ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2000. Серия 2. Том 7, № 2, 89–113

УДК 519.854

ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ КЛАСС ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

А. В. Плясунов

Рассматривается задача двухуровневого программирования, ограничения которой содержат нелинейные слагаемые специального вида. Показано, что исходная задача сводится к серии задач линейного программирования и, следовательно, решается с полиномиальной сложностью.

Среди задач двухуровневого программирования наиболее изучены линейные. В 1985 г. было показано, что задача двухуровневого линейного программирования относится к классу NP-трудных задач [4]. Позже установлено, что она является NP-трудной в сильном смысле [3]. Более того, NP-трудной оказалась задача отыскания локального экстремума [6]. Наконец, было доказано, что задача отыскания допустимого решения относится к классу NP-трудных в сильном смысле задач [1].

Один из первых полиномиально разрешимых классов задач двухуровневого линейного программирования рассматривался в [1]. В этой работе было показано, что если внутренняя задача является задачей о ранце с непрерывными переменными, то оптимальное решение задачи двухуровневого линейного программирования может быть найдено с полиномиальной сложностью.

В настоящей статье рассматриваются задачи двухуровневого программирования, в которых ограничения содержат нелинейные слагаемые специального вида. Показано, что если внутренняя задача является задачей о ранце с билинейной целевой функцией относительно всех переменных, то оптимальное решение задачи двухуровневого программирования может быть найдено с полиномиальной сложностью.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00510).

1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим следующую задачу двухуровневого нелинейного программирования (ДНП): найти

$$\min_{x,y}(cx + dy), \tag{1}$$

при условии, что

$$Cx + D(z)y \geqslant b, \tag{2}$$

$$x, y \geqslant 0, \tag{3}$$

где z — оптимальное решение нелинейной задачи о ранце (НЗР(y)): найти

$$\max_z yQ(z), \tag{4}$$

$$yz \leqslant w, \tag{5}$$

$$z \geqslant 0. \tag{6}$$

Будем предполагать, что векторы y и z имеют одинаковую размерность, $y = (y_i)$, $z = (z_i)$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $Q(z)$ — m-значная вектор-функция с компонентами $(Q_1(z_1), \dots, Q_m(z_m))$, величина w принимает неотрицательные значения и функциональная матрица $D(z)$ следующим образом выражается через вектор-функцию $Q(z)$:

$$D(z) = (d^1_{si} + d^2_{si}Q_i(z_i)).$$

Функции $Q_i(z_i)$ являются вогнутыми кусочно-линейными, определенными для всех $z_i \geqslant 0$ и $Q_i(0) = 0$.

Определение 1. Вектор (x, y, z) называется *допустимым решением* задачи ДНП, если (x, y, z) удовлетворяет условиям (2), (3) и z — оптимальное решение задачи НЗР(y).

Пусть внутренняя задача НЗР(y) имеет несколько оптимальных решений. Тогда наряду с понятием допустимого решения используется понятие гарантированного решения.

Определение 2. Допустимое решение (x, y, z) называется *гарантированным,* если для любого оптимального решения $\overline{z}$ задачи НЗР(y) вектор $(x, y, \overline{z})$ удовлетворяет условиям (2).

Определение 3. Допустимое решение (x^*, y^*, z^*) называется *оптимальным,* если для любого допустимого решения (x, y, z) справедливо неравенство $cx^* + dy^* \leqslant cx + dy$.

Определение 4. Гарантированное решение (x^*, y^*, z^*) называется *наилучшим,* если для любого гарантированного решения (x, y, z) справедливо неравенство $cx^* + dy^* \leqslant cx + dy$.

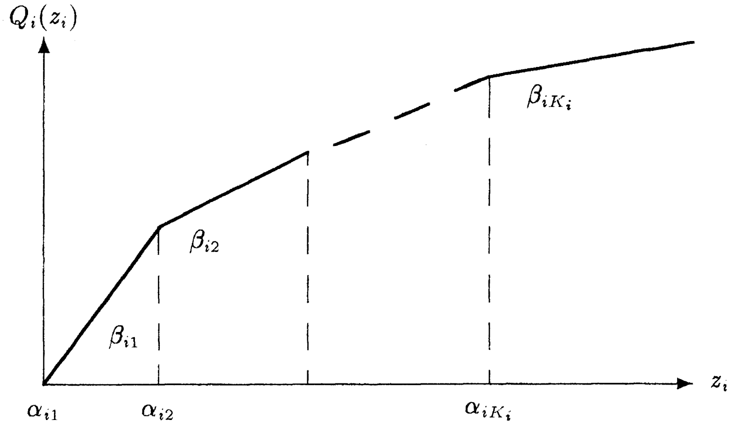

Рис. 1. График функции $Q_i(z_i)$, $i \in \mathscr{I}_1$

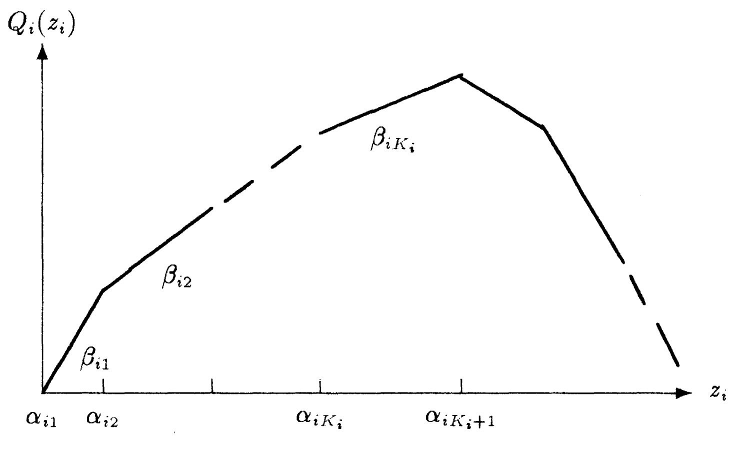

Рис. 2. График функции $Q_i(z_i)$, $i \in \mathscr{I}_2$

Определение 5. Задача ДНП называется *невырожденной,* если любое допустимое решение (x, y, z) является гарантированным.

В зависимости от контекста под решением задачи (1)–(6) будем понимать либо оптимальное решение в смысле определения 3, либо наилучшее гарантированное решение в смысле определения 4. Подробное обсуждение введенных понятий содержится в [1].

Предположим, что график каждой функции Q_i состоит из конечного числа линейных сегментов с ненулевыми угловыми коэффициентами. Пусть $K_i \geqslant 1$ — число линейных сегментов с положительными угловыми коэффициентами. Обозначим через α_{ik} и β_{ik} узлы и угловые коэффициенты функции $Q_i, i \in I$. Множество I разобьем на два непересекающихся подмножества $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$. Номер i принадлежит множеству $\mathscr{I}_1$,

если график функции Q_i состоит только из линейных сегментов с положительными угловыми коэффициентами (рис. 1). Если график функции Q_i содержит линейные сегменты с отрицательными угловыми коэффициентами, то $i \in \mathscr{I}_2$ (рис. 2). В первом случае функция Q_i имеет K_i узлов α_{ik}. Для $i \in \mathscr{I}_2$ ограничимся рассмотрением узлов α_{ik}, $1 \leqslant k \leqslant K_i + 1$, соответствующих линейным сегментам с положительными угловыми коэффициентами.

Обозначим через α^i вектор с компонентами α_{ik}. Для $i \in \mathscr{I}_1$ введем дополнительный узел $\alpha_{iK_i+1} = +\infty$. Для каждого $i \in I$ положим $\beta_{iK_i+1} = 0$. Будем считать, что $0 = \alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \ldots < \alpha_{iK_i+1}$. Предположим также, что исходные данные задачи являются рациональными величинами.

Пусть α — вектор с компонентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{K+1}$ такими, что $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{K+1} \leqslant +\infty$. Положим $\mathscr{S}_k(\alpha) = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $1 \leqslant k \leqslant K-1$. Если $\alpha_{K+1} < +\infty$, то $\mathscr{S}_K(\alpha) = [\alpha_K, \alpha_{K+1}]$. Для $\alpha_{K+1} = +\infty$ положим $\mathscr{S}_K(\alpha) = [\alpha_K, \alpha_{K+1})$. Аналогично, пусть $\mathscr{S}(\alpha) = [\alpha_1, \alpha_{K+1}]$, если $\alpha_{K+1} < +\infty$, и $\mathscr{S}(\alpha) = [\alpha_1, \alpha_{K+1})$, если $\alpha_{K+1} = +\infty$. Обозначим через $\mathscr{P}$ множество неубывающих, вогнутых кусочно-линейных функций, определенных на интервале $[0, +\infty)$ со значениями в R. Рассмотрим функцию f из множества $\mathscr{P}$ с узлами $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{K+1} \leqslant +\infty$ и угловыми коэффициентами $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_{K+1} = 0$. Выражение $f = \mathscr{P}[(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_l, \beta_l), \ldots, (\alpha_{K+1}, \beta_{K+1})]$ означает следующее. Если $\alpha_{K+1} < +\infty$, то график функции f содержит K линейных отрезков и луч, выходящий из точки $(\alpha_{K+1}, f(\alpha_{K+1}))$ с угловым коэффициентом $\beta_{K+1} = 0$. Если $\alpha_{K+1} = +\infty$, то график функции f содержит $K - 1$ линейных отрезков и луч, выходящий из точки $(\alpha_K, f(\alpha_K))$ с угловым коэффициентом $\beta_K > 0$, а величина β_{K+1} соответствует пустому сегменту. Пара (α_l, β_l) означает, что из точки $(\alpha_l, f(\alpha_l))$ графика функции f выходит линейный отрезок с угловым коэффициентом β_l. Выражение $f \in \mathscr{P}[(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_l, \beta_l)]$ означает, что первые l линейных отрезков графика функции f имеют угловые коэффициенты $\beta_1 > \ldots > \beta_l$.

