

## ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХСВЯЗНЫХ ГРАФОВ С СОВПАДАЮЩИМИ ЦЕПНЫМИ МАТРИЦАМИ СЛОЕВ\*)

*Л. С. Мельников, А. А. Добрынин*

Цепная матрица слоев (цепная степенная последовательность)  $\tau(G)$  содержит количественную информацию о цепях, начинающихся в вершинах обыкновенного связного неориентированного графа  $G$ . Под длиной цепи понимается число ее ребер. Элемент  $\tau_{ij}$  матрицы равен числу всех простых цепей длины  $j$ , начинающихся в вершине  $v_i$ . Предлагается метод построения пар неизоморфных графов без точек сочленения с совпадающими цепными матрицами слоев. Построены бесконечные семейства как планарных, так и непланарных регулярных двусвязных и трехсвязных графов.

### Введение

Рассматриваются обыкновенные связные неориентированные графы  $G$  с множеством вершин  $V(G)$ , где  $p = |V(G)|$ . Под длиной цепи в графе понимается число ее ребер. В зависимости от того, какие цепи рассматриваются, различают дистанционную и цепную матрицы слоев графа. Дистанционная матрица слоев (далее просто *матрица слоев*) есть матрица  $\lambda(G) = (\lambda_{ij})$ , в которой элемент  $\lambda_{ij}$  равен числу вершин, находящихся на расстоянии  $j$  от вершины  $v_i$ . *Цепной матрицей слоев* графа  $G$  называется матрица  $\tau(G) = (\tau_{ij})$ , в которой элемент  $\tau_{ij}$  равен числу всех простых цепей длины  $j$ , начинающихся в вершине  $v_i$ .

Так как в дереве любые две вершины соединены единственной цепью, то в классе деревьев введенные матрицы совпадают. Упорядочив строки матриц по уменьшению их длины (числу ненулевых элементов), а затем строки одинаковой длины упорядочив лексикографически, получим канонический вид матриц слоев (см. пример на рис. 1; рядом со строками матриц указаны номера соответствующих вершин графа).

---

\*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00581) и INTAS (проект 97-1001).

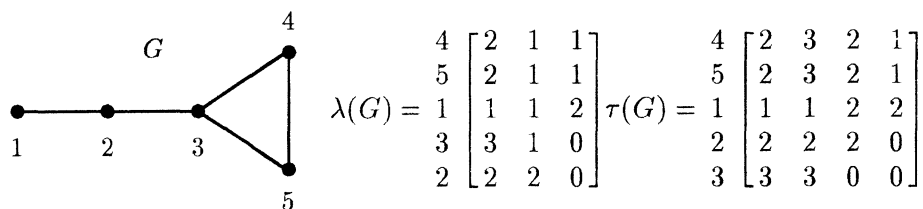


Рис. 1

Матрицы слоев естественным образом появились при изучении расстояний между вершинами графа [4, 5]. В ряде работ они рассматривались как обобщение степенной последовательности графа под названиями «distance degree sequence» и «path degree sequence» (см. обзор [8]). Известно применение матриц слоев в химических приложениях в качестве структурных дескрипторов молекулярных графов («path atomic code») [16, 17]. На основе этих матриц строятся векторные и скалярные инварианты (топологические индексы), используемые при исследовании взаимосвязи между структурой молекулярных графов и свойствами соответствующих химических соединений [7, 12, 17, 20]. Матрица слоев используется при построении алгоритмов на графах для быстрого нахождения множеств вершин с одинаковыми характеристиками [1, 6]. В [8] указывается на связь матрицы слоев с задачами исследования операций (размещение центров и медиан).

Как и для всякого инварианта, не характеризующего графы с точностью до изоморфизма, для теории матриц слоев интересен вопрос о существовании неизоморфных графов с совпадающими матрицами. Уже среди графов на пяти вершинах имеются два графа с одинаковыми матрицами слоев [5]. Неизоморфные деревья с таким свойством найдены в [4, 5, 19]; наименьшие известные деревья имеют 18 вершин [4, 19].

Теоретическое исследование свойств цепной матрицы слоев — более сложная задача, так как трудно уследить за (экспоненциальным) ростом числа всех цепей в графе. Так, до настоящего времени нам не известно ни одного опубликованного примера графов без точек сочленения с одинаковыми цепными матрицами слоев. В [16] утверждается, что для графов с числом вершин  $p \leq 11$  совпадение цепных матриц слоев является достаточным условием их изоморфизма. Первые примеры графов с совпадающими цепными матрицами слоев были получены добавлением треугольников на ребра деревьев с одинаковыми матрицами слоев. На этой основе в [15] выдвинута гипотеза о связи обхвата и цикломатического числа с наименьшим числом вершин таких графов, контрпримеры к которой построены в [18]. Минимальное число вершин известных графов с совпадающими цепными матрицами слоев равно 14 [2]. В работах [8, 15] сформулирована проблема однозначности представления

регулярных графов со степенью вершин  $r$  ( $r$ -регулярных графов): существуют ли два связных неизоморфных  $r$ -регулярных графа с совпадающими цепными матрицами слоев; если ответ положительный, то каково наименьшее число вершин графов для каждого  $r \geq 3$ ? Эта проблема конструктивно решена в [2, 9], а число вершин в построенных графах дало верхнюю оценку для наименьшего числа вершин таких графов при любом  $r \geq 3$  (116 вершин для кубических графов [9]). Верхняя оценка наименьшего числа вершин в кубических графах была затем снижена до 90 и позднее до 62 вершин [3, 10].

