ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 74–88

УДК 519.853.4

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ НЕВЫПУКЛОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ВЫПУКЛЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ*)

М. С. Нечаева, О. В. Хамисов

Рассматривается задача поиска минимума квадратичной функции на выпуклом ограниченном множестве, заданном квадратичными и линейными неравенствами. Для ее решения предлагается вариант метода ветвей и границ, на каждом шаге которого множество, образованное пересечением конечного числа эллипсоидов, аппроксимируется внешним и внутренним эллипсоидами. Оценки оптимального значения целевой функции находятся в результате решения задачи минимизации квадратичной функции на шаре. Доказывается сходимость метода и приводится оценка скорости сходимости.

Введение

Рассматривается следующая задача квадратичного программирования: найти

$$\min f(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

где

$$f(x) = (x - x^0)^T Q_0 (x - x^0), \tag{2}$$

$$C = \{x \in R^n \mid (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1,\ i = 1, \dots, m\}. \tag{3}$$

Здесь $Q_1, \dots, Q_m$ — неотрицательно определенные симметричные матрицы порядка n; Q_0 — произвольная симметричная матрица порядка n; $x^0, \dots, x^m$ — заданные векторы в R^n; T — символ транспонирования. В (3) могут присутствовать и линейные ограничения, представленные в квадратичном виде. Предполагается, что хотя бы одна из матриц Q_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, является положительно определенной.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00220).

Сформулированная задача имеет большое практическое значение. К ней сводятся прикладные постановки, связанные с техническим и экономическим моделированием. Их описание и соответствующие ссылки можно найти в [9, 14].

Задача (1)–(3) исследовалась многими авторами. В [6] предложен подход к ее решению на основе метода ветвей и границ. Для оценивания снизу минимума функционала автором применена теория двойственности, найдены условия, при которых двойственная нижняя оценка совпадает с искомым оптимумом. Этот подход был в дальнейшем развит в монографии [9].

Теоретические результаты, связанные с необходимыми и достаточными условиями глобального оптимума в задаче (1)–(3), приведены в статье [11]. Наиболее изучен случай с одним выпуклым квадратичным ограничением. Соответствующий полиномиальный по сложности алгоритм представлен в [15]. Получено достаточное условие глобального оптимума для задачи с двумя ограничениями [11]. В остальных случаях не известно теоретического критерия глобального оптимума.

Для задачи, подобной рассматриваемой, в [16] предложена полиномиальная по сложности процедура получения достаточно хорошей нижней оценки глобального оптимума. Процедура основана на решении вспомогательной задачи так называемого полуопределенного программирования. Доказано, что такая оценка является наилучшей среди всех известных полиномиальных по времени оценок.

Задача (1)–(3) рассматривалась в работе [14], в которой был предложен метод ветвей и границ с разбиением допустимой области на симплексы. При этом для получения нижней оценки решалась задача линейного программирования. В этой работе также приводятся результаты расчетов тестовых примеров не более чем с 8 переменными.

Обзор методов решения задач невыпуклой квадратичной оптимизации можно найти в [10]. Отметим, что бо́льшая часть этого обзора посвящена задаче минимизации невыпуклой квадратичной функции при линейных ограничениях.

Ниже предлагается вариант метода ветвей и границ решения задачи (1)–(3), в котором верхние и нижние оценки оптимального значения целевой функции определяются за полиномиальное время с помощью внешней и внутренней аппроксимаций допустимого множества эллипсоидами. В п. 1 описываются методы решения вспомогательных задач. В п. 2 приводится описание метода и обсуждается его сходимость.

1. Эллипсоидальная аппроксимация пересечения эллипсоидов

Если Q — неотрицательно определенная симметричная квадратная матрица порядка n, а x_c — некоторый n-вектор, то множество

$$E(Q, x_c) = \{x \in R^n \mid (x - x_c)^T Q(x - x_c) \leqslant 1\} \tag{4}$$

выпукло и является эллипсоидом с центром в точке x_c. Если матрица Q положительно определенная, то множество $E(Q, x_c)$ ограничено. В этом случае эллипсоид (4) называют *невырожденным*. Его объем определяется по формуле

$$V = V(Q) = (\det Q)^{-0{,}5}. \tag{5}$$

Невырожденное аффинное преобразование пространства R^n позволяет привести (4) к виду

$$E(\Lambda, x_c) = \{x \in R^n \mid (x - x_c)^T \Lambda(x - x_c) \leqslant 1\},$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — диагональная матрица порядка n с элементами, равными собственным числам матрицы Q. Длины $d_1, \ldots, d_n$ полуосей эллипсоида $E(\Lambda, x_c)$ определяются по формуле

$$d_i = \sqrt{1/\lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

В дальнейшем нам потребуется решение следующих вспомогательных задач.