2. Невырожденный случай

Функция возмущения задачи НЗР(y). Предположим, что величины β_{ik}, $i \in I, k \in [1, K_i]$, положительны и попарно различны.

Функцией возмущения задачи НЗР(y) назовем функцию p_y, значения которой определяются равенством $p_y(w) = \max\limits_z \{yQ(z) \mid yz \leqslant w, z \geqslant 0\}$.

Ниже, если не оговорено противное, будем предполагать, что $y \geqslant 0$ и $y \neq 0$. Нетрудно проверить, что функция $yQ(z)$ является вогнутой и кусочно-линейной относительно переменных z. Следовательно, подграфик функции p_y — проекция выпуклого многогранного множества

$\{(w,q,z) \in R^{2+m} \mid yQ(z) \geqslant q, yz \leqslant w, z \geqslant 0\}$ на пространство R^2 переменных w и q. Поэтому $p_y \in \mathscr{P}$.

Обозначим через p_i функцию возмущения задачи (4)–(6) для вектора y с одной ненулевой компонентой $y_i > 0$. Очевидно, что $p_i \in \mathscr{P}$.

Лемма 1. *Для любого $y_i > 0$ функция p_i является возрастающей на интервале $\mathscr{S}(y_i\alpha^i)$ и $p_i = \mathscr{P}[(y_i\alpha_{i1}, \beta_{i1}), \ldots, (y_i\alpha_{ik}, \beta_{ik}), \ldots, (y_i\alpha_{iK_i+1}, \beta_{iK_i+1})]$.*

Доказательство. По определению функция Q_i является вогнутой. Так как величины $\beta_{ik}, i \in I$ и $k \in [1, K_i]$, положительны, то функция является возрастающей на интервале $\mathscr{S}(\alpha^i)$. Поэтому для любого $w \geqslant 0$ такого, что $(w/y_i) \in \mathscr{S}(\alpha^i)$, значение $p_i(w)$ достигается, когда ограничение $y_i z_i \leqslant w$ выполняется как равенство. Тогда для любого $z_i \in \mathscr{S}(\alpha^i)$ имеем $p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i)$. Следовательно, функция p_i является возрастающей на интервале $\mathscr{S}(y_i\alpha^i)$. В частности, отсюда получаем, что для любого $w \in \mathscr{S}(y_i\alpha^i)$ существует единственное оптимальное решение $z_i^* = w/y_i$.

Так как Q_i — кусочно-линейная функция, то для любого $z_i \in \mathscr{S}_k(\alpha^i)$ имеем

$$Q_i(z_i) = Q_i(\alpha_{ik}) + \beta_{ik}(z_i - \alpha_{ik}), \tag{7}$$

где $k = 1, \ldots, K_i$. Умножая обе части равенства (7) на y_i и учитывая, что $p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i)$ и $p_i(y_i\alpha_{ik}) = y_i Q_i(\alpha_{ik})$, получаем

$$p_i(y_i z_i) = p_i(y_i\alpha_{ik}) + y_i\beta_{ik}(z_i - \alpha_{ik}),$$

где $z_i \in \mathscr{S}_k(\alpha^i)$ и $k = 1, \ldots, K_i$. Подстановка $w = y_i z_i$ дает равенство

$$p_i(w) = p_i(y_i\alpha_{ik}) + \beta_{ik}(w - y_i\alpha_{ik}),$$

где $w \in \mathscr{S}_k(y_i\alpha^i)$, $k = 1, \ldots, K_i$. Покажем, что это равенство выполняется для функции p_i и на интервале $(y_i\alpha_{iK_i+1}, +\infty)$. Если $i \in \mathscr{I}_1$, то этот интервал является пустым. Пусть $i \in \mathscr{I}_2$. Так как для $z_i > \alpha_{iK_i+1}$ справедливо неравенство $Q_i(z_i) < Q_i(\alpha_{iK_i+1})$, то $p_i(y_i z_i)$ достигается на оптимальном решении $z_i^* = \alpha_{iK_i+1}$. Следовательно, для $w \geqslant y_i\alpha_{iK_i+1}$ имеем $p_i(w) = p_i(y_i\alpha_{iK_i+1})$. Тогда при $w \geqslant y_i\alpha_{iK_i+1}$ верно равенство

$$p_i(w) = p_i(y_i\alpha_{iK_i+1}) + \beta_{iK_i+1}(w - y_i\alpha_{iK_i+1}).$$

Это означает, что $p_i = \mathscr{P}[(y_i\alpha_{i1}, \beta_{i1}), \ldots, (y_i\alpha_{ik}, \beta_{ik}), \ldots, (y_i\alpha_{iK_i+1}, \beta_{iK_i+1})]$. Лемма 1 доказана.

Обозначим через p_y^* функцию возмущения следующей задачи:

$$\max\{p_1(w_1) + \cdots + p_m(w_m) \mid w_i \in R, w_i \geqslant 0, w_1 + \cdots + w_m = w\}. \tag{8}$$

Если $y_i = 0$, то будем считать, что на интервале $[0, +\infty)$ функция p_i тождественно равна 0. Упорядочим по убыванию положительные угловые коэффициенты всех функций p_i, для которых $y_i > 0$,

$$\beta_{i(1)k(1)} > \beta_{i(2)k(2)} > \cdots > \beta_{i(K_y)k(K_y)} > 0, \tag{9}$$

где $K_y = \sum\limits_{i:y_i>0} K_i$. Определим номер K_u следующим образом. Если $\mathscr{I}_1 \neq \varnothing$, то положим K_u равным такому наименьшему l, что $y_{i(l)} > 0$, $i(l) \in \mathscr{I}_1$ и $k(l) = K_{i(l)}$. Если $\mathscr{I}_1 = \varnothing$, то положим $K_u = K_y$. Введем величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_{K_u}$ такие, что $0 = \gamma_1 < \cdots < \gamma_{K_u}$, и при любом $l, 1 < l \leqslant K_u$,

$$\gamma_l = \sum_{t=1}^{l-1} y_{i(t)}\big(\alpha_{i(t)k(t)+1} - \alpha_{i(t)k(t)}\big),$$

и дополнительный узел

$$\gamma_{K_u+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mathscr{I}_1 \neq \varnothing; \\ \sum\limits_{t=1}^{K_u} y_{i(t)}\big(\alpha_{i(t)k(t)+1} - \alpha_{i(t)k(t)}\big), & \text{если } \mathscr{I}_1 = \varnothing. \end{cases}$$

Положим $\beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)} = 0$.

Для любых l, $1 \leqslant l \leqslant K_u$, и $i, 1 \leqslant i \leqslant m$, введем множества $T_i^l = \{t \mid 1 \leqslant t \leqslant l-1, i(t) = i\}$. Для каждой пары (i,l), $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant K_u$, определим функцию $h(i,l) = |T_i^l|$. Из определения множеств T_i^l следует, что величина $h(i,l)$ равна числу отрезков функции Q_i, угловые коэффициенты которых строго больше $\beta_{i(l)k(l)}$. Обозначим через $\alpha_l, 1 \leqslant l \leqslant K_u$, вектор с компонентами $\alpha_{ih(i,l)+1}$. Если $\mathscr{I}_1 = \varnothing$, то при каждом i введем множества $T_i^{K_u+1}$. Положим $h(i, K_u+1) = |T_i^{K_u+1}|$. Теперь в качестве α_{K_u+1} возьмем вектор с компонентами $\alpha_{ih(i,K_u+1)}$, $i \in I$.

Лемма 2. *Если величина γ_{l+1} конечна, то справедливо равенство $\gamma_l = \alpha_l y$ и все компоненты векторов α_l и α_{l+1}, за исключением компоненты с номером $i(l)$, совпадают.*

Доказательство. Из определения величины γ_l и множеств T_i^l следует, что

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t \in T_i^l} y_{i(t)}\big(\alpha_{i(t)k(t)+1} - \alpha_{i(t)k(t)}\big).$$

Так как $\{k(t) \mid t \in T_i^l\} = \{1, \ldots, h(i,l)\}$, то

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{h(i,l)} y_i(\alpha_{is+1} - \alpha_{is}).$$

Из равенств $\sum\limits_{s=1}^{h(i,l)} y_i(\alpha_{is+1} - \alpha_{is}) = y_i\alpha_{ih(i,l)+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, следует, что

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{m} y_i\alpha_{ih(i,l)+1} = \alpha_l y.$$

По условию величина γ_{l+1} конечна. Тогда из определения следует, что

$$\gamma_{l+1} = \gamma_l + y_{i(l)}\big(\alpha_{i(l)k(l)+1} - \alpha_{i(l)k(l)}\big).$$

Теперь из равенств $T_i^{l+1} = T_i^l$ при $i \neq i(l)$ и $T_{i(l)}^{l+1} = T_{i(l)}^l \cup \{l\}$ следует требуемое утверждение. Лемма 2 доказана.