В настоящей статье предлагается метод для построения графов без точек сочленения с совпадающими цепными матрицами слоев. Построены бесконечные семейства как планарных, так и непланарных регулярных двусвязных и трехсвязных графов. Это дает ответ на ряд вопросов, сформулированных в [8, 9].

## 1. Конструкция графов

Рассмотрим граф  $T$ , группа автоморфизмов которого обладает следующими свойствами (см. условное изображение  $T$  на рис. 2, а):

(а) группа содержит автоморфизмы, циклически переводящие вершины  $a$ ,  $b$  и  $c$  друг в друга ( $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ ), т. е. имеет циклическую подгруппу третьего порядка;

(б) не существует автоморфизма, оставляющего вершину  $a$  неподвижной и переводящего вершины  $b$  и  $c$  друг в друга.

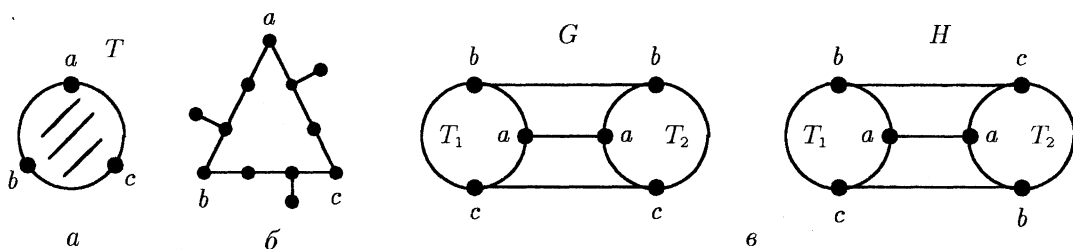


Рис. 2

Пример графа  $T$  с указанными свойствами приводится на рис. 2, а. Из двух копий  $T_1$  и  $T_2$  графа  $T$  построим новые графы  $G$  и  $H$ , как изображено на рис. 2, б.

**Теорема 1.** Графы  $G$  и  $H$ , изображенные на рис. 2, в, являются неизоморфными.

**Доказательство.** Пусть, напротив, между графами  $G$  и  $H$  существует какое-либо изоморфное соответствие. Рассмотрим отображение  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  такое, что 1)  $f(v) = v$  для всех  $v \in V(T_1)$ ; 2)  $f(a) = a$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = b$  для  $a, b, c \in V(T_2)$ , т. е. вершины  $b$  и  $c$  из  $T_2$

переходят друг в друга; 3) подграф, порожденный  $f(V(T_2))$ , изоморфен  $T_2$ . Обозначим через  $G'$  образ  $G$  при отображении  $f$ . Так как по построению  $G' \cong H$ , то  $G \cong G'$ . Следовательно, граф  $G$  переходит в себя, т. е.  $f$  порождает автоморфизм  $G$ , переставляющий вершины  $b$  и  $c$  в  $T_2$ . В силу того, что подграф  $T_1$  под действием автоморфизма остается неподвижным, вершины  $b$  и  $c$  принадлежат одной орбите группы автоморфизмов  $T_2$ . Так как вершина  $a \in V(T_2)$  при этом остается неподвижной, то для  $T_2$  не будет выполняться свойство (b) графа  $T$  (см. рис. 2, а.) Полученное противоречие влечет неизоморфность графов  $G$  и  $H$ . Теорема 1 доказана.

Обозначим через  $\tau_G(v)$  строку цепной матрицы слоев  $\tau(G)$ , которая соответствует вершине  $v \in V(G)$ . Далее под цепью всегда будет пониматься простая цепь.

**Теорема 2.** Для графов  $G$  и  $H$ , изображенных на рис. 2, в, существует взаимно однозначное отображение  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  такое, что  $\tau_G(v) = \tau_H(\phi(v))$ , и, следовательно, цепные матрицы слоев графов совпадают, т. е.  $\tau(G) = \tau(H)$ .

**Доказательство.** Пусть  $i_1 : V_G(T_1) \rightarrow V_H(T_1)$  и  $i_2 : V_G(T_2) \rightarrow V_H(T_2)$  обозначают тождественные соответствия подграфов  $T_1$  и  $T_2$  в графах  $G$  и  $H$ . Тогда отображение  $\phi$  определим так, что на вершинах подграфа  $T_1$  оно совпадает с  $i_1$ , а на вершинах подграфа  $T_2$  — с  $i_2$ .

Обозначим через  $\mathcal{P}_x$  множество всех цепей, начинающихся в вершине  $x$ , а через  $\mathcal{P}_{xy}$  — множество всех цепей, соединяющих в графе вершины  $x$  и  $y$ . Пусть множество  $\mathcal{P}_{xyz}$  содержит все несвязные цепи, каждая из которых состоит из двух непересекающихся по вершинам частей. Одна часть такой цепи соединяет в графе вершины  $x$  и  $y$ , а другая часть начинается в вершине  $z$ . Для цепей будем использовать аналогичные обозначения  $g_x$  или  $h_{xy}$  и т. п., в зависимости от того, в каком графе  $G$  или  $H$  рассматривается цепь. Для удобства под цепью будем понимать как множество вершин цепи, так и упорядоченную последовательность ее вершин.

