ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 47–53

УДК 519.854.3

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ L-РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Колоколов, М. В. Девятерикова

Исследуется вопрос об изменении лексикографической структуры (L-разбиения) множеств в конечномерном пространстве при их расширениях. Найдены верхние оценки мощности L-интервалов компактного множества при малых расширениях. Рассмотрены приложения полученных результатов в целочисленном программировании.

Исходная информация многих практических задач носит приближенный характер. В связи с этим возникает проблема выделения таких классов задач и численных методов, для которых малые возмущения исходной информации не оказывают сильного влияния на решение. Исследования этой проблематики ведутся и в области дискретной оптимизации [2, 6, 7].

В последнее время нами развивается новое направление — изучение вопросов устойчивости на основе метода регулярных разбиений [1, 5, 8]. С помощью этого метода получены оценки числа итераций для ряда алгоритмов отсечения, ветвей и границ, предложены алгоритмы перебора L-классов для решения задач целочисленного программирования.

В данной статье исследуются вопросы устойчивости лексикографической структуры компактного множества в конечномерном пространстве и рассматриваются их приложения в целочисленном программировании. Найдены верхние оценки мощности L-интервалов компактного множества при его достаточно малых расширениях. Эти результаты развивают исследования, о которых сообщалось в [5, 8]. Для L-накрытия множества (частного случая L-интервала) аналогичные оценки были получены в [1].

1. Предварительные сведения

Пусть R^n — вещественное n-мерное пространство, Z^n — множество целочисленных векторов из R^n и Ω — непустое множество в R^n, которое будем предполагать компактным, т. е. замкнутым и ограниченным.

Рассматривается задача целочисленного программирования в лексикографической постановке: найти

$$z^* = \operatorname{lex}\max(\Omega \cap Z^n). \tag{1}$$

Многие результаты, относящиеся к анализу задачи (1) и исследованию алгоритмов ее решения, получены на основе регулярных разбиений [1, 3–5, 8]. Наиболее изученным является L-разбиение, которое можно определить следующим образом.

Допустим, что $x, y \in R^n$ и $x \prec y$ (здесь и в дальнейшем $\prec$, $\preceq$ — символы лексикографического сравнения). Будем говорить, что векторы x и y *отделимы*, если имеется такая точка $z \in Z^n$, что $x \preceq z \preceq y$. В противном случае векторы x и y называются *неотделимыми*. Векторы $x, y \in R^n$ $(x \neq y)$ называются *L-эквивалентными*, если x и y неотделимы. Легко проверяется, что тем самым пространство R^n разбивается на классы эквивалентности. Такое разбиение называется *L-разбиением*, а его элементы — *L-классами*. Для произвольного множества $X \subseteq R^n$ его разбиение на L-классы обозначим через X/L. Отметим некоторые свойства L-разбиения, используемые в данной работе.

1. Каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс L-разбиения; остальные классы состоят из нецелочисленных точек и называются *дробными*.

2. Любой дробный класс $V \in X/L$ можно представить в виде

$$V = X \cap \{x \mid x_i = a_i,\ i = 1, \ldots, r-1,\ a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — некоторые целые числа.

Пусть X и Y — непустые множества в R^n. Будем говорить, что X *лексикографически меньше* Y $(X \prec Y)$, если $x \prec y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$.

3. Если множество $X \subset R^n$ ограничено, то фактор-множество X/L конечно и его можно представить в виде $X/L = \{V_1, \ldots, V_p\}$, где $V_1 \prec \ldots \prec V_p$.

Изучение L-разбиения необходимо в связи с тем, что его свойства используются при построении и анализе алгоритмов, в частности при оценке числа итераций в алгоритмах отсечения.

Пусть $X \subseteq R^n$. Непустое подмножество нецелочисленных точек $W \subseteq X$ называется *дробным интервалом*, если из условия $x \in W$ следует, что любая точка $y \in X$, которая неотделима от x некоторой целой точкой из X, также лежит в W. Фактор-множество W/L называется *L-интервалом*. Через $C(X)$ обозначим совокупность всех дробных интервалов множества X. Интервал $W \in C(X)$ называется *внутренним*, если существуют такие точки $z, z' \in X \cap Z^n$, что $z \prec W \prec z'$. В противном случае интервал W называется *внешним*.

