1998. Т. 34, вып. 4. С. 134–140.
5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
7. **Еремеев А. В.** Генетический алгоритм для задачи о покрытии // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 1. С. 47–60.
8. **Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А.** Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Междунар. конф. «Дискретный анализ и исследование операций»: Материалы конф. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 37–41.
9. **Журавлев Ю. И.** Теоретико-множественные методы алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.

10. **Журавлев Ю. И.** Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 67–98.
11. **Закревский А. Д.** Логический синтез каскадных схем. М.: Наука, 1981.
12. **Заозерская Л. А.** Об одном алгоритме перебора L-классов для решения задачи о покрытии множества // Тр. 11-й Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 1998. Т. 1. С. 139–142.
13. **Колоколов А. А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 2. С. 18–39.
14. **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т. 1.
15. **Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.** Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
16. **Коршунов А. Д.** Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 1. С. 107–173.
17. **Кофман А., Анри-Лабордер А.** Методы и модели исследования операций. М: Мир, 1977.
18. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
19. **Кузюрин Н. Н.** Асимптотическое исследование задачи о покрытии // Проблемы кибернетики. Вып. 37. М.: Наука, 1980. С. 19–57.
20. **Кузюрин Н. Н.** Асимптотически точные полиномиальные алгоритмы в задачах целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 78–85.
21. **Кузюрин Н. Н.** О связи оптимумов в задачах линейного и целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, вып. 1. С. 100–104.
22. **Кузюрин Н. Н.** О сложности построения асимптотически оптимальных покрытий и упаковок // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 1. С. 11–13.
23. **Левенштейн В. И.** Элементы теории кодирования // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 207–305.
24. **Леонтьев В. К.** Верхняя оценка α-глубины (0,1)-матриц // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 3. С. 421–429.
25. **Нечепуренко М. И., Попков В. К., Майнагашев С. М. и др.** Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. Новосибирск: Наука, 1990.

26. **Нигматуллин Р. Г.** Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие // Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов: Тр. симпоз. Киев, 1969. Вып. 5. С. 116–126.

27. **Нигматуллин Р. Г.** О числе неприводимых покрытий графа ребрами // Кибернетика. 1970. № 2. С. 95–98.

28. **Нигматуллин Р. Г.** О приближенных алгоритмах с ограниченной абсолютной погрешностью для дискретных экстремальных задач // Кибернетика. 1978. № 1. С. 95–101.

29. **Нигматуллин Р. Г.** Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

30. **Роджерс К.** Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.

31. **Сайко Л. А.** Исследование мощности L-накрытий некоторых задач о покрытии // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. С. 76–97.

32. **Сапоженко А. А., Асратян А. С., Кузюрин Н. Н.** Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Вып. 30. С. 46–75.

33. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 2. М.: Мир, 1991.

34. **Тараканов В. Е.** Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука, 1985.

35. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

36. **Червак Ю. Ю.** Об одном методе отсечений для дискретных задач // Укр. мат. журн. 1971. № 6. С. 839–843.

37. **Эрдёш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.

38. **Alexandrov D., Kochetov Yu.** Behavior of the ant colony algorithm for the set covering problem // Operations Research Proceedings 1999 (Magdeburg, 1999). Berlin: Springer, 2000. P. 255–260.

39. **Bäck Th., Schültz M., Khuri S.** A comparative study of a penalty function, a repair heuristic, and stochastic operators with the set-covering problem // Artificial Evolution. Proc. Berlin: Springer, 1996. P. 3–20. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1063.)

40. **Balas E.** A sharp bound on the ratio between optimal integer and fractional covers // Math. Oper. Res. 1984. V. 9, N 1. P. 1–5.

41. **Balas E., Carrera M. C.** A dynamic subgradient-based branch and bound procedure for set covering // Oper. Res. 1996. V. 44, N 6. P. 875–890.

42. **Balas E., Ho A.** Set covering algorithms using cutting planes, heuristics, and subgradient optimization: a computational study // Math. Program. Study. 1980. V. 12. P. 37–60.

43. **Balas E., Niehaus W.** Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // J. Heuristics. 1998. V. 4, N 2. P. 107–122.

44. **Balas E., Ng S. M.** On the set covering polytope: I. All the facets with coefficients in $\{0, 1, 2\}$ // Math. Program. 1989. V. 43, N 1. P. 57–69.

45. **Balas E., Ng S. M.** On the set covering polytope: II. Lifting the facets with coefficients in {0,1,2} // Math. Program. 1989. V. 45, N 1. P. 1–20.

46. **Bar-Yehuda R., Even S.** A linear-time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem // J. Algorithms. 1981. V. 2, N 2. P. 198–203.