1. В ограниченное множество, образованное пересечением конечного числа эллипсоидов, требуется вписать невырожденный эллипсоид по возможности большего объема.

2. Погрузить ограниченное множество, образованное пересечением конечного числа эллипсоидов, в невырожденный эллипсоид возможно меньшего объема.

Пусть множество C является пересечением эллипсоидов

$$E_i = \{x \in R^n \mid (x - x^i)^T Q_i(x - x^i) \leqslant 1\}, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{7}$$

и множество $C' = \{x \in C \mid c^T x \leqslant r\}$ ограничено. Тогда линейное неравенство $c^T x \leqslant r$ может быть представлено как квадратичное. Действительно, вычислим $l = \min\{c^T x \mid x \in C\}$ и определим полосу $P = \{x \in R^n \mid l \leqslant c^T x \leqslant r\}$. Очевидно, что $C' = C \cap P$. Пусть $t = (l + r)/2$ и $d = (r - l)/2$. Тогда справедливо представление полосы P в виде вырожденного эллипсоида:

$$P = \{x \mid (c^T x - t)^2 \leqslant d^2\} = \{x \mid (x - x_0)^T cc^T(x - x_0) \leqslant d^2\},$$

где x_0 — вектор, удовлетворяющий условию $c^T x_0 = t$. Поэтому будем полагать, что в (7) могут присутствовать и линейные неравенства, уже представленные как квадратичные.

Эллипсоид, вписанный в пересечение эллипсоидов. Задача внутренней аппроксимации многогранного множества эллипсоидом максимального объема исследовалась, например, в [7, 13]. Рассмотрим эту задачу для множества, образованного выпуклыми квадратичными ограничениями.

Нетрудно видеть, что множество

$$\widetilde{E} = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{p} (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1 \right\} \tag{8}$$

содержится в C. Действительно, если $x \in \widetilde{E}$, то в силу неотрицательной определенности матриц $Q_1, \ldots, Q_p$ при любом $i \in \{1, \ldots, p\}$ имеем $(x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1$. Следовательно, $x \in C$.

Если хотя бы один из эллипсоидов в (7) (пусть это будет E_1) невырожден, то при помощи невырожденного аффинного преобразования координат набор эллипсоидов (7) может быть приведен к виду

$$E_1 = \{x \in R^n \mid x^T I x \leqslant 1\}, \quad E_2 = \{x \in R^n \mid (x + a)^T \Lambda (x + a) \leqslant 1\},$$
$$E_i = \{x \in R^n \mid (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1\}, \quad i = 3, \ldots, p,$$

где I — единичная матрица, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, а вектор a состоит только из неотрицательных компонент. В преобразованном пространстве эллипсоид (8) принимает вид

$$\widetilde{E} = \left\{ x \in R^n \mid x^T I x + (x + a)^T \Lambda (x + a) + \sum_{i=3}^{p} (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1 \right\}.$$

Предположим, что $\lambda_i < 1$ при $i = 1, \ldots, k$ и $\lambda_i \geqslant 1$ при $i = k+1, \ldots, n$. Нетрудно убедиться в том, что эллипсоид

$$\widehat{E} = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i + a_i)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=3}^{p} (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1 \right\} \tag{9}$$

также содержится в C. Матрицы квадратичных форм, задающих $\widehat{E}$ и $\widetilde{E}$, обозначим через $\widehat{Q}$ и $\widetilde{Q}$ соответственно. Они отличаются только следом: $n - k$ диагональных элементов матрицы $\widehat{Q}$ на единицу меньше соответствующих элементов матрицы $\widetilde{Q}$, а это означает [2], что $\det\widehat{Q} < \det\widetilde{Q}$.

Из формулы (5) следует, что $V(\widehat{Q}) > V(\widetilde{Q})$, т. е. объем эллипсоида $\widehat{E}$ строго больше объема эллипсоида $\widetilde{E}$.

Предположим, что среди диагональных элементов матрицы Λ имеется q_0 нулевых компонент: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{q_0} = 0$, а q_1 — число ее ненулевых элементов. Обозначим через s число вычитаемых квадратов переменных в (9). В данном случае $s = n - k$. Можно ожидать, что $s \geqslant q_1/2$. Если окажется, что менее $q_1/2$ элементов матрицы Λ не меньше единицы, то выполним преобразование координат, которое переводит единичную матрицу I порядка n в диагональную матрицу с компонентами 1 в первых q_0 позициях и $1/\lambda_i$ в остальных, а матрицу Λ — в диагональную матрицу с компонентами 0 в первых q_0 позициях и 1 в остальных. Теперь первая матрица в этой паре содержит q_0 единиц и $k - q_0$ элементов, не меньших 1, а по предположению это больше $q_1/2$. Рассмотрим эллипсоид $\widehat{E}$, вписанный в C:

$$\widehat{E} = \Bigg\{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{q_0} x_i^2 + \sum_{i=q_0+1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^2 + \sum_{i=q_0+1}^{n} (x_i + a_i)^2 \\ - \sum_{i=q_0+1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=3}^{p} (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1\Bigg\}.$$

Здесь $s = k - q_0$ и справедливо $s \geqslant q_1/2$. Это неравенство важно, поскольку является косвенной оценкой снизу для объема вписанного эллипсоида.