Для описания степени «дробности» множества X используется величина

$$\Psi(X) = \max\{|W/L| \mid W \in C(X)\}.$$

Ее свойства описаны, например, в [4].

Важную роль в исследовании задач и алгоритмов целочисленного программирования играет множество

$$\Omega^* = \{x \in \Omega \mid x \succ (\Omega \cap Z^n)\},$$

которое называется *дробным накрытием* множества Ω. Если $\Omega \cap Z^n = \varnothing$, то $\Omega^* = \Omega$. Очевидно, что Ω^* является внешним дробным интервалом. Множество Ω^*/L называется *L-накрытием*.

В алгоритмах отсечения и некоторых других методах в процессе решения задачи (1) из Ω исключаются все точки множества Ω^*. В алгоритмах отсечения это обычно делается с помощью дополнительных линейных ограничений.

Пусть $x^* = \operatorname{lex}\max \Omega$, $x^* \notin Z^n$ и V — элемент из Ω/L, содержащий x^*. Линейное неравенство $(\gamma, x) \leqslant \gamma_0$ называется *L-регулярным отсечением*, если выполняются условия:

a) $(\gamma, x) > \gamma_0$ для любого $x \in V$;

b) $(\gamma, z) \leqslant \gamma_0$ для любого $z \in (\Omega \cap Z^n)$.

Глубиной отсечения называется число полностью исключаемых им элементов из Ω^*/L. Очевидно, что глубина L-регулярного отсечения не меньше 1. Пусть $I_D(\Omega)$ — число отсечений, используемых некоторым алгоритмом D при решении задачи (1), и h — верхняя оценка глубин отсечений. Тогда справедливы неравенства

$$h^{-1}|\Omega^*/L| \leqslant I_D(\Omega) \leqslant |\Omega^*/L|. \tag{2}$$

2. Смежные *L*-классы

Пусть X и Y — множества в R^n. *Расстоянием* между X и Y назовем величину

$$\rho(X, Y) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in X,\ y \in Y\},$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная норма в R^n.

Рассмотрим непустое множество $X \subset R^n$ и некоторый L-класс $V \in R^n/L$. Класс V называется *смежным* с X, если $X \cap V = \varnothing$ и $\rho(X, V) = 0$. Если $\rho(X, V) > 0$, то класс V назовем *несмежным* с X.

Теорема 1. *Пусть множество Ω компактно в R^n, $\Omega^* = \varnothing$ и $z^* = \operatorname{lex}\max \Omega$. Тогда число смежных с Ω дробных классов $V \in R^n/L$ таких, что $V \succ z^*$, равно n.*

Доказательство. Обозначим через U совокупность смежных с Ω дробных классов $V \in R^n/L$, удовлетворяющих условию $V \succ z^*$. Рассмотрим следующие L-классы из R^n/L:

$$V_s = \{x \mid x_i = z_i^*,\ i = 1, \ldots, s-1,\ z_s^* < x_s < z_s^* + 1\}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Все они лежат в U. Покажем, что других классов в U нет.

Пусть $V = \{x \mid x_i = a_i,\ i = 1, \ldots, t-1,\ a_t < x_t < a_t + 1\}$ — произвольный L-класс из U. В силу компактности множества Ω существует точка $y \in \Omega$ такая, что $\rho(y, V) = 0$. Поэтому $y_i = a_i$, $i = 1, \ldots, t-1$, и $a_t \leqslant y_t \leqslant a_t + 1$. Включение $y \in \Omega$ влечет соотношение $y \preceq z^*$, которое совместно с условием $z^* \prec V$ только при $a_i = z_i^*$, $i = 1, \ldots, t$, т. е. $V = V_t$.

Следовательно, $U = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что если вместо (1) рассматривать задачу «на минимум», то справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.

Перейдем к более общему случаю. Пусть W — некоторый дробный интервал множества Ω. Через $\xi(W)$ обозначим число смежных с Ω дробных L-классов из R^n/L, которые неотделимы от W целыми точками из Ω. Введем величину $\alpha(W)$, полагая $\alpha(W) = 0$, если $\Omega \cap Z^n = \varnothing$ и, следовательно, $W = \Omega$; $\alpha(W) = 1$, если $\Omega \cap Z^n \neq \varnothing$ и W — внешний интервал; $\alpha(W) = 2$, если W — внутренний интервал.

