ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 54–59

УДК 519.8

ДВУХУРОВНЕВАЯ БИМАТРИЧНАЯ ИГРА С РЕГУЛИРОВКОЙ ВЫИГРЫША*)

Р. М. Ларин, А. В. Пяткин

Рассматривается двухуровневая биматричная игра, в которой игрок верхнего уровня не только выбирает смешанную стратегию, но и имеет возможность изменять элементы матриц выигрышей. Игрок нижнего уровня строит свою оптимальную стратегию с учетом выбора стратегии на верхнем уровне и изменения матрицы выигрышей. Показано, что в кооперативном случае, когда интересы нижнего уровня не противоречат интересам верхнего уровня, решение игры сводится к серии задач линейного программирования. В антикооперативном случае доказано существование ε-оптимальных решений.

Конечную игру двух лиц с произвольной суммой описывают парой прямоугольных матриц. Элементы этих матриц являются выигрышами первого и второго игроков, если они выбирают чистые стратегии. Игра в такой форме называется биматричной игрой. Известно, что классическое определение ситуации равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре обладает рядом недостатков по сравнению с аналогичным определением в матричной игре с нулевой суммой. Поэтому предпринимаются попытки рассмотреть другие постановки задачи [4, 5].

В данной статье биматричная игра рассматривается как двухшаговый процесс, в котором смешанную стратегию выбирает сначала первый игрок, а затем второй. Задача дополнена возможностью первого игрока «доплатить» противной стороне с целью увеличения своего выигрыша. Этот подход близок к идее побочных платежей [1, 3]. Аналогичная конструкция в двухуровневых задачах стандартизации рассмотрена в [2].

1. Постановка задачи

Введем обозначения: $I = \{1, \dots, n\}$ и $J = \{1, \dots, m\}$ — множества чистых стратегий игроков; $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ — векторы

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00482) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

смешанных стратегий; $X = \{x \mid x \geqslant 0, \sum\limits_{i\in I} x_i = 1\}$ и $Y = \{y \mid y \geqslant 0, \sum\limits_{j\in J} y_j = 1\}$ — множества смешанных стратегий; $C = (c_{ij})_{i\in I, j\in J}$ и $D = (d_{ij})_{i\in I, j\in J}$ — матрицы выигрышей; $u = (u_{ij})_{i\in I, j\in J}$ — матрица дополнительных платежей первого игрока второму.

Выигрыши первого и второго игроков определим равенствами

$$F(x,u,y) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(c_{ij} - u_{ij})x_i y_j, \quad \Phi(x,u,y) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(d_{ij} + u_{ij})x_i y_j.$$

По аналогии с [2] рассмотрим две постановки задачи: кооперативную и антикооперативную.

Кооперативная двухуровневая задача формулируется следующим образом: найти

$$\max_{y\in Y^*(x,u)} F(x,u,y) \to \max_{x\in X, u\geqslant 0}, \tag{1}$$

где $Y^*(x,u)$ — множество оптимальных решений задачи

$$\Phi(x,u,y) \to \max_{y\in Y}. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что

$$Y^*(x,u) = \Big\{y \in Y \mid \sum_{j\in J^*(x,u)} y_j = 1\Big\},$$

где

$$J^*(x,u) = \operatorname{Arg}\max_{j\in J} \sum_{i\in I}(d_{ij} + u_{ij})x_i.$$

Выражения (1) и (2) назовем задачами *верхнего* и *нижнего* уровней. В случае неединственности решения задачи нижнего уровня (2) игрок верхнего уровня рассчитывает на наилучший результат.

В *антикооперативной* задаче вместо (1) рассматривается

$$\min_{y\in Y^*(x,u)} F(x,u,y) \to \max_{x\in X, u\geqslant 0},$$

т. е. игрок верхнего уровня ориентируется на наихудший результат.

2. Преобразование задачи

Введем новые переменные

$$v_j = \sum_{i\in I} u_{ij} x_i, \quad j \in J. \tag{3}$$

С учетом (3) целевые функции F и Φ принимают вид

$$F'(x,v,y) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(c_{ij}x_i - v_j)y_j, \quad \Phi'(x,v,y) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(d_{ij}x_i + v_j)y_j.$$

Положим $X' = \{(x, v) \mid x \in X,\ v \geqslant 0\}$ и рассмотрим следующую кооперативную двухуровневую задачу:

$$\max_{y \in Y'(x,v)} F'(x, v, y) \to \max_{(x,v) \in X'}, \tag{4}$$

где $Y'(x, v)$ — множество оптимальных решений задачи

$$\Phi'(x, v, y) \to \max_{y \in Y}. \tag{5}$$

Здесь

$$Y'(x, v) = \Big\{y \in Y \mid \sum_{j \in J'(x,v)} y_j = 1\Big\}, \quad J'(x, v) = \operatorname{Arg}\max_{j \in J} \Big\{\sum_{i \in I} d_{ij} x_i + v_j\Big\}.$$

Теорема 1. *Задачи* (1)–(2) *и* (4)–(5) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть x^*, u^* — оптимальное решение задачи (1)–(2) и v^* — вектор с компонентами $v_j^* = \sum_{i \in I} u_{ij}^* x_i^*$, $j \in J$.