Пусть γ — вектор с компонентами $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{K_u+1} \leqslant +\infty$ и e^i — единичные орты пространства R^m. Обозначим через $\alpha_r(y)$ вектор с компонентами $y_i\alpha_{ih(i,r)+1}$.

Лемма 3. *Функция p_y^* является возрастающей на интервале $\mathscr{S}(\gamma)$ и*

$$p_y^* = \mathscr{P}\big[\big(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}\big), \ldots, \big(\gamma_{K_u}, \beta_{i(K_u)k(K_u)}\big), \big(\gamma_{K_u+1}, \beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)}\big)\big].$$

Для любого $w \in \mathscr{S}(\gamma)$ в задаче (8) существует единственное оптимальное решение.

Доказательство. Из определения функции p_y^* следует, что ее подграфик G^* равен сумме подграфиков G_i функций p_i. Так как множества G_i являются выпуклыми многогранными, то подграфик функции p_y^* — выпуклое многогранное множество. Следовательно, $p_y^* \in \mathscr{P}$.

Покажем, что на интервале $\mathscr{S}(\gamma)$ функция p_y^* является возрастающей и для каждого $w \in \mathscr{S}(\gamma)$ в задаче (8) существует единственное оптимальное решение. Пусть $r \leqslant K_u$ — первый номер, для которого справедливо включение $w \in \mathscr{S}_r(\gamma)$. Тогда из леммы 2 следует, что вектор

$$\mathscr{W} = \alpha_r(y) + e^{i(r)}(w - \alpha_r y) \tag{10}$$

удовлетворяет равенству $\sum\limits_i \mathscr{W}_i = w$.

Индукцией по r докажем, что на интервале $[\gamma_1, \gamma_r]$

$$p_y^* \in \mathscr{P}\big[\big(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}\big), \ldots, \big(\gamma_{r-1}, \beta_{i(r-1)k(r-1)}\big)\big]$$

и вектор $\mathscr{W}$, который вычисляется с помощью равенства (10), является оптимальным решением задачи (8).

При $r = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение выполняется при $r \geqslant 1$. Докажем, что оно верно при $r + 1$. Рассмотрим произвольное w из интервала $\mathscr{S}_r(\gamma)$. Так как $\gamma_r = \alpha_r y = \sum\limits_i y_i\alpha_{ih(i,r)+1}$,

то, вводя переменные $\delta w_i = w_i - y_i\alpha_{ih(i,r)+1}$, представим задачу (8) в эквивалентном виде: найти

$$p_y^*(w) = \max \sum_{i=1}^{m} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1} + \delta w_i) \tag{11}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{m} \delta w_i = w - \gamma_r, \tag{12}$$

$$\delta w_i \geqslant -y_i\alpha_{ih(i,r)+1}, 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{13}$$

Пусть δw^* — оптимальное решение задачи (11)–(13). Покажем, что $\delta w^* \geqslant 0$. Предположим, что для некоторого i_0 выполняется неравенство $\delta w^*_{i_0} < 0$. Из равенства (12) следует, что найдется i_1 такое, что $\delta w^*_{i_1} > 0$. Очевидно, что $y_{i_0} > 0$ и $y_{i_1} > 0$. Тогда из леммы 1 следует, что для функции p_{i_0} найдется интервал $\mathscr{S}_{k_0}(y_{i_0}\alpha^{i_0})$, содержащий $w'_{i_0} = y_{i_0}\alpha_{i_0h(i_0,r)+1} + \delta w^*_{i_0}$, на котором выполняется равенство

$$p_{i_0}(w'_{i_0}) = p_i(y_{i_0}\alpha_{i_0k_0}) + \beta_{i_0k_0}(w'_{i_0} - y_{i_0}\alpha_{i_0k_0}). \tag{14}$$

Аналогично для функции p_{i_1} найдется интервал $\mathscr{S}_{k_1}(y_{i_1}\alpha^{i_1})$, содержащий $w'_{i_1} = y_{i_1}\alpha_{i_1h(i_1,r)+1} + \delta w^*_{i_1}$, на котором выполняется равенство

$$p_{i_1}(w'_{i_1}) = p_i(y_{i_1}\alpha_{i_1k_1}) + \beta_{i_1k_1}(w'_{i_1} - y_{i_1}\alpha_{i_1k_1}). \tag{15}$$

Так как $\delta w^*_{i_0} < 0$, то для некоторого $t_0 \in T^r_{i_0}$ справедливо равенство $\beta_{i_0k_0} = \beta_{i(t_0)k(t_0)}$. Вместе с тем из неравенства $\delta w^*_{i_1} > 0$ следует, что если $\beta_{i_1k_1} = \beta_{i(t_1)k(t_1)}$, то $t_1 \notin T^r_{i_1}$. Поэтому $\beta_{i_0k_0} > \beta_{i(r)k(r)} \geqslant \beta_{i_1k_1}$.

Пусть $\delta_{i_0} = y_{i_0}\alpha_{i_0k_0+1} - w'_{i_0}$ и $\delta_{i_1} = w'_{i_1} - y_{i_1}\alpha_{i_1k_1}$. Без ограничения общности можно считать, что величины w'_{i_0} и w'_{i_1} лежат внутри соответствующих интервалов. Поэтому $\delta_{i_0} > 0$ и $\delta_{i_1} > 0$. Пусть $\delta = \min\{\delta_{i_0}, \delta_{i_1}\}$. Положим $\overline{\delta w_{i_0}} = \delta w^*_{i_0} + \delta$, $\overline{\delta w_{i_1}} = \delta w^*_{i_1} - \delta$ и $\overline{\delta w_i} = \delta w^*_i$ при $i \neq i_0, i_1$. Вектор $\overline{\delta w}$ является допустимым решением задачи (11)–(13).

Заметим, что $y_{i_0}\alpha_{i_0h(i_0,r)+1} + \overline{\delta w_{i_0}} = w'_{i_0} + \delta$ и $y_{i_1}\alpha_{i_1h(i_1,r)+1} + \overline{\delta w_{i_1}} = w'_{i_1} - \delta$. Так как $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то $w'_{i_0} + \delta \in \mathscr{S}_{k_0}(y_{i_0}\alpha^{i_0})$ и $w'_{i_1} - \delta \in \mathscr{S}_{k_1}(y_{i_1}\alpha^{i_1})$. Тогда из равенств (14), (15) и неравенства $\beta_{i_0k_0} > \beta_{i_1k_1}$ следует, что

$$\sum_i p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1} + \overline{\delta w_i}) - \sum_i p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1} + \delta w^*_i)$$
$$= p_{i_0}(w'_{i_0} + \delta) + p_{i_1}(w'_{i_1} - \delta) - p_{i_0}(w'_{i_0}) - p_{i_1}(w'_{i_1}) = \delta(\beta_{i_0k_0} - \beta_{i_1k_1}) > 0,$$

что противоречит оптимальности вектора δw^*. Следовательно, в оптимальном решении задачи (11)–(13) не может быть отрицательных переменных δw_i.

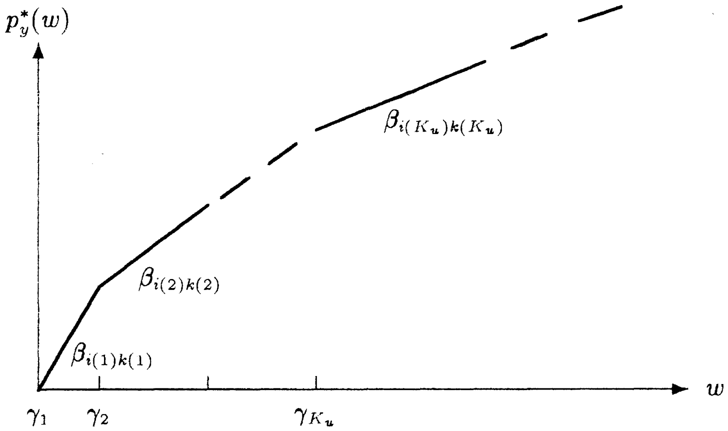

Рис. 3. График функции p_y^*: $\mathscr{I}_1 \neq \varnothing$

Теперь рассмотрим угловые коэффициенты β_{ik_i} линейных отрезков функций p_i, выходящих из точек $(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}, p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1})), i \neq i(r)$. Так как $w \in \mathscr{S}_r(\gamma)$, то при любом $i \neq i(r)$ имеем $\beta_{i(r)k(r)} > \beta_{ik_i}$. Тогда, повторяя рассуждение из доказательства неравенства $\delta w^* \geqslant 0$, получаем, что в оптимальном решении $\delta w_i^* = 0$ при $i \neq i(r)$ и $\delta w_{i(r)}^* = w - \gamma_r$. Так как $w - \gamma_r \leqslant y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1})$, то согласно лемме 1 имеем

$$p_y^*(w) = \sum_{i=1}^{m} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}) + \beta_{i(r)k(r)}(w - \gamma_r).$$