Изложенные конструкции лежат в основе следующего алгоритма A1, в котором сначала находится эллипсоид L_2, содержащийся в пересечении E_1 и E_2, затем — эллипсоид L_3, содержащийся в пересечении L_2 и E_3, и т. д.

Алгоритм A1.

Пусть заданы неотрицательно определенные матрицы $Q_1, \ldots, Q_p$. Если среди них имеются положительно определенные матрицы, то пусть Q_1 является таковой. Требуется построить эллипсоид $\widehat{E}$, вписанный в пересечение множеств

$$E_i = \{x \in R^n \mid (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1\}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Шаг 1. Если матрица Q_1 является положительно определенной, то полагается $A = Q_1$, $x_c = x^1$ и $j = 2$. В противном случае в качестве решения следует взять

$$\widehat{E} = \left\{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{p} (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1\right\}$$

и завершить работу.

Шаг 2. Привести пары (A, x_c) и (Q_j, x^j) к виду $(I, 0)$ и $(\Lambda, -a)$, где I — единичная матрица, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ и компоненты вектора a неотрицательны. Сформировать набор $\{i_1, \dots, i_k\}$ такой, что $\lambda_{i_l} < 1$, $l = 1, \dots, k$.

Шаг 3. Если $n - k \geqslant q_1/2$, где q_1 — число ненулевых компонент в Λ, то через I_j обозначается диагональная матрица порядка n, в которой элементы с номерами $i_1, \dots, i_k$ равны единице, а остальные — нулю.

Если $n - k < q_1/2$, то привести матрицы I и Λ к виду $M = \mathrm{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ и $\Delta = \mathrm{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, где $\mu_i = 1$ и $\delta_i = 0$, если $\lambda_i = 0$; $\mu_i = 1/\lambda_i$ и $\delta_i = 1$, если $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Сформировать набор $\{i_1, \dots, i_k\}$ такой, что $\mu_{i_l} \geqslant 1$, $\lambda_{i_l} \neq 0$, $l = 1, \dots, k$. Построить диагональную матрицу I_j порядка n, в которой все элементы равны соответствующим элементам из M, но каждый элемент с номером i_l равен $\mu_{i_l} - 1$, $l = 1, \dots, k$.

Шаг 4. Построить эллипсоид

$$L_j = \{x \in R^n \mid (x - x_c)^T P^T I_j P(x - x_c) + (x - x^j)^T Q_j (x - x^j) \leqslant 1\},$$

где P — итоговая матрица преобразований, и привести его к виду

$$L_j = \{x \in R^n \mid (x - x_c')^T A'(x - x_c') \leqslant 1\}.$$

Положить $A = A'$ и $x_c = x_c'$.

Шаг 5. Если $j < p$, то положить $j = j + 1$ и вернуться к шагу 2. Если $j = p$, то в качестве решения взять $\widehat{E} = L_p$ и завершить работу.

Конец

Эллипсоид, описанный вокруг пересечения эллипсоидов. Предлагаемые в литературе методы решения второй вспомогательной задачи с произвольной точностью оказываются слишком трудоемкими. Поэтому приходится ограничиться построением квазиоптимального решения [1, 3, 4].

Нетрудно видеть, что линейная комбинация множеств (7)

$$\widetilde{M} = \left\{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (x - x_i)^T Q_i (x - x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \right\} \qquad (10)$$

с любыми неотрицательными коэффициентами α_i содержит аппроксимируемое множество C. Обычно полагают $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$. Наилучшим выбором для α_i является такой, при котором объем смеси (10) наименьший. Вследствие строгой квазивыпуклости объема эллипсоида $\widetilde{M}$ относительно коэффициентов α_i последняя задача является задачей выпуклого программирования.

Добавление в сумму (10) любого множества, содержащего C, оставляет ее внешней аппроксимацией этого множества и позволяет улучшить

решение (в смысле минимизации объема), поскольку увеличивает число переменных, по которым осуществляется оптимизация.