Пусть  $v \in V(G)$  и  $u = \phi(v)$ . Для доказательства равенства  $\tau_G(v) = \tau_H(u)$  конструктивно построим биекцию  $f : \mathcal{P}_v \rightarrow \mathcal{P}_u$  между цепями фиксированной длины в  $G$  и  $H$ , т. е. для любой цепи  $g_v \in \mathcal{P}_v$  цепь  $h_u = f(g_v) \in \mathcal{P}_u$  будет иметь ту же длину.

**Лемма.** Пусть произвольный граф  $T$  удовлетворяет свойству (а). Тогда существуют взаимно однозначные соответствия между его цепями  $m_1 : \mathcal{P}_b \rightarrow \mathcal{P}_c$ ,  $m_2 : \mathcal{P}_{ab} \rightarrow \mathcal{P}_{ac}$  и  $m_3 : \mathcal{P}_{abc} \rightarrow \mathcal{P}_{acb}$  такие, что совпадают длины цепей: а)  $t_b \in \mathcal{P}_b$  и  $m_1(t_b)$ ; б)  $t_{ab} \in \mathcal{P}_{ab}$  и  $m_2(t_{ab})$ ; в)  $t_{abc} \in \mathcal{P}_{abc}$  и  $m_3(t_{abc})$ , причем в последнем случае подцепь, соединяющая вершины  $a$  и  $b$ , переходит в подцепь, соединяющую вершины  $a$  и  $c$ , и эти подцепи также одинаковой длины.

Доказательство леммы очевидным образом следует из свойства (а) графа  $T$ . При этом вершины соответствующих цепей в  $T$  переводятся автоморфизмами циклической подгруппы друг в друга.

В силу симметрии конструкции графов  $G$  и  $H$  достаточно построить отображение  $f$  для вершин подграфа  $T_1$ . Ребра, соединяющие подграфы  $T_1$  и  $T_2$ , будем называть звеньями, а звенья, соединяющие вершину  $a$  из  $T_1$  с вершиной  $a$  из  $T_2$ , — центральными звеньями.

Пусть  $v \in V_G(T_1)$  и  $u = \phi(v) \in V_H(T_1)$ . В зависимости от числа звеньев в цепи  $g_v$  будем различать несколько случаев. При построении отображения  $f$  используем пары цепей, изображенные на рис. 3 (стрелками показано направление обхода звеньев).

1. Цепь  $g_v$  не содержит ни одного звена, т. е. цепь не покидает подграфа  $T_1$ . В этом случае цепь  $h_u$  полностью определяется соответствием  $i_1$  подграфов  $T_1$  в графах  $G$  и  $H$ , т. е.  $h_u = i_1(g_v) = f(g_v)$ .

В рассмотренных ниже случаях цепь  $g_v$  всегда проходит через вершины как подграфа  $T_1$ , так и подграфа  $T_2$ . При этом соответствующие звенья всегда будут находиться в цепях  $g_v$  и  $h_u$  на одинаковых местах и проходиться в одном и том же направлении. Для подцепей из  $g_u$  и  $h_u$ , проходящих через вершины подграфа  $T_1$ , отображение  $f$  зададим совпадающим с соответствием  $i_1$ . Далее отображение  $f$  будет строиться только для подцепей из  $g_v$  и  $h_u$ , проходящих через вершины подграфов  $T_2$ .

2. Цепь  $g_v$  содержит одно звено. Возможны два случая (здесь и далее случаи рассматриваются с точностью до симметрии обхода звеньев).

2.1. Звено является центральным (см. рис. 3, а). Цепь  $g_v$  входит в подграф  $T_2$  через вершину  $a$  и не покидает его. Так как  $h_u$  также входит в  $T_2$  через вершину  $a$ , то соответствующую часть  $h_a$  цепи  $h_u$  можно определить соответствием  $i_2$  подграфов  $T_2$ , т. е.  $h_a = i_2(g_a) = f(g_a)$ .

2.2. Звено не является центральным (см. рис. 3, б). В этом случае цепи  $g_v$  и  $h_u$  входят в  $T_2$  через разные вершины  $b$  и  $c$ . Тогда подцепь  $h_c$  из  $h_u$  определим в подграфе  $T_2$  с помощью биекции  $m_1$ , т. е.  $h_c = m_1(g_b) = f(g_b)$ .

3. Цепь  $g_v$  содержит два звена. Здесь также возможны два случая.

3.1. Цепь  $g_v$  проходит через центральное звено (см. рис. 3, в). Если цепь  $g_v$  в подграфе  $T_2$  соединяет вершины  $a$  и  $b$  (или  $a$  и  $c$ ), то  $h_u$  соединяет в  $T_2$  вершины  $a$  и  $c$  (или  $a$  и  $b$ ). Поэтому часть  $h_{ac}$  цепи  $h_u$  определим биекцией  $m_2$ , т. е.  $h_{ac} = m_2(g_{ab}) = f(g_{ab})$ , и т. д.