Рассмотрим произвольную пару $(x, v) \in X'$. Поскольку $x \neq 0$, нетрудно найти матрицу $u = (u_{ij})_{i \in I, j \in J}$, удовлетворяющую (3). Очевидно, что $J^*(x, u) = J'(x, v)$ и $Y^*(x, u) = Y'(x, v)$. Отсюда и из оптимальности решения следует, что

$$\max_{y \in Y'(x^*,v^*)} F'(x^*, v^*, y) = \max_{y \in Y^*(x^*,u^*)} F(x^*, u^*, y) \geqslant \max_{y \in Y^*(x,u)} F(x, u, y) = \max_{y \in Y'(x,v)} F'(x, v, y).$$

Следовательно, пара (x^*, v^*) — оптимальное решение задачи (4)–(5).

Пусть теперь (x^*, v^*) — оптимальное решение задачи (4)–(5). Так как $x^* \geqslant 0$ и $x^* \neq 0$, то найдется компонента $x_{i'}^* > 0$. Положим $u_{i'j}^* = v_j^* / x_{i'}^*$ при $j \in J$ и $u_{ij}^* = 0$ в остальных случаях. Рассмотрим произвольную пару (x, u), где $x \in X$ и $u \geqslant 0$. Обозначим через v вектор, удовлетворяющий (3). Как и выше, имеем $Y^*(x, u) = Y'(x, v)$. Поэтому

$$\max_{y \in Y^*(x^*,u^*)} F(x^*, u^*, y) = \max_{y \in Y'(x^*,v^*)} F'(x^*, v^*, y) \geqslant \max_{y \in Y'(x,v)} F'(x, v, y) = \max_{y \in Y^*(x,u)} F(x, u, y).$$

Следовательно, пара (x^*, u^*) — оптимальное решение задачи (1)–(2). Теорема 1 доказана.

3. Кооперативная задача

В силу теоремы 1 вместо задачи (1)–(2) можно рассматривать задачу (4)–(5).

Лемма 1. *При любых $x \in X$ и $v \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$\max_{y \in Y'(x,v)} F'(x,v,y) = \max_{j \in J'(x,v)} \Big\{ \sum_{i \in I} c_{ij} x_i - v_j \Big\}.$$

Доказательство. Обозначим через L и R значения левой и правой частей доказываемого равенства. Из соотношений

$$L = \max_{y \in Y'(x,v)} \sum_{j \in J'(x,v)} \sum_{i \in I} (c_{ij} x_i - v_j) y_j \leqslant R \sum_{j \in J'(x,v)} y_j = R$$

следует, что $L \leqslant R$. С другой стороны, очевидно, что $L \geqslant R$. Поэтому $L = R$. Лемма 1 доказана.

Каждому элементу $j \in J$ поставим в соответствие множество

$$X'_j = \Big\{ (x,v) \in X' \mid \sum_{i \in I} d_{ij} x_i + v_j \geqslant \sum_{i \in I} d_{ik} x_i + v_k,\ k \in J,\ k \neq j \Big\}$$

и величину

$$h_j = \max_{(x,v) \in X'_j} \Big\{ \sum_{i \in I} c_{ij} x_i - v_j \Big\}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Для кооперативной задачи* (4)–(5) *справедливо равенство*

$$\max_{(x,v) \in X'} \max_{y \in Y'(x,v)} F'(x,v,y) = \max_{j \in J} h_j.$$

Доказательство. Применяя лемму 1 при $(x,v) \in X'_j$, получаем

$$\max_{y \in Y'(x,v)} F'(x,v,y) = \sum_{i \in I} c_{ij} x_i - v_j.$$

Учитывая это равенство и очевидное соотношение $X' = \bigcup_{j \in J} X'_j$, убеждаемся, что

$$\max_{(x,v) \in X'} \max_{y \in Y'(x,v)} F'(x,v,y) = \max_{j \in J} \max_{(x,v) \in X'_j} \max_{y \in Y'(x,v)} F'(x,v,y)$$

$$= \max_{j \in J} \max_{(x,v) \in X'_j} \Big\{ \sum_{i \in I} c_{ij} x_i - v_j \Big\} = \max_{j \in J} h_j,$$

т. е. требуемое равенство выполняется. Теорема 2 доказана.