Эта задача для случая $p = 2$ исследована в работе [1], в которой предложено находить искомое множество в виде линейной комбинации рассматриваемых эллипсоидов и полосы, содержащей аппроксимируемое множество. Коэффициенты оптимальной в смысле объема смеси двух эллипсоидов определяются методом дихотомии, оптимальная линейная комбинация эллипсоида и некоторой полосы вычисляется точно.

Среди множеств, образованных пересечением двух эллипсоидов, особое место занимает полуэллипсоид — пересечение эллипсоида с центром в начале координат и полупространства. Решение такой задачи приведено в [1, 8]. Этот частный случай можно использовать для внешней аппроксимации любого множества, если известно, что оно содержится в некотором полуэллипсоиде. Для этого применяется следующая простая процедура.

Алгоритм А2.

Пусть заданы неотрицательно определенные матрицы $Q_1, \dots, Q_p$. Требуется описать эллипсоид вокруг пересечения множеств

$$E_i = \{x \in R^n \mid (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1\}, \quad i = 1, \dots, p,$$

если известно, что это пересечение содержится в полуэллипсоиде

$$\{x \in R^n \mid (x - x_c)^T A (x - x_c) \leqslant 1,\ c^T (x - x_c) \leqslant 0\},$$

где A — положительно определенная матрица порядка n и c — некоторый n-вектор.

Шаг 1. Положить $t = c^T x_c - 1/2\sqrt{c^T A^{-1} c}$, $d = 1/2\sqrt{c^T A^{-1} c}$, $u = \frac{n-1}{n+1}$, $v = \frac{2}{n+1}$.

Шаг 2. В качестве решения взять множество

$$E = \{x \in R^n \mid u x^T A x + v(c^T x - t)^2 \leqslant u + v d^2\}.$$

Конец

При решении задачи в общем случае для пересечения произвольного конечного числа эллипсоидов можно воспользоваться техникой, изложенной в [1], применяя ее последовательно: на первом шаге к первым двум эллипсоидам из (7), на каждом следующем — к результату предыдущего шага и очередному эллипсоиду из набора (7). С каждым шагом уменьшается объем аппроксимирующего множества. Результирующий эллипсоид обозначим через $\widehat{M}$. Необходимым условием к применению данной техники является невырожденность хотя бы одного эллипсоида из (7). Опишем соответствующий алгоритм.

Алгоритм А3.

Пусть заданы положительно определенная матрица Q_1 и неотрицательно определенные матрицы $Q_2, \dots, Q_p$. Требуется описать эллипсоид вокруг пересечения множеств

$$E_i = \{x \in R^n \mid (x - x^i)^T Q_i (x - x^i) \leqslant 1\}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Шаг 0. Задать требуемую точность $\varepsilon > 0$. Положить $A = Q_1$ и $x_c = x^1$. Для $j = 2, \dots, p$ повторить шаги 1–6.

Шаг 1. Выполнить преобразование, переводящее x_c в начало координат. Положить $B = Q_j$ и $a = x^j$. Вычислить $h = (a^T Ba)^{1/2}$, $c = -Ba/h$, $l_x^+ = 1-h$, $l_x^- = \max\{-(1+h),\ -(c^T A^{-1}c)^{1/2}\}$, $t_x = (l_x^+ + l_x^-)/2$, $d_x = (l_x^+ - l_x^-)/2$. Положить $u^- = 0$, $u^+ = 1$.

Для $i = 1, 2$ выполнить шаги 2–5.

Шаг 2. Положить $u = (u^+ + u^-)/2 + (2i - 3)\varepsilon/2$, $v = 1 - u$, $D = uA + vB$. Вычислить $x^0(u) = -hvD^{-1}c$, $N_c = (c^T D^{-1}c)^{1/2}$, $R(u) = 1 - va^T Ba + v^2(Ba)^T D^{-1}(Ba)$, $V^2(u) = (R(u))^n \det(D^{-1})$.

Шаг 3. Выполнить замену переменных, для чего положить $c_z = c/N_c$, $l_z^- = (l_x^-/N_c - c_z^T x^0(u))/\sqrt{R(u)}$, $l_z^+ = (l_x^+/N_c - c_z^T x^0(u))/\sqrt{R(u)}$, $t_z = (l_z^+ + l_z^-)/2$, $d_z = (l_z^+ - l_z^-)/2$.

Если $l_z^- l_z^+ < -1/n$, то взять $w = 1$. В противном случае найти w как неотрицательный корень уравнения

$$(n+1)t_z^2 w^2 + (1 - t_z^2 - d_z^2)w - (n-1)d_z^2 = 0.$$

Шаг 4. Квадрат сокращения объема от включения в смесь полосы имеет вид

$$V_z^2 = (w + (1-w)(d_z^2 - t_z^2) + (1-w)^2 t_z^2)^n / w^{n-1}.$$

Вычислить $V_i^2 = V^2(u)V_z^2$.