3.2. В цепи  $g_v$  нет центрального звена (см. рис. 3, г). Обе цепи проходят через одни и те же вершины в  $T_2$ , соединяют вершины  $b$  и  $c$  и различаются только направлением обхода вершин. Поэтому часть  $h_{bc}$

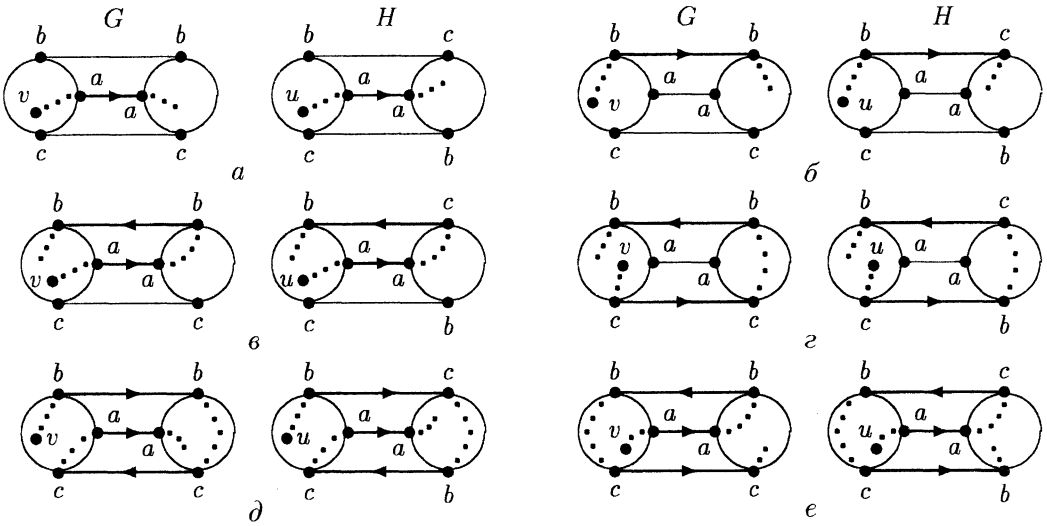


Рис. 3

цепи  $h_u$  в подграфе  $T_2$  определим соответствием  $i_2$  (с обратным следованием вершин):  $h_{bc} = i_2(g_{cb}) = f(g_{cb})$ .

4. Цепь  $g_v$  включает все звенья. Достаточно рассмотреть два случая.

4.1. Центральное звено содержится в цепи  $g_v$  последним (см. рис. 3, д). Тогда в подграфе  $T_2$  цепь  $g_v$  состоит из двух частей. Первая часть соединяет вершины  $b$  и  $c$ , а вторая часть начинается в вершине  $a$ . Так как эти части не пересекаются, то составную подцепь  $h_{cba}$  из  $h_u$  определим через соответствие  $i_2$  (для первой части с обратным следованием вершин):  $h_{cba} = i_2(g_{bca}) = f(g_{bca})$ .

4.2. Центральное звено в цепи  $g_v$  проходится первым или вторым (см. рис. 3, е). В подграфе  $T_2$  цепь  $g_v$  состоит из двух частей, и в  $h_u$  эти подцепи имеют другие концевые вершины. Поэтому подцепь  $h_{acb}$  из  $h_u$  в подграфе  $T_2$  зададим биекцией  $m_3$ , т. е.  $h_{acb} = m_3(g_{abc}) = f(g_{abc})$ , и т. д.

Итак, для любой цепи  $g_v$  из графа  $G$  конструктивно построен ее образ  $h_u = f(g_v)$  в графе  $H$ . Цепь  $h_u$  склеивается из образов частей цепи  $g_v$ , определяемых биекциями  $i_1, i_2, m_1, m_2$  и  $m_3$ . Обратно, для каждой цепи  $h_u$  прообраз  $f^{-1}(h_u)$  строится с использованием соответствующих биекций. Предположим, что для цепи  $h_u$  из  $H$  ее прообраз  $f^{-1}(h_u)$  не единственный в  $G$ . Тогда легко показать, что хотя бы одно из отображений  $m_1, m_2$  или  $m_3$  не будет биективным, что противоречит их выбору согласно лемме. Поэтому соответствие  $f$  между цепями, начинающимися в вершинах  $v$  и  $u = \phi(v)$ , является взаимно однозначным.

Следовательно, для любой вершины  $v \in V(G)$  выполняется  $\tau_G(v) = \tau_H(u)$ , что влечет равенство цепных матриц слоев графов, т. е.  $\tau(G) = \tau(H)$ . Теорема 2 доказана.

При построении графов  $G$  и  $H$  можно соединять копии графа  $T$  не только ребрами, но и произвольными подграфами. Для отличия от звеньев-ребер такие подграфы будут называться звеньями-подграфами.

**Следствие.** Пусть в графах  $G$  и  $H$  звенья заменены на произвольные графы и нецентральные звенья-подграфы являются изоморфными. Тогда  $\tau(G) = \tau(H)$ .