Из равенства (10) следует, что при $w = \gamma_r$ соответствующий вектор $\mathscr{W}$ равен $\alpha_r(y)$. Тогда из индуктивного предположения следует, что $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}) = p_y^*(\gamma_r)$. Таким образом, справедливо равенство

$$p_y^*(w) = p_y^*(\gamma_r) + \beta_{i(r)k(r)}(w - \gamma_r). \tag{16}$$

Поэтому $p_y^* \in \mathscr{P}[(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}), \ldots, (\gamma_r, \beta_{i(r)k(r)})]$ и вектор $\mathscr{W} = \alpha_r(y) + e^{i(r)}(w - \alpha_r y)$ — единственное оптимальное решение задачи (8). Так как $\beta_{i(r)k(r)} > 0$, то из индуктивного предположения и равенства (16) следует, что на интервале $[\gamma_1, \gamma_{r+1}]$ функция p_y^* является возрастающей. Поэтому на интервале $\mathscr{S}(\gamma)$ функция p_y^* является возрастающей и в задаче (8) для каждого $w \in \mathscr{S}(\gamma)$ существует единственное оптимальное решение. Для завершения доказательства осталось рассмотреть интервал $(\gamma_{K_u+1}, +\infty)$. Если среди функций p_i, соответствующих ненулевым y_i, есть неограниченные функции, то рассматриваемый интервал является пустым (рис. 3). Предположим, что $\gamma_{K_u+1} < +\infty$. Как уже доказано выше, в оптимальном решении задачи (11)–(13) не может быть

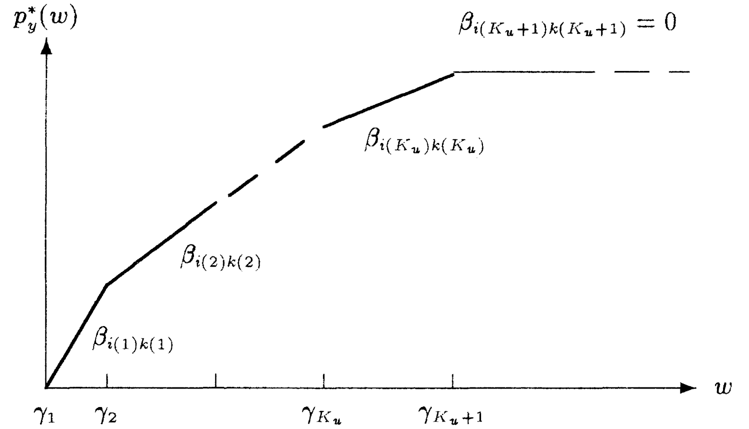

Рис. 4. График функции p_y^*: $\mathscr{I}_1 = \varnothing$

отрицательных переменных δw_i. Поэтому из леммы 1 следует, что при $w \geqslant \gamma_{K_u+1}$ значение функции возмущения $p_y^*(w)$ задачи (8) постоянно и равно $p_y^*(\gamma_{K_u+1})$.

Учитывая определение величины $\beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)}$, получаем равенство (рис. 4)

$$p_y^*(w) = p_y^*(\gamma_{K_u+1}) + \beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)}(w - \gamma_{K_u+1}).$$

Следовательно,

$$p_y^* = \mathscr{P}[(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}), \ldots, (\gamma_{K_u}, \beta_{i(K_u)k(K_u)}), (\gamma_{K_u+1}, \beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)})].$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если* $w \geqslant 0$, *то* $p_y^*(w) = p_y(w)$.

Доказательство. Рассмотрим $w \in \mathscr{S}_r(\gamma), r \leqslant K_u$. Из леммы 3 следует, что существует оптимальное решение $\mathscr{W}$ задачи (8) и $p_y^*(w) = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(\mathscr{W}_i)$. Для ненулевых y_i, как следует из доказательства леммы 1, справедливы равенства $p_i(\mathscr{W}_i) = y_i Q_i(\mathscr{W}_i/y_i)$. Так как $\sum\limits_i \mathscr{W}_i = w$, то $p_y(w) \geqslant p_y^*(w)$.

Предположим, что существует такое оптимальное решение z^* задачи НЗР(y) для данного w, что $yQ(z^*) > p_y^*(w)$ и $yz^* \leqslant w$. Из леммы 1 следует, что $p_i(\overline{w_i}) = y_i Q_i(z_i^*)$, где $\overline{w_i} = y_i z_i^*$. Пусть $\overline{w_i} \leqslant \mathscr{W}_i$ при каждом i. Так как $w \in \mathscr{S}_r(\gamma)$ и $r \leqslant K_u$, то $\mathscr{W}_i \in \mathscr{S}(y_i\alpha_i)$ для каждого номера i. Поэтому если увеличить каждое $\overline{w_i}$ до $\mathscr{W}_i$, то получим неравенство $p_y^*(w) = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(\mathscr{W}_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(\overline{w_i}) = yQ(z^*) > p_y^*(w)$. Противоречие. Следовательно, существуют номера i такие, что $\overline{w_i} > \mathscr{W}_i$. Множество всех таких номеров обозначим через I_l. По предположению $yz^* < w$,

а $\sum_{i=1}^{m} \mathscr{W}_i = w$. Поэтому $I_g = \{i \mid \overline{w_i} < \mathscr{W}_i\} \neq \varnothing$. Так как $\sum_{i=1}^{m} \overline{w_i} < w$, то $\sum_{i\in I_l} \overline{w_i} + \sum_{i\in I_g} \overline{w_i} < \sum_{i\in I_l\cup I_g} \mathscr{W}_i$ и, следовательно, $\sum_{i\in I_l}(\overline{w_i} - \mathscr{W}_i) < \sum_{i\in I_g}(\mathscr{W}_i - \overline{w_i})$. Поэтому

$$w - \sum_{i=1}^{m} \overline{w_i} = \sum_{i\in I_g}(\mathscr{W}_i - \overline{w_i}) - \sum_{i\in I_l}(\overline{w_i} - \mathscr{W}_i) > 0.$$

Пусть $\delta = w - \sum_i \overline{w_i}$. Для $i \in I_g$ можно выбрать такие δw_i, что $\delta w_i \geqslant 0$, $\sum_{i\in I_g} \delta w_i = \delta$ и $\overline{w_i} + \delta w_i \leqslant \mathscr{W}_i$. При $i \notin I_g$ возьмем $\delta w_i = 0$ и положим $\widetilde{w}_i = \overline{w_i} + \delta w_i$, $i \in I$. Очевидно, что $\widetilde{w}$ — допустимое решение задачи (8). Так как $r \leqslant K_u$, то при любом i из I_g справедливо включение $\mathscr{W}_i \in \mathscr{S}(y_i\alpha^i)$. Следовательно, $\widetilde{w}_i \in \mathscr{S}(y_i\alpha^i)$ при $i \in I_g$. Поэтому справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{m} p_i(\widetilde{w}_i) > \sum_{i=1}^{m} p_i(\overline{w}_i) = yQ(z^*) > p_y^*(w)$. Противоречие. Следовательно, $p_y^*(w) = p_y(w)$ при $w \in \mathscr{S}(\gamma)$. Аналогично доказывается утверждение для w из интервала $(\gamma_{K_u+1}, +\infty)$. Лемма 4 доказана.

Условия оптимальности для задачи НЗР(y). Предположим, что z — оптимальное решение задачи НЗР(y). Геометрически ему соответствует точка пересечения графика функции p_y с прямой, которая проходит через точку с координатами $(w, 0)$ параллельно оси ординат (рис. 5). Пусть эта точка пересечения лежит на отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$. Тогда $y_{i(r)} > 0$. Предположим, что отрезок $\mathscr{S}_r(\gamma)$ конечен. Это означает, что либо $r < K_u$, либо $r = K_u$, но функция $p_{i(r)}$ является ограниченной. Поэтому любой отрезок графика функции $p_y(w)$ с угловым коэффициентом, бóльшим $\beta_{i(r)k(r)}$, также конечен.

Лемма 5. *Если значение функции $p_y(w)$ достигается на конечном интервале $\mathscr{S}_r(\gamma)$, то z — оптимальное решение задачи* НЗР(y) *тогда и только тогда, когда*

$$z = \alpha_r + e^{i(r)}(w - (\alpha_r, y))/y_{i(r)}, \tag{17}$$

$$(\alpha_r, y) \leqslant w \leqslant (\alpha_{r+1}, y). \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, если z — оптимальное решение задачи НЗР(y) для $w \in \mathscr{S}_r(\gamma)$, то из леммы 4 следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} y_i Q_i(z_i) = p_y(w) = p_y^*(w) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\mathscr{W}_i),$$

где $\mathscr{W}$ — оптимальное решение задачи (8). Предположим, что $\sum_{i=1}^{m} y_i z_i = w' < w$. Тогда из леммы 3 следует неравенство $p_y^*(w') < p_y^*(w)$. Учитывая,

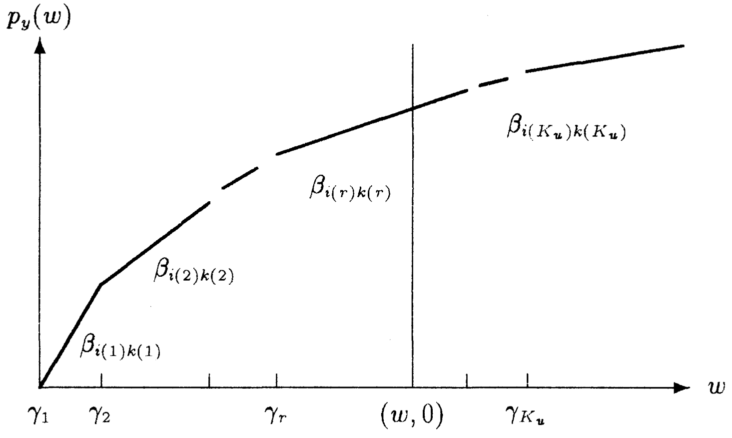

Рис. 5. График функции p_y

что $p_y(w') = p_y^*(w')$ и $p_y(w) = p_y(w')$, имеем $p_y(w) = p_y^*(w') < p_y^*(w) = p_y(w)$. Противоречие. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i z_i = w$. Так как $\mathscr{W}$ — единственное оптимальное решение задачи (8), то $\mathscr{W} = (y_1 z_1, \dots, y_m z_m)$. Отсюда и из условия $y_{i(r)} > 0$ получаем равенство (17). Из леммы 2 и условия $w \in \mathscr{S}_r(\gamma)$ имеем неравенства (18).