Обозначим через (x^j, v^j) оптимальное решение задачи (6), и пусть $k \in \operatorname{Arg}\max_{j \in J} h_j$. Тогда в силу теоремы 2 пара (x^k, v^k) является оптимальным решением задачи (4)–(5). Для его получения требуется решить $m = |J|$ задач линейного программирования (6).

Теорема 3. *Кооперативная задача* (1)–(2) *имеет решение при любых матрицах C и D.*

Доказательство. При любых матрицах C и D и любом $j \in J$ множество X'_j непусто и $h_j \leqslant \max_{i \in I} c_{ij}$. Следовательно, задача (6) имеет решение. С учетом теорем 1 и 2 получаем требуемое утверждение. Теорема 3 доказана.

4. Антикооперативная задача

Аналогично теореме 1 можно убедиться в том, что замена переменных (3) позволяет свести исходную антикооперативную задачу к задаче

$$\min_{y\in Y'(x,v)} F'(x,v,y) \to \max_{(x,v)\in X'}, \tag{7}$$

где $Y'(x,v)$ — множество оптимальных решений задачи (5). Так же, как и при доказательстве леммы 1, проверяется справедливость равенства

$$\min_{y\in Y'(x,v)} F'(x,v,y) = \min_{j\in J'(x,v)} \Big\{ \sum_{i\in I} c_{ij}x_i - v_j \Big\}. \tag{8}$$

Положим $J^* = \operatorname{Arg}\max_{j\in J} h_j$. Если найдется элемент $j \in J^*$ такой, что

$$\sum_{i\in I} d_{ij}x_i^j + v_j^j > \sum_{i\in I} d_{ik}x_k^j + v_k^j, \ \ k\in J\backslash\{j\},$$

то решение задачи нижнего уровня единственно и задача верхнего уровня (7) имеет то же решение, что и в кооперативном случае. Ситуация усложняется, если такого j не существует. Это значит, что для любого $j \in J^*$ некоторые неравенства

$$\sum_{i\in I} d_{ij}x_i^j + v_j^j \geqslant \sum_{i\in I} d_{ik}x_i^j + v_k^j, \quad k\in J\backslash\{j\} \tag{9}$$

выполняются как равенства. Пусть для данного $j \in J^*$ равенство имеет место при некотором $l \in J\backslash\{j\}$. Тогда в силу включений $(x^j, v^j) \in X_j'$ и $(x^j, v^j) \in X_l'$ выполняются соотношения

$$\{j,l\} \subseteq J'(x^j, v^j), \quad \sum_{i\in I} c_{ij}x_i^j - v_j^j \geqslant \sum_{i\in I} c_{il}x_i^j - v_l^j.$$

Поэтому

$$\min_{k\in J'(x^j,v^j)} \Big\{ \sum_{i\in I} c_{ik}x_i^j - v_k^j \Big\} \leqslant \sum_{i\in I} c_{ij}x_i^j - v_j^j$$

и неравенство может быть строгое.

С другой стороны, рассмотрим допустимую точку $(x^j, v^j + \varepsilon^j)$, где ε^j — вектор с компонентами $\varepsilon_j^j = \varepsilon > 0$ и $\varepsilon_k^j = 0$ при $k \neq j$. В этой точке все неравенства (9) будут строгими при любом положительном ε. В силу равенств $J'(x^j, v^j+\varepsilon^j) = \{j\}$ и (8) получаем

$$\min_{y\in Y'(x^j,v^j+\varepsilon^j)} F'(x^j, v^j+\varepsilon^j, y) = \sum_{i\in I} c_{ij}x_i^j - v_j^j - \varepsilon, \tag{10}$$

т. е. может не существовать решения антикооперативной задачи.

Точку $(x', v') \in X'$ назовем ε-оптимальным решением антикооперативной задачи, если

$$\max_{j\in J} h_j - \min_{y\in Y'(x',v')} F'(x', v', y) \leqslant \varepsilon.$$

Из этого определения и равенства (10) следует

Теорема 4. *При любых матрицах C и D двухуровневая антикооперативная задача имеет ε-оптимальное решение.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. **Горбачевская Л. Е.** Алгоритмы и сложность решения двухуровневых задач стандартизации с коррекцией дохода // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 2. С. 20–33.
3. **Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
4. **Оуэн Г.** Теория игр. М.: Мир, 1971.
5. **Stackelberg H. V.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.