**Доказательство.** Напомним, что при построении соответствия  $f$  между цепями в графах  $G$  и  $H$  в цепях  $g_v$  и  $h_u$  соответствующие звенья располагались на одинаковых местах и проходились в одном и том же направлении. Следовательно, если вместо них вставить какую-либо цепь из новых подграфов, то равенство длин цепей  $g_v$  и  $h_u$  сохранится. Равенство строк цепных матриц слоев для вершин из звеньев-подграфов также следует из доказательства теоремы. Следствие доказано.

Из доказательства теоремы 2 следует, что графы  $G$  и  $H$ , изображенные на рис. 2, 6, могут быть построены из двух неизоморфных графов  $T_1$  и  $T_2$ , каждый из которых удовлетворяет свойствам (а) и (б).

## 2. Построение семейств графов

Согласно конструкции, указанной на рис. 2, 6, для построения графов с заданными свойствами и совпадающими цепными матрицами слоев достаточно подобрать подходящий граф  $T$  и обеспечить правильное соединение двух его копий.

**Утверждение 1.** При любом  $p \geq 18$  существуют неизоморфные  $p$ -вершинные как планарные, так и непланарные двусвязные или трехсвязные графы с совпадающими цепными матрицами слоев.

**Доказательство.** Графы с 18 вершинами с нужными свойствами строятся из двух копий 9-вершинных графов  $T$ , изображенных на рис. 4. Двусвязные планарные и непланарные  $p$ -вершинные графы,  $p > 18$ , образуются из графов, указанных на рис. 4, а, б, с добавлением необходимого числа вершин на центральные звенья.

Трехсвязные непланарные  $p$ -вершинные графы,  $p > 18$ , получаются из графа  $T$ , изображенного на рис. 4, в. Необходимое число новых вершин можно добавить, соединяя их с тремя вершинами степени 3 в  $T$ . Для трехсвязных планарных 18-вершинных графов используем граф  $T$ , изображенный на рис. 4, г. Для построения  $p$ -вершинных графов,  $p > 18$ , на ребра внутреннего центрального треугольника вначале последовательно

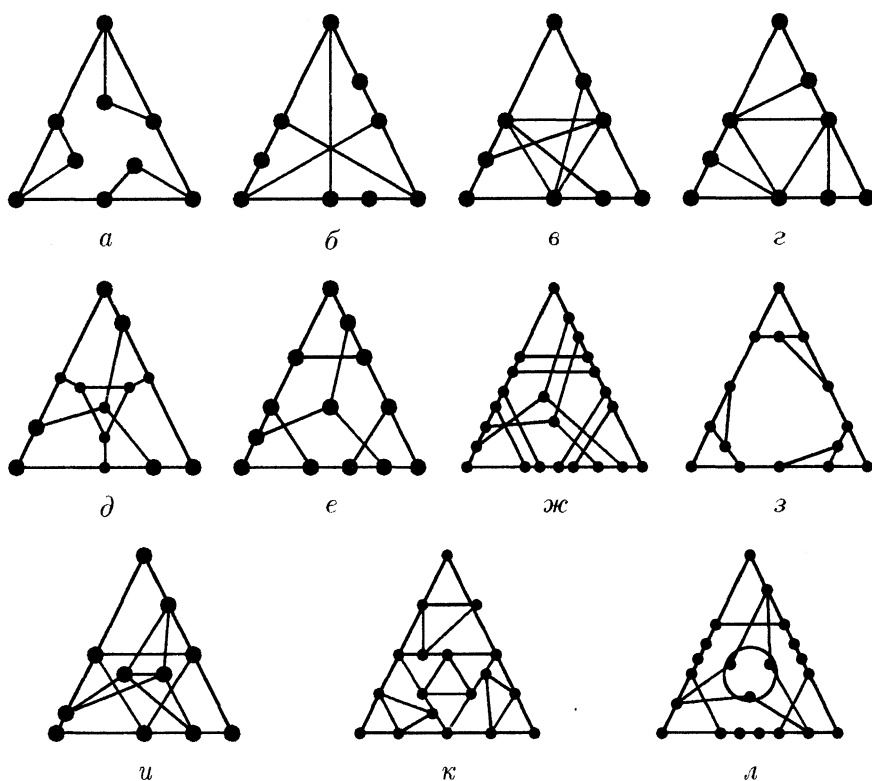


Рис. 4

вклеиваются новые треугольники, а затем при необходимости к вершинам самого внутреннего треугольника в каждой копии графов  $T$  присоединяется новая вершина. Утверждение 1 доказано.

По-видимому, граф, изображенный на рис. 4, *а*, является графом с наименьшим числом вершин и ребер, который обладает свойствами (а) и (б). Если в этом графе угловые вершины степени 3 соединить ребрами, то получим граф с наименьшим числом вершин и ребер, группа автоморфизмов которого изоморфна циклической группе третьего порядка [11].

**Вопрос 1.** Существуют ли неизоморфные  $p$ -вершинные графы,  $12 \leq p \leq 17$ , без точек сочленения с совпадающими цепными матрицами слоев?

В исследованиях свойств матриц слоев наибольшее внимание уделялось кубическим графам. Предложенный способ позволяет строить кубические графы с различными свойствами и совпадающей цепной матрицей слоев. Верхняя оценка для наименьшего числа вершин в таких графах снижается с 62 до 26 вершин.