Теорема 2. *Если множество Ω компактно в R^n и $W \in C(\Omega)$, то*

$$\xi(W) \leqslant \alpha(W)n + 2(n-1)|W/L|. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть W — внутренний интервал. В силу этого условия и ограниченности множества Ω найдутся такие целые точки $z^1, z^2 \in \Omega \cap Z^n$, что

$$z^1 = \operatorname{lex\,max}\{z \in \Omega \cap Z^n \mid z \prec W\}, \quad z^2 = \operatorname{lex\,min}\{z \in \Omega \cap Z^n \mid z \succ W\}.$$

Обозначим через U множество тех дробных классов $V \in R^n/L$, которые смежны с Ω и неотделимы от W целыми точками из Ω, т. е. $z^1 \prec V \prec z^2$. Положим $m = |W/L|$. Пусть L-классы из W/L имеют вид

$$W_k = \Omega \cap \{x \mid x_i = a_i^k,\ i = 1, \ldots, r_k - 1,\ a_{r_k}^k < x_{r_k} < a_{r_k}^k + 1\}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

где $a_1^k, \ldots, a_{r_k}^k$ — целые числа. Покажем, что множество U содержится в совокупности следующих L-классов из R^n/L:

$$V_{ks}^1 = \{x \mid x_i = a_i^k,\ i = 1, \ldots, s-1,\ a_s^k - 1 < x_s < a_s^k\},$$
$$V_{ks}^2 = \{x \mid x_i = a_i^k,\ i = 1, \ldots, s-1,\ a_s^k < x_s < a_s^k + 1\},$$
$$s = 1, \ldots, r_k - 1, \quad k = 1, \ldots, m,$$
$$V_s^1 = \{x \mid x_i = z_i^1,\ i = 1, \ldots, s-1,\ z_s^1 < x_s < z_s^1 + 1\},$$
$$V_s^2 = \{x \mid x_i = z_i^2,\ i = 1, \ldots, s-1,\ z_s^2 - 1 < x_s < z_s^2\},$$
$$s = 1, \ldots, n.$$

Пусть $V = \{x \mid x_i = a_i,\ i = 1,\dots,t-1,\ a_t < x_t < a_t + 1\}$ — произвольный L-класс из U. Из компактности множества Ω следует существование такой точки $y \in \Omega$, что $\rho(y, V) = 0$. Поэтому $y_i = a_i$, $i = 1,\dots,t-1$, и $a_t \leqslant y_t \leqslant a_t + 1$.

Если $y \preceq z^1$, то, учитывая соотношение $z^1 \prec V$, получаем $V = V_t^1$. Если $y \succeq z^2$, то с учетом $z^2 \succ V$ получаем $V = V_t^2$.

Пусть $z^1 \prec y \prec z^2$, т. е. $y \in W$ и, следовательно, $y \in W_l$ при некотором l. Возможны два случая: $V \prec W_l$ и $V \succ W_l$. Соотношение $V \prec W_l$ совместно с условиями $\rho(y, V) = 0$ и $y \in W_l$ только при $t \leqslant r_l - 1$ и $V = V_{lt}^1$. Если $V \succ W_l$, то $t \leqslant r_l - 1$ и $V = V_{lt}^2$.

Следовательно, множество U содержится в совокупности $\{V_{ks}^1, V_{ks}^2, V_s^1, V_s^2\}$ перечисленных выше классов и

$$\xi(W) = |U| \leqslant 2n + 2\sum_{k=1}^{m}(r_k - 1) \leqslant 2n + 2(n-1)m,$$

т. е. неравенство (3) верно. Если W — внешний интервал, то рассуждения аналогичны. Теорема 2 доказана.

Нетрудно построить примеры, когда в (3) выполняется как строгое неравенство, так и равенство.