Теперь предположим, что выполняются соотношения (17) и (18). Тогда для любого i имеем $y_i z_i \in \mathscr{S}(y_i \alpha^i)$ и по лемме 1 выполняются равенства $p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i)$. С другой стороны, из условий (17), (18) и леммы 3 следует, что вектор $(y_1 z_1, \dots, y_m z_m)$ — оптимальное решение задачи (8). Поэтому $p_y^*(w) = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(y_i z_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i Q_i(z_i)$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i z_i = w$, то z — допустимое решение задачи НЗР(y). Из леммы 4 следует, что $p_y(w) = p_y^*(w) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i Q_i(z_i)$. Поэтому z — оптимальное решение задачи НЗР(y). Лемма 5 доказана.

Рассмотрим случай, когда отрезок с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$ неограничен справа. Для этого необходимо, чтобы $i(r) \in I_1, k(r) = K_{i(r)}$, и если $\beta_{iK_i} > \beta_{i(r)k(r)}$ при любом $i \in I_1$, то $y_i = 0$.

Лемма 6. *Если значение функции $p_y(w)$ достигается на неограниченном справа отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)} > 0$, то z — оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства* (17) *и*

$$\alpha_{K_u} y \leqslant w. \tag{19}$$

Доказательство. Справедливость леммы легко устанавливается с использованием рассуждений, аналогичных тем, которые привели

к условиям (17), (18), если вместо неравенств $\gamma_r \leqslant w \leqslant \gamma_{r+1}$ использовать неравенство $\gamma_{K_u} \leqslant w$. Лемма 6 доказана.

Замечание. Предположим, что все функции Q_i — линейные. Тогда задача НЗР(y) является частным случаем линейной задачи о ранце и ее можно записать в следующем виде: найти

$$\max_{z \geqslant 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} y_i \beta_i z_i \mid \sum_{i=1}^{m} y_i z_i \leqslant w \right\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $y > 0$ и $\beta_1 > \ldots > \beta_m$. Тогда $K_u = 1$ и график функции возмущения p_y является лучом, выходящим из точки $\gamma_1 = 0$ с угловым коэффициентом β_1. Поэтому $\alpha_1 = 0$ и, следовательно, условия оптимальности леммы 6 эквивалентны условиям $z = e^1 w / y_1, w \geqslant 0$.

Таким образом, для линейных функций Q_i лемма 6 приводит к классическим условиям оптимальности для задачи о ранце с непрерывными переменными [5].

Предположим, что $y_i = 0$ при любом $i \in I_1$. Тогда справедлива следующая

Лемма 7. *Если значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с нулевым угловым коэффициентом, то z — оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1} y \leqslant w$.*

Доказательство. Очевидно, что если $y_i > 0$, то $i \in \mathscr{I}_2$. Поэтому если $z_i > \alpha_{iK_i+1}$, то $Q_i(z_i) < Q_i(\alpha_{iK_i+1})$. Следовательно, z — оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1} y \leqslant w$. Лемма 7 доказана.

Доказательство полиномиальной разрешимости задачи ДНП. Упорядочим угловые коэффициенты β_{ik}, $i \in I$, $1 \leqslant k \leqslant K_i$:

$$\beta_{i(1)\kappa(1)} > \beta_{i(2)\kappa(2)} > \cdots > \beta_{i(L)\kappa(L)} > 0, \tag{20}$$

где $L = \sum\limits_{i \in I} K_i$ — общее число линейных сегментов с положительными угловыми коэффициентами. Пусть $\beta_{i(L+1)\kappa(L+1)} = 0$.

Множество допустимых решений задачи ДНП представим в виде объединения подмножеств: $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_L, \Pi_{L+1}$. Если $y = 0$, то допустимое решение (x, y, z) задачи (1)–(6) принадлежит множеству Π_0. Если $y \neq 0$ и значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)\kappa(r)}$, где $r \neq L + 1$ — номер, определяемый упорядочением (20), то допустимое решение принадлежит множеству Π_r. Все оставшиеся допустимые решения, если они есть, принадлежат множеству Π_{L+1}. Условия оптимальности, найденные в предыдущем пункте, позволяют свести задачу ДНП на любом из этих подмножеств к соответствующей задаче линейного программирования.

Теорема 1. *Для любой невырожденной задачи* (1)–(6) *существует полиномиальный алгоритм, который либо находит оптимальное решение, либо позволяет установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Доказательство. Пусть $(x, y, z) \in \Pi_0$. Тогда любой вектор $z \geqslant 0$ — оптимальное решение задачи НЗР(0). Если $(x, 0, z)$ — оптимальное решение задачи ДНП на подмножестве Π_0, то x — оптимальное решение следующей задачи P_0: найти

$$\min_{x \geqslant 0} cx$$

при условии, что $Cx \geqslant b$. Аналогично если x — оптимальное решение задачи P_0, то $(x, 0, z)$ — оптимальное решение задачи ДНП на рассматриваемом подмножестве при любом $z \geqslant 0$ и значения целевых функций на данных решениях совпадают.

1. Рассмотрим множество допустимых решений Π_r таких, что значение функции $p_y(w)$ достигается на конечном отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)\kappa(r)}$. Тогда если $i(r) \in I_1$, то $\kappa(r) < K_i$. Очевидно, что $y_{i(r)} > 0$ для любого допустимого решения (x, y, z) из этого множества. Из определения допустимого решения для задачи ДНП и леммы 5 следует, что вектор (x, y, z) — допустимое решение тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (2) и соотношения (17), (18). Чтобы упростить обозначения, предположим, что рассматриваемый отрезок в локальной нумерации (9), связанной с y, имеет тот же самый номер r.

Из леммы 2 следует, что неравенства (18) эквивалентны неравенствам $\alpha_{i(r)\kappa(r)} < z_{i(r)} \leqslant \alpha_{i(r)\kappa(r)+1}$. Тогда из равенств (7) и (17) получаем

$$Q_{i(r)}(z_{i(r)}) = Q_{i(r)}(\alpha_{i(r)h(i(r),r)}) + \beta_{i(r)\kappa(r)}(w - \alpha_r y)/y_{i(r)}.$$

Следовательно,

$$Q_{i(r)}(z_{i(r)})y_{i(r)} = Q_{i(r)}(\alpha_{i(r)h(i(r),r)})y_{i(r)} + \beta_{i(r)\kappa(r)}(w - \alpha_r y).$$

Используя равенства (17) и последнее равенство и исключая переменные z из ограничений (2), получаем

$$Cx + (D(\alpha_r) - D^*(\alpha_r))y \geqslant b^*, \tag{21}$$

где $D^*(z)$ - функциональная матрица вида $(\beta_{i(r)\kappa(r)} d^2_{si(r)} z_i)$, b^* — вектор с компонентами $(b_s - \beta_{i(r)\kappa(r)} w d^2_{si(r)})$.

Пусть $H(i, l)$ — число сегментов функции Q_i, угловые коэффициенты которых строго больше $\beta_{i(l)\kappa(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant L+1$. Обозначим через $\mathscr{A}_l$ вектор с компонентами $\alpha_{iH(i,l)+1}$ для всех i, а через $I(l)$ множество номеров i из $\mathscr{I}_1$ таких, что $\beta_{iK_i} > \beta_{i(l)\kappa(l)}$, $1 \leqslant l \leqslant L+1$.