Шаг 5. Положить $u^+ = u_2$, если $V_1^2 < V_2^2$, и $u^- = u_1$, если $V_1^2 \geqslant V_2^2$. Если $u^+ - u^- > \varepsilon$, то повторить шаги 2–5 для $i = 1, 2$.

Шаг 6. Положить $u = u_1 w$, $v = v_1 w$, $w = 1 - w$. Построить эллипсоид

$$L_j = \{x \in R^n \mid ux^T Ax + v(x-a)^T B(x-a) + w(c_x^T x - t_x)^2 \leqslant u + v + wd_x^2\}$$

и привести его к виду

$$L_j = \{x \in R^n \mid (x - x_c')^T A'(x - x_c') \leqslant 1\}.$$

Положить $A = A'$ и $x_c = x_c'$.

Шаг 7. В качестве решения взять эллипсоид $M = L_p$.

Конец

2. Решение задачи квадратичного программирования

Для решения задачи (1)–(3) воспользуемся методом ветвей и границ [12]. Допустимая область C разбивается на два множества C^1 и C^2. Вычисляются нижняя $\beta(C^j)$ и верхняя $\alpha(C^j)$ оценки минимума функции $f(x)$ на этих множествах, т. е.

$$\beta(C^j) \leqslant \min\{f(x) \mid x \in C^j\} \leqslant \alpha(C^j), \quad j = 1, 2.$$

Вычисляются $\beta = \min\{\beta(C^1), \beta(C^2)\}$ и $\alpha = \min\{\alpha(C^1), \alpha(C^2)\}$ такие, что

$$\beta \leqslant \min\{f(x) \mid x \in C\} \leqslant \alpha.$$

Если разность $\alpha - \beta$ является достаточно малой величиной, то работа алгоритма завершается. В противном случае выбирается множество C^j, для которого $\beta(C^j) = \beta$, производится его разбиение и т. д. Некоторые множества удаляются из дальнейшего рассмотрения как заведомо не содержащие оптимального решения.

Процедура деления. Пусть D — подмножество в C и M — эллипсоид, содержащий D. Разбиение множества D будем строить путем деления его внешней аппроксимации эллипсоида M. После приведения к главным осям эллипсоид M принимает вид

$$M = \{x \in R^n \mid (x - x_c)^T \Lambda (x - x_c) \leqslant 1\},$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Пусть $\lambda_{i_0} = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Зададим вектор $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ с компонентами $c_{i_0} = 1$ и $c_i = 0$ в остальных случаях. Введем множества

$$M^1 = \{x \in M \mid c^T(x - x_c) \leqslant 0\}, \quad M^2 = \{x \in M \mid c^T(x - x_c) \geqslant 0\}.$$

Таким образом, эллипсоид M делится пополам гиперплоскостью, проходящей через его центр ортогонально наибольшей оси. Множество D разбивается на подмножества $D^1 = D \cap M^1$ и $D^2 = D \bigcap M^2$.

Как показано выше, внешний эллипсоид M можно построить двумя способами: алгоритмом А2 или алгоритмом А3. Эти способы назовем *базовым* и *ускоренным* соответственно.

Оценивание. Пусть эллипсоиды M и E являются внешней и внутренней аппроксимациями множества $D \subseteq C$, т. е. $E \subseteq D \subseteq M$. Тогда величины $\min\{f(x) \mid x \in M\}$ и $\min\{f(x) \mid x \in E\}$ являются нижней и верхней оценками минимума функции $f(x)$ на множестве D. Их нахождение сводится к задаче минимизации квадратичной функции на шаре: найти

$$\min\left\{\frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \mid x^T x \leqslant r^2\right\}, \tag{11}$$

которая решается следующим алгоритмом, предложенным в [15].

Алгоритм А4.

Шаг 1. Задать достаточно малое $\varepsilon > 0$. Положить $\mu_1 = 0$ и $\mu_3 = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |q_{ij}| + (c^T c)/r$, где q_{ij} — элементы матрицы Q.

Шаг 2. Положить $\mu_2 = (\mu_1 + \mu_3)/2$.

Шаг 3. Среди решений уравнения $(Q + \mu_2 I)x = -c$ найти вектор x с наименьшей нормой.

Шаг 4. Если $\mu_3 - \mu_1 < \varepsilon$, то взять x в качестве решения задачи (11) и завершить работу.

Пусть $\mu_3 - \mu_1 \geqslant \varepsilon$. Если матрица $Q + \mu_2 I$ не является неотрицательно определенной или уравнение $(Q + \mu_2 I)x = -c$ не имеет решений, или $x^T x > r^2$, то положить $\mu_1 = \mu_2$. В противном случае положить $\mu_3 = \mu_2$. Вернуться к шагу 2.