3. Анализ устойчивости

Рассмотрим, как меняется L-разбиение множества Ω при его малых расширениях. Через $K(\Omega)$ обозначим множество всех L-классов из R^n/L, несмежных с Ω. Положим $\mu(\Omega) = \inf\{\rho(V, \Omega) \mid V \in K(\Omega)\}$. Множество Ω предполагаем компактным в R^n, поэтому $\mu(\Omega) > 0$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \mu(\Omega))$. Множество $\Omega_\varepsilon = \{x \mid \rho(x, \Omega) \leqslant \varepsilon\}$ называется *ε-расширением* множества Ω. Множество Ω_ε компактно в R^n и содержит те же целые точки, что и Ω, т. е. $\Omega_\varepsilon \cap Z^n = \Omega \cap Z^n$.

Рассмотрим произвольный дробный интервал $W_\varepsilon \in C(\Omega_\varepsilon)$. Интервалу W_ε поставим в соответствие содержащийся в нем интервал W множества Ω либо пустое множество, если такой интервал отсутствует. Нетрудно видеть, что $\alpha(W) = \alpha(W_\varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть множество Ω компактно в R^n, $\varepsilon \in (0, \mu(\Omega))$ и $W_\varepsilon \in C(\Omega_\varepsilon)$. Тогда справедливы неравенства*

$$|W/L| \leqslant |W_\varepsilon/L| \leqslant \alpha(W_\varepsilon)n + (2n-1)|W/L|. \tag{4}$$

Доказательство. Неравенство $|W/L| \leqslant |W_\varepsilon/L|$ очевидно, поскольку $W \subseteq W_\varepsilon$. Фактор-множество W_ε/L состоит из дробных L-классов, содержащих точки из W и точки из смежных с Ω классов. Поэтому

$$|W_\varepsilon/L| = |W/L| + \xi(W).$$

Используя неравенство (3), получаем (4). Теорема 3 доказана.

Условие компактности множества Ω является существенным. Можно построить примеры, когда при нарушении этого условия утверждение теоремы 3 неверно. Приведем некоторые следствия из доказанной теоремы, предполагая множество Ω компактным и $\varepsilon \in (0, \mu(\Omega))$.

Через Ω_ε^* обозначим дробное накрытие множества Ω_ε. Поскольку $\Omega_\varepsilon^* \in C(\Omega_\varepsilon)$, по теореме 3 получаем

$$|\Omega^*/L| \leqslant |\Omega_\varepsilon^*/L| \leqslant \alpha(\Omega_\varepsilon^*)n + (2n-1)|\Omega^*/L|.$$

Из этих неравенств и (2) следует, что

$$h^{-1}|\Omega^*/L| \leqslant I_D(\Omega_\varepsilon) \leqslant \alpha(\Omega_\varepsilon^*)n + (2n-1)|\Omega^*/L|,$$

т. е. при малых расширениях множества Ω число L-регулярных отсечений, используемых некоторым алгоритмом D, может расти не более чем линейно в зависимости от размерности n.

Переходя в неравенствах (4) к максимуму среди всех дробных интервалов $W_\varepsilon \in C(\Omega_\varepsilon)$, убеждаемся в том, что

$$\Psi(\Omega) \leqslant \Psi(\Omega_\varepsilon) \leqslant 2n + (2n-1)\Psi(\Omega),$$

т. е. при малых расширениях множества Ω его степень дробности растет не более чем линейно от n. В случае сколь угодно малого сужения множества Ω возможен экспоненциальный по n рост величины $\Psi(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Девятерикова М. В., Колоколов А. А.** Об устойчивости дробных накрытий задач целочисленного программирования // Междунар. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: Тез. Омск, 1997. С. 59–61.

2. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычислительной математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 11. С. 1801–1805.

3. **Колоколов А. А.** Методы дискретной оптимизации. Омск: Изд-во Омского гос. ун-та, 1984.

4. **Колоколов А. А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 2. С. 18–39.

5. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В.** Регулярные разбиения и устойчивость задач целочисленного программирования // Информ. бюл. Ассоциации мат. программирования. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. № 8. С. 161–162.

6. **Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н.** Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82–89, 105.
7. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995.
8. **Kolokolov A. A., Devyaterikova M. V.** On stability of L-structure of integer programming problems // Intern. conf. on operations research: Abstracts. Zurich, 1998. P. 52–53.

Адрес авторов:

Омский филиал
Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13,
644099 Омск, Россия.
E-mail: kolo@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
6 декабря 1999 г.,
переработанный вариант —
17 июня 2000 г.