Лемма 8. *Если вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r, то вектор (x, y) удовлетворяет следующей системе ограничений:*

$$Cx + (D(\mathscr{A}_r) - D^*(\mathscr{A}_r))y \geqslant b^*, \tag{22}$$

$$\mathscr{A}_r y \leqslant w \leqslant \mathscr{A}_{r+1} y, \tag{23}$$

$$y_i = 0, i \in I(r), \tag{24}$$

$$y_{i(r)} > 0, \tag{25}$$

$$x, y \geqslant 0. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное допустимое решение (x, y, z) из множества Π_r. Чтобы доказать, что вектор (x, y) — допустимое решение системы ограничений (22)–(26), достаточно сравнить значения функций h и H при всех (i, r), где $i \in I$. Функция h вычисляется с использованием локального упорядочения (9), которое нумерует угловые коэффициенты функций Q_i $(y_i > 0)$ в порядке убывания. Глобальное упорядочение (20) также нумерует угловые коэффициенты в порядке убывания, но уже для всех функций Q_i. Поэтому если $y_i > 0$, то значения $h(i, r)$ и $H(i, r)$ должны совпадать и, следовательно, могут различаться только в случае $y_i = 0$. Отсюда получаем

$$D(\alpha_r)y = D(\mathscr{A}_r)y, \quad D^*(\alpha_r)y = D^*(\mathscr{A}_r)y, \quad \alpha_r y = \mathscr{A}_r y, \alpha_{r+1} y = \mathscr{A}_{r+1} y. \tag{27}$$

Следовательно, неравенства (22), (23) справедливы.

Предположим, что $i \in I(r)$ и $y_i > 0$. Тогда, как и в лемме 3, найдется допустимое решение задачи НЗР(y) с бóльшим значением целевой функции, чем на оптимальном решении леммы 5. Противоречие. Следовательно, должны выполняться ограничения (24). Неравенство (25) вытекает из определения множества Π_r. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если неотрицательный вектор (x, y) удовлетворяет системе ограничений (22)–(26), то существует оптимальное решение z задачи* НЗР(y) *такое, что вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r.*

Доказательство. Из ограничения (25) следует, что $y_{i(r)} > 0$. Поэтому значения $h(i(r), r)$ и $H(i(r), r)$ совпадают. Таким образом, выполняются равенства (27). Тогда из ограничений (22), (23) следуют ограничения (21) и (18). Учитывая, что $y_{i(r)} > 0$ и выполняются неравенства (18), определим z из соотношений (17). Из леммы 5 следует, что z — оптимальное решение задачи НЗР(y). Из определения матрицы $D^*(z)$, вектора b^* и равенств (27) непосредственно следует, что вектор (x, y, z)

удовлетворяет ограничению (2) задачи ДНП. В свою очередь, это означает, что (x, y, z) — допустимое решение из множества Π_r. Лемма 9 доказана.

Из леммы 8 следует, что если вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r, то пара (x, y) — допустимое решение следующей оптимизационной задачи P_r: найти

$$\min_{x,y\geqslant 0}(cx + dy)$$

при условии, что

$$\begin{gathered} Cx + (D(\mathscr{A}_r) - D^*(\mathscr{A}_r))y \geqslant b^*, \\ \mathscr{A}_r y \leqslant w \leqslant \mathscr{A}_{r+1} y, \\ y_i = 0, i \in I(r), \\ y_{i(r)} > 0. \end{gathered}$$

В свою очередь, если (x, y) — допустимое решение задачи P_r и вектор z вычисляется с помощью соотношений (17), то из леммы 9 следует, что вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r.

2. Рассмотрим случай, когда отрезок с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)\kappa(r)}$ неограничен справа. Из леммы 6 следует, что оптимальное решение задачи удовлетворяет равенствам (17) и условию $\alpha_r y \leqslant w$. Как и ранее, исключая переменные z, получим оптимизационную задачу P_r, в которой вместо двустороннего ограничения используется ограничение вида $\mathscr{A}_r y \leqslant w$.

3. Рассмотрим последний случай, когда отрезок неограничен справа и его угловой коэффициент равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $y_i = 0$ при любом $i \in \mathscr{I}_1$. Тогда по лемме 7 при любом $w \geqslant \gamma_{K_u+1}$ оптимальное решение задачи НЗР(y) имеет вид $z = \alpha_{K_u+1}$. Из (27) следует, что $D(\alpha_{K_u+1})y = D(\mathscr{A}_{L+1})y$ и $\alpha_{K_u+1}y = \mathscr{A}_{L+1}y$. Поэтому исключая переменные z, получаем оптимизационную задачу P_{L+1}: найти

$$\min_{x,y\geqslant 0}(cx + dy)$$

при условии, что

$$\begin{gathered} Cx + D(\mathscr{A}_{L+1})y \geqslant b, \\ \mathscr{A}_{L+1} y \leqslant w, \\ y_i = 0, i \in \mathscr{I}_1. \end{gathered}$$

Заметим, что функционал задачи (1)–(6) не зависит от переменных внутренней задачи (4)–(6). Поэтому если $(x, y, z) \in \Pi_r$, то в каждом случае 1–3 вектор (x, y) — допустимое решение задачи P_r, и значения

целевых функций на этих решениях совпадают. Верно и обратное утверждение: если (x, y) — допустимое решение задачи P_r, то $(x, y, z) \in \Pi_r$, где z вычисляется с помощью одной из лемм 5–7, и значения целевых функций на этих решениях также совпадают.

Таким образом, если в задаче (1)–(6) существует оптимальное решение, то среди задач P_k, $0 \leqslant k \leqslant L+1$, найдутся разрешимые. Заметим, что в рассматриваемом случае могут быть недопустимые задачи P_k, но не может быть неограниченных снизу задач. В этом случае исходная задача сводится к нахождению такого оптимального решения задач P_k, которое является наименьшим относительно функционала.

Так как все задачи P_k, $k = 0, 1, \dots, L+1$, являются задачами линейного программирования, то они могут быть решены точно с помощью стандартных полиномиальных алгоритмов [2]. Теорема 1 доказана.

3. Вырожденный случай

Функция возмущения задачи НЗР(y). Предположим, что величины β_{ik}, где $i \in I$ и $k \in [1, K_i]$, положительны, но, вообще говоря, не являются попарно различными. Без ограничения общности можно считать, что при любом $i \in I$ величины β_{ik} попарно различны. Действительно, если $\beta_{ik} = \beta_{ik+1} = \dots = \beta_{ik+l}$, то из определения функции Q_i следует, что этим величинам соответствуют узлы $\alpha_{ik} < \alpha_{ik+1} < \alpha_{ik+2} < \dots < \alpha_{ik+l} < \alpha_{ik+l+1}$, $1 \leqslant k < k+l+1 \leqslant \overline{K}$, где $\overline{K} = K_i$, если $i \in \mathscr{I}_1$, и $\overline{K} = K_i + 1$, если $i \in \mathscr{I}_2$. Удалим промежуточные узлы $\alpha_{ik+1}, \alpha_{ik+2}, \dots, \alpha_{ik+l}$. Тогда отрезку с угловым коэффициентом β_{ik} будет соответствовать пара узлов $\alpha_{ik}, \alpha_{ik+l+1}$. Осталось перенумеровать величины β_{ik} и α_{ik}. Следовательно, для функций $p_1, \dots, p_m$ справедлива лемма 1.

Разобьем множество $L = \{(i, k) \mid i \in I, k \in [1, K_i]\}$ на такие непересекающиеся подмножества L_t, $t = 1, \dots, T$, чтобы величины β_{ik} совпадали друг с другом, если они попадают в одно подмножество, и отличались бы друг от друга в противном случае. Общее значение величин β_{ik} из множества L_t обозначим через $\beta_t, t = 1, \dots T$. Пусть I_t — множество всех номеров i таких, что для некоторого k пара (i, k) принадлежит множеству L_t.

Пусть $y \geqslant 0$ и $y \neq 0$. Рассмотрим множество $L^y = \{(i, k) \mid (i, k) \in L, y_i > 0\}$. Аналогично определяются множества $L_t^y, I_t^y, t = 1, \dots, T$. Упорядочим по убыванию величины β_t, которые соответствуют непустым множествам L_t^y :

$$\beta_{t(1)} > \beta_{t(2)} > \dots > \beta_{t(T_y)} > 0. \tag{28}$$

Определим номер K_u следующим образом. Если $\mathscr{I}_1 \neq \varnothing$, то положим K_u равным наименьшему l, при котором найдется такая пара $(i, k) \in L_{t(l)}^y$,

что $i \in \mathscr{I}_1$ и $k = K_i$. Если $\mathscr{I}_1 = \varnothing$, то положим $K_u = T_y$. Введем величины $\gamma_1, \dots, \gamma_{K_u}$ такие, что $0 = \gamma_1 < \dots < \gamma_{K_u}$ и при любом l, $1 < l \leqslant K_u$,

$$\gamma_l = \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{(i,k) \in L^y_{t(s)}} y_i(\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}),$$

и дополнительный узел

$$\gamma_{T_y+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mathscr{I}_1 \neq \varnothing; \\ \sum\limits_{s=1}^{T_y} \sum\limits_{(i,k) \in L^y_{t(s)}} y_i(\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}), & \text{если } \mathscr{I}_1 = \varnothing. \end{cases}$$

Положим $\beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)} = 0$.

При любом l, $1 \leqslant l \leqslant K_u$, введем множества $T_i^l = \{(i,k) \mid (i,k) \in L^y_{t(s)}, 1 \leqslant s \leqslant l-1\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Положим $h(i,l) = |T_i^l|$. Как и в невырожденном случае, с помощью функции $h(i,l)$ определим векторы α_l, $1 \leqslant l \leqslant K_u$. Если $\mathscr{I}_1 = \varnothing$, то введем множества $T_i^{K_u+1}$ для всех i. Положим $h(i, K_u + 1) = |T_i^{K_u+1}|$. Теперь в качестве α_{K_u+1} возьмем вектор с компонентами $\alpha_{ih(i,K_u+1)}$, где $i \in I$. Пусть γ — вектор с компонентами $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{K_u+1} \leqslant +\infty$.