Конец

Скорость сходимости метода ветвей и границ тем выше, чем точнее внутренняя и внешняя аппроксимации множества D. С этой точки зрения есть основания использовать для внешней аппроксимации ускоренный вариант, т. е. алгоритм А3. В качестве внутреннего аппроксимирующего эллипсоида возьмем результат работы алгоритма А1.

Обоснование сходимости. Пусть $\delta(M)$ обозначает диаметр множества M. Диаметр эллипсоида равен длине его наибольшей оси. Длины полуосей вычисляются по формуле (6).

Обозначим через D_q подмножество C, соответствующее вершине дерева ветвлений, которая находится на расстоянии q от корневой вершины (в этих обозначениях $C = D_0$). Пусть M_q — внешний эллипсоид множества D_q, построенный базовым методом (алгоритмом А2). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *При любом $q \geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$\delta(M_{q+n}) < \delta(M_q). \tag{12}$$

Если $q \to \infty$, то

$$\delta(M_q) \to 0. \tag{13}$$

Доказательство. Справедливость (12) достаточно проверить для $q = 0$. Аффинным преобразованием координат эллипсоид M_0 приводится к виду $M_0 = \{x \mid x^T x \leqslant 1\}$. Очевидно, что это шар с диаметром $\delta(M_0) = 2$. Все полуоси шара имеют одинаковую длину, поэтому секущая плоскость задается нормалью $c^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Множество M_1 является эллипсоидом, описанным вокруг полушара $\{x \mid x^T x \leqslant 1,\ c^T x \geqslant 0\}$. Согласно [1] эллипсоид M_1 может быть представлен в виде

$$M_1 = \{x \mid (x - x_c^{(1)})^T \Lambda (x - x_c^{(1)}) \leqslant 1\},$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{u + 1/4(1-u)^2}(uI + (1-u)cc^T)$$

и $u = \frac{n-1}{n+1}$. В результате получаем

$$\Lambda = \operatorname{diag}\Big\{\frac{(n+1)^2}{n^2}, \frac{n^2-1}{n^2}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2}\Big\}.$$

Следовательно, длины полуосей эллипсоида M_1 таковы: $d_1 = \frac{n}{n+1}$, $d_i = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$, $i = 2, \dots, n$. Максимальную длину имеют все полуоси, кроме первой, так что секущую плоскость можно задать нормалью $c^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0)$.

Выполним замену переменных $y = \Lambda^{1/2}(x - x_c^{(1)})$, приводящую эллипсоид M_1 к виду

$$M_1^y = \{y \mid y^T y \leqslant 1\}.$$

Следующее множество последовательности есть

$$M_2^y = \{y \mid (y - y_c)^T \Lambda_y (y - y_c) \leqslant 1\}$$

при $\Lambda_y = \operatorname{diag}\{\frac{n^2-1}{n^2}, \frac{(n+1)^2}{n^2}, \frac{n^2-1}{n^2}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2}\}$. Возвращаясь к переменным x, получаем

$$M_2 = \{x \mid (x - x_c^{(2)})^T \Lambda^{(2)} (x - x_c^{(2)}) \leqslant 1\},$$

где

$$\Lambda^{(2)} = \operatorname{diag}\Big\{\frac{n^2-1}{n^2}\frac{(n+1)^2}{n^2}, \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n^2-1}{n^2}, \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^2, \dots, \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^2\Big\}.$$

Полуоси этого эллипсоида имеют длины $d_1 = d_2 = \sqrt{\frac{n^4}{(n^2-1)(n+1)^2}}$, $d_i = \frac{n^2}{n^2-1}$, $i = 3, \dots, n$. Поскольку третья полуось имеет максимальную длину, определим нормаль секущей плоскости как $c^{(3)} = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$.

Действуя таким образом, после n-го шага имеем эллипсоид

$$M_n = \{x \mid (x - x_c^{(n)})^T \Lambda^{(n)} (x - x_c^{(n)}) \leqslant 1\},$$

где $\Lambda^{(n)} = \operatorname{diag}\{(\frac{n^2-1}{n^2})^{n-1}\frac{(n+1)^2}{n^2}, \dots, (\frac{n^2-1}{n^2})^{n-1}\frac{(n+1)^2}{n^2}\}$, с равными полуосями

$$d_i = \frac{n}{n+1}\Big(\frac{n^2}{n^2-1}\Big)^{\frac{n-1}{2}} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, M_n вновь является шаром и

$$\delta(M_n) = 2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{2}} < 2,$$

что доказывает (12). Утверждение (13) непосредственно следует из (12).