47. **Bar-Yehuda R., Even S.** A local-ratio theorem for approximating the weighted vertex cover problem // Annals Discrete Math. 1985. V. 25. P. 27–45.

48. **Beasley J. E.** A Lagrangian heuristic for set-covering problems // Naval Res. Logist. 1990. V. 37, N 1. P. 151–164.

49. **Beasley J. E.** OR-Library: distributing test problems by electronic mail // J. Oper. Res. Soc. 1990. V. 41, N 11. P. 1069–1072.

50. **Beasley J. E., Chu P. C.** A genetic algorithm for the set covering problem // European J. Oper. Res. 1996. V. 94, N 2. P. 394–404.

51. **Beasley J. E., Jønsten K.** Enhancing an algorithm for set covering problems // European J. Oper. Res. 1992. V. 58, N 2. P. 293–300.

52. **Bollobás B.** Random graphs. New York: Acad. Press, 1985.

53. **Bomze I. M., Budinich M., Pardalos P. M., Pelillo M.** The maximum clique problem // Handbook of combinatorial optimization. V. A. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 1–74.

54. **Borndörfer R.** Aspects of set packing, partitioning, and covering. Aachen: Shaker Verl., 1998.

55. **Brauner N., Dhaenens-Flipo C., Espinouse M.-L., Finke G., Gavranovic H.** Decomposition into parallel work phases with application to the sheet metal industry // Proc. of Intern. conf. on industrial engineering and production management (IEPM'99). Glasgow, 1999. V. 1. P. 389–396.

56. **Caprara A., Fischetti M., Toth P.** Algorithms for the set covering problem / DEIS — Operations Research Group. 1998. Technical Rep. No. OR-98-3.

57. **Caprara A., Fischetti M., Toth P., Vigo D.** Modeling and solving the crew rostering problem // Oper. Res. 1998. V. 46, N 6. P. 820–830.

58. **Chvátal V.** A greedy heuristic for the set-covering problem // Mathematics of Oper. Res. 1979. V. 4, N 3. P. 233–235.

59. **Clementi A. E. F., Trevisan L.** Improved non-approximability results for vertex cover with density constraints // Computing and combinatorics. Second annual Intern. conf. (COCOON'96). Berlin: Springer-Verl., 1996. P. 333–342. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1090.)

60. **Cliques, coloring, and satisfiability.** Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (DIMACS Ser. in Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.; V. 26.)

61. **Cornuejols G., Novick B.** Ideal 0,1 matrices // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1994. V. 60, N 1. P. 145–157.

62. **Cornúejols G., Sassano A.** On the 0,1 facets of the set covering polytope // Math. Program. 1989. V. 43, N 1. P. 45–55.

63. **Crescenzi P., Kann V.** How to find the best approximation results — a follow-up to Garey and Johnson // ACM SIGACT News. 1998. V. 29, N 4. P. 90–97.

64. **Erdös P.** On a combinatorial problem // Nordisk Mat. Tidskr. 1963. V. 11. P. 5–10.

65. **Erdös P.** On some of my favourite problems in graph theory and block designs // Le Matematiche. 1990. V. 45. P. 61–74.

66. **Eremeev A. V.** Modeling and analysis of genetic algorithm with tournament selection // Artificial Evolution. Proc. Berlin: Springer, 2000. P. 84–95. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1829.)

67. **Eremeev A. V.** On some approximation algorithms for dense vertex cover problem // Operations Research Proceedings 1999 (Magdeburg, 1999). Berlin: Springer, 2000. P. 58–62.

68. **Eremeev A. V., Kolokolov A. A., Zaozerskaya L. A.** A hybrid algorithm for set covering problem // Proc. of Intern. workshop on discrete optimization methods in sheduling and computer-aided design. Minsk, 2000. P. 123–129.

69. **Feige U.** A threshold of $\ln n$ for approximating set cover // Proc. of the 28th annual ACM symp. on theory of computing. New York: ACM Press, 1996. P. 314–318.

70. **Fisher M. L., Kedia P.** Optimal solution of set covering/partitioning problems using dual heuristics // Manag. Sci. 1990. V. 36, N 6. P. 674–688.

71. **Fulkerson D. R., Hoffman A. J., Oppenheim R.** On balanced matrices // Math. Program. Study. 1974. V. 1. P. 120–132.

72. **Fulkerson D. R., Nemhauser G. L., Trotter L. E., Jr.** Two computationally difficult set covering problems that arise in computing the 1-width of incidence matrices of Steiner triple systems // Math. Program. Study. 1974. V. 2. P. 72–81.

73. **Garfinkel R. S., Nemhauser G. L.** Integer programming. New York: Wiley, 1972.