Замечания.

1. Предположим, что $\gamma_{l+1} < +\infty$. Тогда, следуя доказательству леммы 2, для узла с номером l получаем $\gamma_l = \alpha_l y$. Так как

$$\gamma_{l+1} = \gamma_l + \sum_{(i,k) \in L^y_{t(l)}} y_i(\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}),$$

то справедливы равенства

$$T_i^{l+1} = T_i^l \text{ при } i \notin I_l^y \text{ и } T_i^{l+1} = T_i^l \cup \{(i,k) \mid (i,k) \in L^y_{t(l)}\} \text{ при } i \in I_l^y.$$

Следовательно, все компоненты векторов α_l и α_{l+1} совпадают, кроме компонент с номерами из множества I_l^y, $l < K_u$.

2. В вырожденном случае строгая монотонность функции p_y^* на интервале $\mathscr{S}(\gamma)$ сохраняется. Однако для $w \notin \{\gamma_1, \dots, \gamma_{K_u+1}\}$ может существовать бесконечно много оптимальных решений в задаче НЗР(y). Пусть $r \leqslant K_u$ —- первый номер такой, что справедливо включение $w \in \mathscr{S}_r(\gamma)$. Рассматривая задачу (11)–(13) как при доказательстве леммы 3, убеждаемся в том, что в оптимальном решении не может быть отрицательных переменных δw_i. Более того, для оптимальности решения также необходимо выполнение неравенств $0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1})$ при всех $i \in I_r^y$. Последнее утверждение обосновывается практически так же,

как и предыдущее. Тогда любое оптимальное решение задачи может быть записано в следующем виде:

$$\mathscr{W} = \alpha_r(y) + \sum_{i\in I_r^y} \delta w_i e^i, \tag{29}$$

где δw_i — решение системы ограничений

$$\sum_{i\in I_r^y} \delta w_i = w - \gamma_r, 0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}). \tag{30}$$

Далее, используя схему доказательства леммы 3, получаем равенство

$$p_y^*(w) = p_y^*(\gamma_r) + \beta_{t(r)}(w - \gamma_r),$$

из которого следует, что в силу условия (28) на интервале $\mathscr{S}(\gamma)$ функция p_y^* является возрастающей. Случай $r = K_u + 1$ рассматривается аналогично. Таким образом, справедливо равенство $p_y^* = \mathscr{P}[(\gamma_1, \beta_{t(1)}), \ldots, (\gamma_{K_u}, \beta_{t(K_u)}), (\gamma_{K_u+1}, \beta_{t(K_u+1)})]$.

3. Как и при доказательстве леммы 4, нетрудно убедиться в том, что в вырожденном случае справедливо равенство $p_y^*(w) = p_y(w)$.

4. Пусть значение функции $p_y(w)$ достигается на интервале $\mathscr{S}_r(\gamma)$, где $r \leqslant K_u$ и $\gamma_r \leqslant w$. Тогда из замечаний 2 и 3 следует, что z — оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда существует оптимальное решение $\mathscr{W}$ задачи (8) такое, что $\mathscr{W} = (y_1 z_1, \ldots, y_m z_m)$. Учитывая соотношения (29)–(30) и условие $\gamma_r \leqslant w \leqslant \gamma_{r+1}$, получаем, что z — оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда

$$(y_1 z_1, \ldots, y_m z_m) = \alpha_r(y) + \sum_{i\in I_r^y} \delta w_i e^i, \tag{31}$$

$$\sum_{i\in I_r^y} \delta w_i = w - \alpha_r y, \tag{32}$$

$$\alpha_r y < w \leqslant \alpha_{r+1} y \tag{33}$$

$$0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}), \; i \in I_r^y. \tag{34}$$

5. Предположим, что значение функции $p_y(w)$ достигается на неограниченном справа отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{t(r)} > 0$. Это означает, что $r = K_u, \gamma_{r+1} = +\infty$ и $I_r^y \cap \mathscr{I}_1 \neq \varnothing$. В этом случае z — оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства (31), (32) и неравенства

$$\alpha_r y \leqslant w, \tag{35}$$

$$0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}), \quad i \in I_r^y \setminus \mathscr{I}_1, \tag{36}$$

$$0 \leqslant \delta w_i, \quad i \in I_r^y \cap \mathscr{I}_1. \tag{37}$$

6. Нетрудно проверить, что если значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с нулевым угловым коэффициентом, то, как и в невырожденном случае, z является оптимальным решением задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1}y \leqslant w$.

Так как величины β_t, $1 \leqslant t \leqslant T$, попарно различны, то можно предполагать, что

$$\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_T > 0. \tag{38}$$

Предположим, что $\beta_{T+1} = 0$. Пусть $H(i,l)$ — число сегментов функции Q_i, угловые коэффициенты которых строго больше β_l, $1 \leqslant l \leqslant T+1$. Обозначим через $\mathscr{A}_l$ вектор с компонентами $\alpha_{iH(i,l)+1}$ для всех i, а через $I(l)$ — множество $i \in \mathscr{I}_1$ таких, что $\beta_{iK_i} > \beta_l$, $1 \leqslant l \leqslant T+1$.

Множество допустимых решений задачи ДНП представим в виде объединения подмножеств $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_T, \Pi_{T+1}$. Если $y \neq 0$ и значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с угловым коэффициентом β_r, где $r \notin \{0, T+1\}$ — номер, определяемый упорядочением (38), то допустимое решение принадлежит множеству Π_r. Все оставшиеся допустимые решения, если они есть, принадлежат либо Π_0, либо Π_{T+1}. Условия оптимальности, приведенные в замечаниях 4, 5 и 6, позволяют свести задачу ДНП к $T+2$ задачам линейного программирования.

Теорема 2. *Для любой задачи (1)–(6) с полиномиальной временной сложностью можно либо найти оптимальное решение и проверить, является ли оно гарантированным, либо установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Доказательство. Утверждение о том, что задача ДНП на подмножестве Π_0 эквивалентна задаче линейного программирования P_0, доказывается так же, как и в теореме 1.

1. Рассмотрим множество допустимых решений на Π_r. Предположим, что множества I_r и $\mathscr{I}_1$ не имеют общих элементов. Из определения допустимого решения для задачи ДНП и замечания 4 следует, что вектор (x,y,z) является допустимым решением тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (2), (31)–(34). Для упрощения последующих рассуждений предположим, что рассматриваемый отрезок в локальной нумерации (28), связанной с y, имеет тот же самый номер r. Заменим множество I_r^y на множество I_r в ограничениях (31), (34), векторы α_r и α_{r+1} на векторы $\mathscr{A}_r$ и $\mathscr{A}_{r+1}$ в ограничениях (32), (33) и функцию h на функцию H в ограничении (34). Легко доказать, что при $y_i > 0$ значения функций $h(i,r)$ и $H(i,r)$ совпадают. С другой стороны, переменные y_i входят в ограничения (31)–(34). Следовательно, для текущего y имеем

$$\alpha_r(y) = \mathscr{A}_r(y), \quad \alpha_r y = \mathscr{A}_r y, \quad \alpha_{r+1} y = \mathscr{A}_{r+1} y,$$
$$y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}) = y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}).$$

Таким образом, условия (31)–(34) эквивалентны следующей системе ограничений:

$$(y_1 z_i, \ldots, y_m z_m) = \mathscr{A}_r(y) + \sum_{i \in I_r} \delta w_i e^i, \tag{39}$$

$$\mathscr{A}_r y \leqslant w \leqslant \mathscr{A}_{r+1} y, \tag{40}$$

$$\sum_{i \in I_r} \delta w_i = w - \mathscr{A}_r y, \tag{41}$$

$$0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r. \tag{42}$$

В невырожденном случае редукция ограничений (2) к (21) основывалась на строгом неравенстве $y_{i(r)} > 0$. В рассматриваемой ситуации из условия $(x, y, z) \in \Pi_r$ следует лишь, что $\sum\limits_{i \in I_r^y} y_i > 0$. Поэтому при $z \in \mathscr{S}_k(\alpha^i), k = 1, \ldots, K_i$ воспользуемся равенствами из леммы 1
$p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i), p_i(y_i \alpha_{ik}) = y_i Q_i(\alpha_{ik}),\ p_i(y_i z_i) = p_i(y_i \alpha_{ik}) + y_i \beta_{ik}(z_i - \alpha_{ik})$
и получим $y_i Q_i(z_i) = y_i Q_i(\alpha_{ik}) + \beta_r(y_i z_i - y_i \alpha_{ik})$. Отсюда и из равенства (39) следует, что $y_i Q_i(z_i) = y_i Q_i(\alpha_{iH(i,r)}) + \beta_r \delta w_i$. Используя это представление, исключим переменные z из ограничений (2) и получим

$$Cx + D(\mathscr{A}_r)y + D^* \delta w \geqslant b, \tag{43}$$

где D^* — матрица, имеющая $|I_r|$ столбцов, элементы которой совпадают с величиной β_r, δw — вектор переменных с компонентами δw_i, $i \in I_r$, удовлетворяющих ограничениям (40)–(42). Очевидно и обратное утверждение: если $(x, y, \delta w)$ — вектор, удовлетворяющий ограничениям (40)–(43), то существует единственный вектор (x, y, z), удовлетворяющий ограничениям (39)–(42). Теперь, учитывая, как в леммах 8 и 9, условие $y_i = 0$ при $i \in I(r)$ и то, что функционал задачи (1)–(6) не зависит от переменных z, получаем, что вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $\delta w \geqslant 0$ тройка $(x, y, \delta w)$ является допустимым решением следующей задачи P_r: найти

$$\min_{x,y \geqslant 0}(cx + dy)$$

при условии, что

$$\begin{gathered}
Cx + D(\mathscr{A}_r)y + D^* \delta w \geqslant b, \\
\mathscr{A}_r y \leqslant w \leqslant \mathscr{A}_{r+1} y, \\
\sum_{i \in I_r} \delta w_i = w - \mathscr{A}_r y, \\
0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}),\ i \in I_r, \\
y_i = 0,\ i \in I(r), \\
x, y \geqslant 0.
\end{gathered}$$