**Утверждение 2.** При любом  $p \geq 26$  ( $p \geq 30$ ) существуют неизоморфные трехсвязные непланарные (планарные) кубические  $p$ -вершинные графы с совпадающими цепными матрицами слоев.

**Доказательство.** Трехсвязные кубические 26-вершинные графы строятся из двух копий 13-вершинного графа  $T$ , изображенного на рис. 4, *е* (вариант недвудольного графа приведен на рис. 4, *д*), который может рассматриваться как результат вклейки графов  $3K_2$  и  $K_{1,3}$  в треугольник.

Для построения  $p$ -вершинных графов,  $p \geq 30$ , вклеим в граф  $T$  (рис. 4, *е*)  $n$  новых копий графа  $3K_2$  и  $m$  новых копий графа  $K_{1,3}$ , как показано на рис. 4, *ж* для  $n = 1$  и  $m = 1$ . Полученный граф  $T$  обладает свойствами (а) и (б), а построенные из него графы с совпадающей цепной матрицей слоев имеют  $p = 26 + 6n + 4m$  вершин. Нетрудно проверить, что при  $n \geq 0$  и  $0 \leq m \leq 2$  это семейство содержит кубические  $p$ -вершинные графы при любом  $p \geq 26$ , за исключением случая  $p = 28$ . Соединим нецентральные звенья в построенных выше 26-вершинных кубических графах новым ребром. Компьютерные вычисления показали, что цепные матрицы слоев таких 28-вершинных графов совпадают.

Планарные трехсвязные кубические 30-вершинные графы получаются из двух копий 15-вершинного графа, изображенного на рис. 4, *з*. Вклеивая в граф  $T$  (рис. 4, *з*) копии графов  $3K_2$  и  $K_{1,3}$  (граф  $K_{1,3}$  вклеивается не более одного раза), можно построить  $p$ -вершинные кубические графы при  $p \geq 34$ . Графы с 32 вершинами, цепные матрицы слоев которых одинаковы, строятся из кубических 30-вершинных графов соединением их нецентральных звеньев ребром (проверено компьютерными вычислениями). Утверждение 2 доказано.

Проведенные компьютерные расчеты показали, что не существует кубических  $p$ -вершинных графов,  $p \leq 18$ , с совпадающими цепными матрицами слоев (для  $p \leq 14$  это установлено в [13]).

**Вопрос 2.** Существуют ли неизоморфные кубические графы с числом вершин  $p = 20, 22, 24$  и совпадающими цепными матрицами слоев?

Наряду со свойствами кубических графов свойства регулярных графов степени 4 представляют интерес как для теоретических исследований, так и для приложений. Обозначим через  $G^*$  граф, полученный добавлением новой вершины на два произвольных ребра графа  $G$  (подразбиение ребер).

**Утверждение 3.** При любом  $p \geq 34$  ( $p \geq 51$ ) существуют неизоморфные 4-регулярные непланарные (планарные)  $p$ -вершинные графы с совпадающими цепными матрицами слоев.

**Доказательство.** Для построения двусвязных 4-регулярных графов используем 11-вершинный граф  $T$ , изображенный на рис. 4, *и*.

В силу 4-регулярности копии  $T$  должны соединяться звеньями-подграфами. Подходящим звеном является граф  $K_4 + v_1 + v_2$ , где новые вершины  $v_1$  и  $v_2$  присоединены к неинцидентным ребрам графа  $K_4$ . В результате получим двусвязные 4-регулярные 34-вершинные графы с совпадающими цепными матрицами слоев. Для построения 4-регулярных  $p$ -вершинных графов,  $p > 34$ , центральное звено в 34-вершинных графах можно заменить на граф  $F_n^*$ , где  $F_n$  есть произвольный 4-регулярный  $n$ -вершинный граф,  $n \geq 5$ .

Планарные 4-регулярные 51-вершинные графы получаются из двух копий 18-вершинного графа, изображенного на рис. 4,  $\kappa$ , со звеньями-подграфами  $W_{1,4} + v_1 + v_2$ , в которых вершины  $v_1$  и  $v_2$  имеют степень 2, а остальные вершины — степень 4. Графы с  $p$  вершинами,  $p > 51$ , можно получить, используя вместо центрального звена граф  $F_n^*$ , где  $F_n$  есть произвольный планарный 4-регулярный  $n$ -вершинный граф,  $n \geq 6$ , в котором подразбиваются два ребра внешней грани. Утверждение 3 доказано.

Установим верхнюю оценку наименьшего порядка  $r$ -регулярных графов с совпадающими цепными матрицами слоев в виде линейной функции от  $r$ . Под произведением графов  $G$  и  $H$  понимается граф  $G \cdot H$ , в котором каждая вершина графа  $G$  соединена с каждой вершиной графа  $H$ .

**Утверждение 4.** При любом  $r \geq 5$  и  $p = 7r + 13$  существуют пары неизоморфных двусвязных  $r$ -регулярных  $p$ -вершинных графов с совпадающими цепными матрицами слоев.