74. **Goldberg D. E.** Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

75. **Grossman T., Wool A.** Computational experience with approximation algorithms for the set covering problem // European J. Oper. Res. 1997. V. 101, N 1. P. 81–92.

76. **Halldórsson M. M., Lau H. C.** Low-degree graph partitioning via local search with applications to constraint satisfaction, max cut, and coloring // J. of Graph Algorithms and Applications. 1997. V. 1, N 3. P. 1–13.

77. **Halperin E.** Improved approximation algorithms for the vertex cover problem in graphs and hypergraphs // Proc. of the 11th annual ACM-SIAM symp. on discrete algorithms. New York: ACM Press, 2000. P. 329–337.

78. **Hasselberg J., Pardalos P. M., Vairaktarakis G.** Test case generators and computational results for the maximum clique problem // J. Global Optim. 1993. V. 3, N 4. P. 463–482.

79. **Håstad J.** Some optimal inapproximability results / Electronic Colloquium on Computational Complexity. Trier. 1997. Technical Rep. No. TR-97-037.

80. **Held M, Karp R. M.** The traveling-salesman problem and minimum spanning trees // Oper. Res. 1970. V. 18, N 6. P. 1138–1162.

81. **Hochbaum D. S.** Approximating covering and packing problems: set cover, vertex cover, independent set, and related problems // Approximation algorithms for NP-hard problems. Boston: PWS Publ. Co., 1997. P. 94–143.

82. **Johnson D. S.** Approximation algorithms for combinatorial problems // J. Comput. System Sci. 1974. V. 9, N 3. P. 256–278.

83. **Karpinski M., Zelikovsky A.** Approximating dense cases of covering problems // Network design: connectivity and facilities location. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 169–178. (DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.; V. 40.)

84. **Krarup J., Pruzan P. M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. 1983. V. 12, N 1. P. 36–81.

85. **Lehman A.** On the width-length inequality // Math. Program. 1979. V. 17, N 3. P. 403–417.

86. **Lehman A.** On the width-length inequality and degenerate projective planes // Polyhedral combinatorics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. P. 101–105. (DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.; V. 1.)

87. **Lifschitz V., Pittel B.** The worst and the most probable performance of a class of set-covering algorithms // SIAM J. Comput. 1983. V. 12, N 2. P. 329–346.

88. **Lovász L.** On the ratio of optimal integral and fractional covers // Discrete Math. 1975. V. 13, N 4. P. 383–390.

89. **Mannino C., Sassano A.** An exact algorithm for the maximum stable set problem // Comput. Optim. Appl. 1994. V. 3, N 3. P. 243–258.

90. **Mannino C., Sassano A.** Solving hard set covering problems // Oper. Res. Lett. 1995. V. 18, N 1. P. 1–5.

91. **Nemhauser G. L., Trotter L. E., Jr.** Vertex packings: structural properties and algorithms // Math. Program. 1975. V. 8, N 2. P. 232–248.

92. **Odijk M. A., van Maaren H.** Improved solutions to the Steiner triple covering problem // Inform. Process. Lett. 1998. V. 65. P. 67–69.
93. **Pulleyblank W. R.** Minimum node covers and 2-bicritical graphs // Math. Program. 1979. V. 17, N 1. P. 91–103.
94. **Raghavan P.** Probabilistic construction of deterministic algorithms: approximating packing integer programs // J. Comput. System Sci. 1988. V. 37, N 2. P. 130–143.
95. **Ramalhinho H., Pinto R., Portugal R.** Metaheuristics for the bus-driver scheduling problem / Univ. Pompeu Fabra. Economic Working Papers Series. 1998. Technical Rep. No. 304.
96. **Raz R., Safra S.** A sub-constant error-probability low-degree test, and sub-constant error-probability PCP characterization of NP // Proc. of the 29th annual ACM symp. on theory of computing. New York: ACM Press, 1997. P. 475–484.
97. **Slavik P.** A tight analysis of the greedy algorithm for set cover // J. Algorithms. 1997. V. 25, N 2. P. 237–254.
98. **Srinivasan A.** Improved approximation guarantees for packing and covering integer programs // SIAM J. Comput. 1999. V. 29, N 2. P. 648–670.
99. **Vercellis C.** A probabilistic analysis of the set covering problem // Ann. Oper. Res. 1984. V. 1. P. 255–271.

Адрес авторов:

Омский филиал
Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13,
644099 Омск, Россия.
E-mail:
eremeev@iitam.omsk.net.ru,
zaozer@iitam.omsk.net.ru,
kolo@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.,
переработанный вариант —
11 октября 2000 г.