2. Теперь предположим, что $I_r \cap \mathscr{I}_1 \neq \varnothing$, т. е. отрезок с угловым коэффициентом $\beta_r > 0$ неограничен справа. Из определения допустимого решения для задачи ДНП и замечания 5 следует, что вектор (x, y, z) является допустимым решением тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (2) и равенства (31), (32), (35)–(37). Как и ранее, исключая переменные z, получаем оптимизационную задачу P_r: найти

$$\min_{x,y \geqslant 0}(cx + dy)$$

при условии, что

$$\begin{gathered}
Cx + D(\mathscr{A}_r)y + D^*\delta w \geqslant b, \\
\mathscr{A}_r y \leqslant w, \\
\sum_{i \in I_r} \delta w_i = w - \mathscr{A}_r y, \\
0 \leqslant \delta w_i \leqslant y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), \ i \in I_r \setminus \mathscr{I}_1, \\
0 \leqslant \delta w_i, \ i \in I_r \cap \mathscr{I}_1, \\
y_i = 0, \ i \in I(r), \\
x, y \geqslant 0.
\end{gathered}$$

3. Рассмотрим последний случай, когда отрезок неограничен справа и его угловой коэффициент равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $y_i = 0$ при любом $i \in \mathscr{I}_1$. Из замечания 6 следует, что при любом $w \geqslant \gamma_{K_u+1}$ вектор z является оптимальным решением задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1} y \leqslant w$. Так же как и в невырожденном случае, исключая переменные z, получим оптимизационную задачу P_{T+1}: найти

$$\min_{x,y \geqslant 0}(cx + dy)$$

при условии, что

$$\begin{gathered}
Cx + D(\mathscr{A}_{T+1})y \geqslant b, \\
\mathscr{A}_{T+1} y \leqslant w, \\
y_i = 0, \ i \in \mathscr{I}_1.
\end{gathered}$$

Заметим, что функционал задачи (1)– 6) не зависит от переменных внутренней задачи (4)–(6). Поэтому если $(x, y, z) \in \Pi_r$, то в случаях 1 и 2 при подходящем δw вектор $(x, y, \delta w)$ является допустимым решением задачи P_r и значения целевых функций на этих решениях совпадают. Верно и обратное утверждение. Аналогичное замечание справедливо для случая 3.

Таким образом, если существует оптимальное решение задачи (1)–(6), то среди задач P_k, $0 \leqslant k \leqslant T + 1$, найдутся разрешимые задачи.

Заметим, что в рассматриваемом случае могут быть недопустимые задачи P_k, но не может быть неограниченных снизу задач. В этом случае исходная задача сводится к нахождению такого оптимального решения задач P_k, которое является наименьшим относительно функционала.

Так как каждая задача P_k, $k = 0, 1, \ldots, T+1$, является задачей линейного программирования, то все такие задачи могут быть решены точно с помощью стандартных полиномиальных алгоритмов [2].

Рассмотрим оптимальное решение (x^*, y^*, z^*) задачи ДНП. Оно может оказаться негарантированным лишь тогда, когда существует оптимальное решение z' задачи НЗР(y^*) такое, что вектор (x^*, y^*, z') не удовлетворяет ограничениям (2). Если z^* — единственное оптимальное решение задачи НЗР(y^*), то вектор (x^*, y^*, z^*) будет гарантированным решением задачи ДНП. Поэтому из замечания 6 следует, что решения из множества Π_{T+1} будут гарантированными. Если $(x^*, y^*, z^*) \in \Pi_0$, то ограничения (2) не зависят от переменных z и, следовательно, решение также является гарантированным. В общем случае, когда $(x^*, y^*, z^*) \in \Pi_r$ и $r \notin \{0, T+1\}$, вопрос о единственности решения z^* сводится к исследованию следующей задачи: найти

$$\max \sum_{i \in I_r^{y^*}} \beta_r \delta w_i, \tag{44}$$

при условии, что

$$\sum_{i \in I_r^{y^*}} \delta w_i = w - \mathscr{A}_r y^*, \tag{45}$$

$$\delta w_i \leqslant y_i^*(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), \ i \in I_r^{y^*} \setminus \mathscr{I}_1, \tag{46}$$

$$\delta w_i \geqslant 0, \ i \in I_r^{y^*}. \tag{47}$$

Нетрудно доказать, что z^* является единственным решением задачи НЗР(y^*) тогда и только тогда, когда ранг подсистемы закрепленных ограничений задачи (44)–(47) равен $|I_r^{y^*}|$. Последнее условие может выполняться лишь в двух случаях: либо при $w = \mathscr{A}_{r+1} y^*$, либо при $|I_r^{y^*}| = 1$. Теперь предположим, что эти условия нарушаются. Тогда w принадлежит внутренности интервала $\mathscr{S}_r(\mathscr{A}_r y^*)$ и $|I_r^{y^*}| > 1$. Для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant S$, рассмотрим вспомогательную задачу G_s: найти

$$d_s^* = \min_{\delta w \geqslant 0} \sum_{i \in I_r^{y^*}} d_{si}^* \delta w_i$$

при условии, что

$$\sum_{i \in I_r^{y^*}} \delta w_i = w - \mathscr{A}_r y^*,$$

$$\delta w_i \leqslant y_i^*(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r^{y^*} \setminus \mathscr{I}_1,$$

где d^*_{si}, $i \in I^{y^*}_r$, — коэффициенты матрицы D^*. Так как (x^*, y^*, z^*) — оптимальное решение задачи ДНП, то существует вектор δw^* такой, что $(x^*, y^*, \delta w^*)$ — оптимальное решение задачи P_r. Поэтому для любой задачи G_s множество допустимых решений непусто. Очевидно, что оно является ограниченным. Из соотношений (39)–(42) следует, что допустимому решению δw задачи G_s соответствует единственное оптимальное решение $z(\delta w)$ задачи НЗР(y^*). Верно и обратное утверждение.

Предположим, что выполняется неравенство

$$d^*_s = \sum_{i \in I^{y^*}_r} d^*_{si}\overline{\delta w}_i < b_s - \sum_j c_{sj}x^*_j - \sum_{i \in I^{y^*}_r} (d^1_{si} + d^2_{si}\alpha_{iH(i,r)+1})y^*_i. \tag{48}$$

Покажем, что вектор $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w}))$ не является допустимым решением задачи (1)–(6). Предположим противное, т. е. вектор $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w}))$ удовлетворяет ограничениям (2). Тогда нетрудно доказать, что $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w})) \in \Pi_r$ и, следовательно, $(x^*, y^*, \overline{\delta w})$ — допустимое решение задачи P_r. Поэтому

$$\sum_{i \in I^{y^*}_r} d^*_{si}\overline{\delta w}_i \geqslant b_s - \sum_j c_{sj}x^*_j - \sum_{i \in I^{y^*}_r} (d^1_{si} + d^2_{si}\alpha_{iH(i,r)+1})y^*_i,$$

что противоречит неравенству (48). Таким образом, $z(\overline{\delta w})$ — такое оптимальное решение задачи НЗР(y^*), что вектор $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w}))$ не является допустимым решением задачи (1)–(6). Тогда из определения 2 следует, что оптимальное решение (x^*, y^*, z^*) не является гарантированным. Если при каждом s выполняется неравенство

$$d^*_s \geqslant b_s - \sum_j c_{sj}x^*_j - \sum_{i \in I^{y^*}_r} (d^1_{si} + d^2_{si}\alpha_{iH(i,r)+1})y^*_i,$$

то вектор (x^*, y^*, z^*) будет наилучшим гарантированным решением. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, N 2. С. 23–33.

2. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.

3. **Hansen P., Jaumard B., Savard G.** New branch-and-bound rules for linear bilevel programming // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1992. V. 13, N 5. P. 1194–1217.

4. **Jeroslow R.** The polynomial hierarchy and a simple model for competitive analysis // Math. Program. 1985. V. 32, N 2. P. 146–164.

5. **Martello S., Toth P.** Knapsack problems. Algorithms and computer implementations. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.

6. **Vicente L., Calamai P.** Bilevel and Multilevel programming: a bibliography review // J. Global Optim. 1994. V. 5, N 1. P. 291–306.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: apljas@math.nsc.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.,
переработанный вариант —
4 ноября 2000 г.