**Доказательство.** Построим граф  $T$ , удовлетворяющий свойствам (а) и (б). Берется треугольник  $T'$ , на ребрах которого будут размещены вершины двух подграфов. Если из полного графа  $K_{r+1}$  удалить ребра одного треугольника, то три вершины будут иметь степень  $r - 2$ , а остальные — степень  $r$ . Эти три вершины, принадлежащие одной орбите группы автоморфизмов, поместим на разные ребра треугольника  $T'$ . Представим новый полный граф  $K_{r+1}$  в виде  $K_{r+1-m} \cdot K_m$ , где  $m$  определяется из равенства  $r + 1 = 3n + m$ ,  $m \in \{0, 1, 2\}$ . Разместим  $n$  вершин подграфа  $K_{r+1-m}$  на каждом ребре  $T'$ . Крайние из этих вершины будут иметь степень  $r + 1$ . Удалив ребро между ними на каждой стороне  $T'$ , получим подграф с вершинами степени  $r$ . Взаимное расположение этих подграфов в  $T$ , изображенное на рис. 4,  $\lambda$ , обеспечивает выполнение свойств (а) и (б).

В качестве звеньев-подграфов можно взять граф  $K'_{r-2} \cdot C_3$ , где  $K'_{r-2}$  получен из полного графа  $K_{r-2}$  удалением ребер гамильтонова цикла. В этом графе  $r - 2$  вершины имеют степень  $r - 2$ , а оставшиеся три вершины имеют степень  $r$ . Вершины степени  $r - 2$  соединим с одной вершиной степени 2 из каждой копии  $T$ . Построенные  $r$ -регулярные

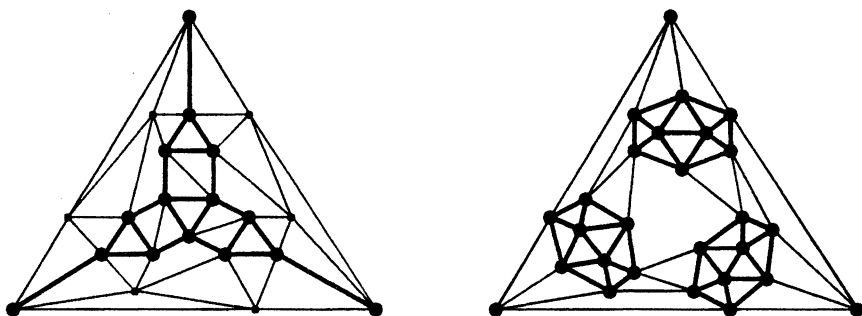


Рис. 5

графы имеют  $p = 2(2(r+1)+3)+3(r+1) = 7r+13$  вершин. Утверждение 4 доказано.

Заметим, что  $r$ -регулярные графы, построенные в утверждении 4, при  $r = 3$  и  $r = 4$  являются изоморфными. Из 5-регулярных графов можно получить трехсвязные 30-вершинные графы. Для этого достаточно звенья-подграфы сделать ребрами, а три вершины степени 3 в каждом  $T$  попарно соединить новыми ребрами.

**Утверждение 5.** При любом  $k \geq 7$  и  $p = 6k$  существуют пары неизоморфных трехсвязных планарных 5-регулярных  $p$ -вершинных графов с совпадающими цепными матрицами слоев.

**Доказательство.** Построим бесконечное семейство  $p$ -вершинных графов  $T_k$ , где  $p = 12k + 21$  и  $k \geq 1$ , из графа  $T_0$  с 21 вершиной, изображенного на рис. 5 (слева). Рассмотрим плоский граф икосаэдра, в котором удалены ребра внешней треугольной грани. Все вершины такого графа  $I$  имеют степень 5 за исключением трех вершин степени 3 внешней грани. Эти вершины поместим на ребра самого внутреннего треугольника в  $T_0$ . В полученном графе  $T_1$  есть новый центральный треугольник, на ребра которого снова вклеивается граф  $I$ , и т. д. Конструкция графа  $T_0$  и симметрии графа икосаэдра обеспечивают для всех получаемых графов  $T_k$  выполнение свойств (а) и (б). Для построения графов с совпадающими цепными матрицами слоев используем графы  $T_k$  и 27-вершинный граф, изображенный на рис. 5 (справа). Нетрудно проверить, что таким способом можно получить графы с  $p = 6k$  вершинами при любом  $k \geq 7$ . Утверждение 5 доказано.

Число вершин графов, о которых говорилось в предыдущих утверждениях, является верхней оценкой для наименьшего числа вершин во всех классах планарных регулярных графов.

**Вопрос 3.** Каковы порядки наименьших  $r$ -регулярных графов с совпадающими цепными матрицами слоев:

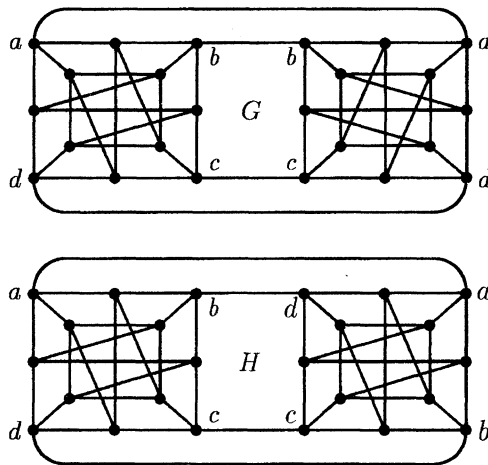


Рис. 6

а) для планарных графов с  $r = 3, 4, 5$ ;

б) для любого  $r \geq 4$ ?