Лемма 2. *Если $q \to \infty$, то $\alpha(D_q) - \beta(D_q) \to 0$.*

Доказательство. Величины $\alpha(D_q)$ и $\beta(D_q)$ определяются как минимальные значения квадратичной функции $f(x)$ на эллипсоидах, аппроксимирующих D_q соответственно изнутри и извне. Поскольку внутренний аппроксимирующий эллипсоид E_q заключен во внешний эллипсоид M_q, расстояние между любыми двумя точками из E_q и M_q не превосходит диаметра внешнего множества. Согласно лемме 1 диаметр M_q стремится к нулю с ростом q. Следовательно, расстояние между точками из E_q и M_q, в которых функция $f(x)$ минимальна, также стремится к нулю. Из этого факта и непрерывности функции $f(x)$ следует утверждение леммы.

Напомним, что очередному разбиению подвергается то множество, на котором достигается минимальное значение из $\beta(D^1)$, $\beta(D^2)$. В силу этого факта, а также леммы 2 и утверждений, приведенных в [12], последовательность точек, формируемая базовым методом ветвей и границ, сходится к точке глобального оптимума в задаче (1)–(3).

Оценка скорости сходимости. С ростом дерева ветвлений диаметр внешнего аппроксимирующего множества стремится к нулю. Поэтому на некотором шаге его объем $V_{\hat q}$ становится меньше заранее заданной малой величины ε, т. е. выполняется неравенство

$$V_{\hat q} \leqslant \varepsilon, \tag{14}$$

что может рассматриваться как сигнал к получению достаточно точного решения и прекращению работы алгоритма.

В методе, который мы назвали базовым, при каждом q следующее внешнее аппроксимирующее множество M_{q+1} для элемента разбиения D_{q+1} есть эллипсоид минимального объема, описанный вокруг полуэллипсоида, образованного из M_q. Согласно [8] сокращение τ_n объема внешнего множества при каждом ветвлении зависит только от размерности пространства и определяется по формуле $\tau_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. Следовательно, $V_{\hat q} = \tau_n^{\hat q} V_0$. Если считать объем исходного эллипсоида равным единице, то неравенство (14) выполняется при

$$\hat q = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \tau_n}.$$

Например, для размерности пространства 5 эта оценка составляет от 114 до 184 при заданной точности от 10^{-5} до 10^{-8}.

Алгоритм. Теперь опишем обе версии алгоритма решения задачи (1)–(3).

Алгоритм А5.

Шаг 0.1. Задать требуемую точность ε. Применить алгоритм А1 к C и получить вписанный в C эллипсоид E.

Шаг 0.2. С помощью алгоритма А4 найти верхнюю оценку

$$\alpha(C) = \min\{f(x) \mid x \in E\}.$$

Шаг 0.3. Применить алгоритм А3 к C и получить внешний к C эллипсоид M.

Шаг 0.4. С помощью алгоритма А4 найти нижнюю оценку

$$\beta(C) = \min\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Шаг 0.5. Положить $\mathscr{D}_0 = \{C\}$, $\alpha_0 = \alpha(C)$, $\beta_0 = \beta(C)$. Найти x^0 из уравнения $f(x^0) = \alpha_0$. Если $\alpha_0 - \beta_0 < \varepsilon$, то завершить работу. В качестве решения взять x^0, оптимальное значение целевой функции в задаче равно α_0. В противном случае перейти к итерации 1.

Перед началом k-й итерации ($k = 1, 2, \dots$) имеется набор $\mathscr{D}_{k-1}$ перспективных элементов разбиения D. Для каждого $D \in \mathscr{D}_{k-1}$ известны $\alpha(D)$ и $\beta(D)$ такие, что

$$\beta(D) \leqslant \min\{f(x) \mid x \in D\} \leqslant \alpha(D),$$

а также вписанный $E(D)$ и описанный $M(D)$ эллипсоиды. Имеются текущие оценки α_{k-1} и β_{k-1} такие, что

$$\beta_{k-1} \leqslant \min\{f(x) \mid x \in C\} \leqslant \alpha_{k-1},$$

и рекордная точка x^{k-1}, в которой $f(x^{k-1}) = \alpha_{k-1}$.

На k-й итерации выполнить шаги 1–9.

Шаг 1. Удалить из $\mathscr{D}_{k-1}$ такие элементы D, что $\beta(D) \geqslant \alpha_{k-1}$.

Шаг 2. Выбрать такое $D_k \in \mathscr{D}_{k-1}$, что $\beta(D_k) = \min\{\beta(D) \mid D \in \mathscr{D}_{k-1}\}$.

Шаг 3. Определить спектральное разложение $P^T \Lambda P$ матрицы, задающей $M(D_k)$, где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ и P — ортонормированная матрица. Положить $\lambda_{i_0} = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $c = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, где компонента с номером i_0 равна 1. Переобозначить $c := P^T c$. Положить $c^1 = c$, $c^2 = -c$. Выполнить разбиение D_k на множества

$$D_k^1 = \{x \in D_k \mid c^T(x - x_c) \leqslant 0\}, \quad D_k^2 = \{x \in D_k \mid c^T(x - x_c) \geqslant 0\},$$

где x_c — центр $M(D_k)$.

На всех следующих шагах $j = 1, 2$.

Шаг 4. Представить линейные ограничения в описании D_k^j как квадратичные.

Шаг 5. Применить алгоритм А1 к D_k^j и получить вписанные эллипсоиды $E(D_k^j)$.

Шаг 6. С помощью алгоритма А4 найти верхние оценки

$$\alpha(D_k^j) = \min\{f(x) \mid x \in E(D_k^j)\}.$$

Шаг 7. *Для базового метода.* Применить алгоритм А2 к полуэллипсоидам

$$\{x \in M(D_k) \mid (c^j)^T(x - x_c) \leqslant 0\}$$

и получить внешние эллипсоиды $M(D_k^j)$.

Для ускоренного метода. Если в описании D_k^j нет квадратичного ограничения с положительно определенной матрицей, то в описание добавить неравенство, задающее $M(D_k)$. Применить алгоритм А3 к D_k^j и получить внешние эллипсоиды $M(D_k^j)$.

Шаг 8. С помощью алгоритма А4 найти нижние оценки

$$\beta(D_k^j) = \min\{f(x) \mid x \in M(D_k^j)\}.$$

Шаг 9. Найти номер $\bar{j} \in \{1, 2\}$ из условия $\beta(D_k^{\bar{j}}) = \min\{\beta(D_k^1), \beta(D_k^2)\}$. Положить $\mathscr{D}_k = \mathscr{D}_{k-1} \cup \{D_k^{\bar{j}}\}$.

Шаг 10. Положить $\alpha_k = \min\{\alpha(D) \mid D \in \mathscr{D}_k\}$ и $\beta_k = \min\{\beta(D) \mid D \in \mathscr{D}_k\}$. Найти точку $x^k \in C$ из уравнения $f(x^k) = \alpha_k$.

Шаг 11. Если $\alpha_k - \beta_k < \varepsilon$, то завершить работу. В качестве решения взять x^k, оптимальное значение целевой функции в задаче равно α_k. В противном случае перейти к итерации $k + 1$.

Конец

ЛИТЕРАТУРА

1. **Анциферов Е. Г.** К методу эллипсоидов в выпуклом программировании // Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: Сиб. энергетический ин-т СО АН СССР, 1987.
2. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
3. **Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н.** Аппроксимация пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 4. С. 32–40.
4. **Покотило В. Г.** К проблеме аппроксимации пересечения эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 3. С. 57–64.
5. **Черноусько Ф. Л.** Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. Ч. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 71–82.

6. **Шор Н. З.** Об одном подходе к получению глобальных экстремумов в полиномиальных задачах математического программирования // Кибернетика. 1987. № 5. С. 102–106.
7. **Шор Н. З., Березовский О. А.** Использование алгоритма субградиентного типа с растяжением пространства для построения эллипсоида максимального объема, вписанного в многогранник // Кибернетика. 1989. № 6. С. 119–120.
8. **Шор Н. З., Гершович В. И.** Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. 1979. № 4. С. 93–97.
9. **Шор Н. З., Стеценко С. И.** Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. думка, 1989.
10. **Floudas C. A., Visweswaran V.** Quadratic optimization // Handbook of global optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 217–270.
11. **Hiriart-Urruty J.-B.** Conditions for global optimality 2 // J. Global Optim. 1998. V. 13, N 4. P. 349–367.
12. **Horst R., Tuy H.** Global optimization. Deterministic approaches. Berlin: Springer-Verl., 1993.
13. **Khachiyan L., Todd M.** On the complexity of approximating the maximal inscribed ellipsoid for a polytope // Math. Programming. 1993. V. 61, N 2–3. P. 137–159.
14. **Raber U.** A simplicial branch-and-bound method for solving nonconvex all-quadratic programs // J. Global Optim. 1998. V. 13, N 4. P. 417–432.
15. **Ye Y.** On affine scaling algorithms for nonconvex quadratic programming // Math. Programming. 1992. V. 56, N 3. P. 285–300.
16. **Ye Y.** Approximating global quadratic optimization with convex quadratic constrants // J. Global Optim. 1999. V. 15, N 1. P. 1–17.

Адрес автора:

Институт систем энергетики
им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130,
664033 Иркутск, Россия.
E-mail:
nechaeva@isem.sei.irk.ru
khamisov@isem.sei.irk.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.