Так как в работе предлагается метод построения графов с вершинной связностью не более 3, то естественно возникает следующий вопрос.

**Вопрос 4.** Существуют ли графы связности  $k$ ,  $k \geq 4$ , с совпадающими цепными матрицами слоев?

Естественный путь построения таких графов состоит в переходе от треугольника  $T$  к  $k$ -угольнику,  $k \geq 4$ , с циклическим автоморфизмом (аналог свойства (а)) и без диэдрального автоморфизма (аналог свойства (б)). Пример таких регулярных 24-вершинных графов при  $k = 4$  приведен на рис. 6. Однако первые строки цепных матриц слоев этих графов различаются в 14-й компоненте:

$$\tau_G(a) = (4, 12, 36, 104, 276, 696, 1696, 3986, 9206, 20924, \\ 46102, 97418, 193956, 356438 \dots),$$

$$\tau_H(a) = (4, 12, 36, 104, 276, 696, 1696, 3986, 9206, 20924, \\ 46102, 97418, 193956, 356436 \dots).$$

В заключение приведем открытый вопрос, касающийся различения планарности графов [8, 14].

**Вопрос 5.** Существуют ли два графа с совпадающими цепными матрицами слоев такие, что только один из них является планарным?

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам, а также А. В. Косточке, А. В. Пяткину и Д. Г. Фон-Дер-Флаассу за ценные замечания, позволившие улучшить текст статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгоритмы** и программы решения задач на графах и сетях / Нечепуренко М. И., Попков В. К., Майнагашев С. М. и др. Новосибирск: Наука, 1990.
2. **Добрынин А. А.** Графы с совпадающими цепными матрицами слоев // Вопросы алгоритмического анализа структурной информации: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. С. 13–33. (Вычислительные системы; Вып. 119).
3. **Добрынин А. А.** О наименьшем порядке кубических графов с совпадающей цепной матрицей слоев // Математические вопросы химической информатики: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 84–87. (Вычислительные системы; Вып. 130).
4. **Кац А. О.** Исследование системы векторов расстояний графа // Латвийский мат. ежегодник. 1976. Т. 20. С. 170–179.
5. **Скоробогатов В. А.** Относительные разбиения и слои графов // Вопросы обработки информации при проектировании систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. С. 3–10. (Вычислительные системы; Вып. 69).
6. **Скоробогатов В. А.** Алгоритмическая обработка структурной информации // Проблемы обработки информации: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 101–116. (Вычислительные системы; Вып. 100).
7. **Станкевич М. И., Станкевич И. В., Зефирова Н. С.** Топологические индексы в органической химии // Успехи химии. 1988. Т. 57. С. 337–366.
8. **Bloom G. S., Kennedy J. W., Quintas L. V.** Some problems concerning distance and path degree sequences // Graph theory. Berlin: Springer-Verl., 1983. P. 179–190. (Lecture Notes in Math.; V. 1018).
9. **Dobrynin A. A.** Regular graphs having the same path layer matrix // J. Graph Theory. 1990. V. 14, N 2. P. 141–148.
10. **Dobrynin A. A.** Cubic graphs with 62 vertices having the same path layer matrix // J. Graph Theory. 1993. V. 17, N 1. P. 1–4.
11. **Frucht R., Gewirtz A., Quintas L. V.** The least number of edges for graphs having automorphism group of order three // Recent trends in graph theory. Berlin: Springer-Verl., 1971. P. 95–104. (Lecture Notes in Math.; V. 186).
12. **Gutman I., Polansky O. E.** Mathematical concepts in organic chemistry. Berlin: Springer-Verl., 1986.
13. **Halberstam F. Y., Quintas L. V.** Distance and path degree sequences for cubic graphs. New York: Mathematical Dep., Pace Univ., 1982.
14. **Halberstam F., Žak J.** A note on planarity and distance degree sequences // Graph theory. Berlin: Springer-Verl., 1983. P. 286–289. (Lecture Notes in Math.; V. 1018).

15. **Quintas L. V., Slater P. J.** Pairs of non-isomorphic graphs having the same path degree sequences // *Commun. Math. Chem.* 1981. V. 12. P. 75–86.
16. **Randić M.** Characterizations of atoms, molecules, and classes of molecules based on path enumerations // *Commun. Math. Chem.* 1979. V. 7. P. 5–64.
17. **Randić M.** Design of molecules with desired properties // *Concepts and application of molecular similarity*. New York: John Wiley & Sons, 1990. P. 77–145.
18. **Skorobogatov V. A., Dobrynin A. A.** Metric analysis of graphs // *Commun. Math. Chem.* 1988. V. 23. P. 105–151.
19. **Slater P. J.** Counterexamples to Randić's conjecture on distance degree sequences for trees // *J. Graph Theory*. 1982. V. 6, N 1. P. 89–91.
20. **Trinajstić N.** *Chemical graph theory*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1992.

Адрес авторов:

Статья поступила

Институт математики

30 июня 2000 г.

им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4,

630090 Новосибирск, Россия.

E-mail: omeln@math.nsc.ru;

dobr@math.nsc.ru