ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2001. Серия 1. Том 8, № 1, 23–39

УДК 519.854

# ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ СЛУЧАЙ ДВУХСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ OPEN SHOP С ТРЕМЯ МАШИНАМИ*)

*К. Н. Каширских, А. В. Кононов,*

*С. В. Севастьянов, И. Д. Черных*

Рассматривается двухстадийная задача open shop на трех машинах с критерием «минимум длины расписания». Вопрос о сложности этой задачи, поставленный Гонзалезом и Сáни в 1976 г., до сих пор остается открытым. В статье доказывается, что задача полиномиально разрешима при $L_{\max} \geqslant 3p_{\max}$, где $L_{\max}$ — максимальная машинная нагрузка, $p_{\max}$ — максимальная длительность операции. При этом длина оптимального расписания равняется $L_{\max}$.

## Введение

Рассматривается следующая задача. Имеются машины $A, B, C$ и множество работ $\mathscr{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$. Каждая работа имеет не более двух операций. Для каждой операции задана машина, на которой она выполняется. Без ограничения общности можем считать, что каждая работа имеет ровно две операции, выполняемые на разных машинах. Порядок выполнения операций каждой работы не фиксирован. Никакие две операции, выполняемые на одной машине или принадлежащие одной работе, не могут выполняться одновременно. Прерывания во время выполнения операции запрещены. Требуется минимизировать время завершения всех работ ($C_{\max}$).

Сформулированная задача представляет собой сужение классической задачи open shop с тремя машинами на случай, когда каждая работа имеет не более двух операций. Согласно классификации [4] сформулированная задача записывается как $O3|op = 2|C_{\max}$, где $op$ — максимальное число операций одной работы.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99–01–00601 и 99-01-00581) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

Интерес к данной задаче вызван следующими обстоятельствами. В работе [1] был осуществлен четырехпараметрический анализ сложности задачи open shop в зависимости от ограничений на множества допустимых значений четырех ключевых параметров: числа работ, максимального числа операций работы, числа машин и максимального числа операций на машине. Предлагалась следующая схема анализа. Значения ключевых параметров (взятых в указанном порядке) для конкретной индивидуальной задачи $I$ образуют четырехмерный *характеристический вектор* этой задачи, обозначаемый через $x^I$. Для каждого вектора $x \in \overline{\mathbb{Z}}^4$ (где $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел) определяется класс индивидуальных задач $\mathscr{I}(x) \doteq \{I \mid x^I \leqslant x\}$, где неравенство выполняется покомпонентно. Класс $\mathscr{I}(x)$ называется *нетривиальным*, если он содержит индивидуальные задачи со сколь угодно большим числом операций. В указанных обозначениях рассматриваемая задача представлена классом $\mathscr{I}(x')$, где $x' = (\infty, 2, 3, \infty)$. Было показано, что множество нетривиальных классов индивидуальных задач open shop содержит конечную *базисную систему*, состоящую не более чем из 14 базисных классов. Установлено также, что класс $\mathscr{I}(x')$ обязательно входит в базисную систему, причем ответ на вопрос о его сложности дает ответ на вопрос о точном значении мощности базисной системы: если класс $\mathscr{I}(x')$ полиномиально разрешим, то базисная система состоит из 14 классов; в противном случае (если класс $\mathscr{I}(x')$ является NP-трудным) базисная система содержит только 10 классов. Наконец, установление сложности класса $\mathscr{I}(x')$ завершает полное описание сложности классов $\mathscr{I}(x)$ для всевозможных значений вектора $x$. Таким образом, исследование класса $\mathscr{I}(x')$ приобретает особую важность в рамках исследования задачи open shop. Остается напомнить, что вопрос о сложности класса $\mathscr{I}(x')$ был сформулирован Т. Гонзалезом и С. Са́ни [6] в 1976 г. и пока остается открытым.

Заметим далее, что множество работ в задаче $O3|op = 2|C_{\max}$ разбивается на три подмножества: $\mathscr{J}_{AB}, \mathscr{J}_{BC}$ и $\mathscr{J}_{AC}$, где $\mathscr{J}_{XY}$ означает множество работ, выполняемых на машинах $X$ и $Y$. И. Дробошевич и В. Струсевич [5] показали, что если одно из трех подмножеств пусто, то задача разрешима за время, линейное от числа работ.

В данной статье находится другой эффективно разрешимый случай задачи $O3|op = 2|C_{\max}$: класс индивидуальных задач, удовлетворяющих соотношению

$$L_{\max} \geqslant 3p_{\max} \tag{1}$$

(где $L_{\max}$ — максимальная машинная нагрузка, $p_{\max}$ — максимальная длительность операции), разрешим за линейное время. Более того, согласно определению из [7] данный класс оказывается *эффективно*

*нормальным*, т. е. помимо эффективной разрешимости класса каждая его индивидуальная задача обладает свойством *нормальности*, когда длина оптимального расписания совпадает с величиной $L_{\max}$ (являющейся нижней оценкой оптимума). Ранее в [3] было показано, что условие

$$L_{\max} \geqslant 7p_{\max} \tag{2}$$

определяет эффективно нормальный класс индивидуальных задач более общей задачи $O3||C_{\max}$. Таким образом, полученный нами результат уточняет условие (2) в случае, когда каждая работа имеет не более двух операций.

В связи с полученным результатом возникает естественный вопрос: каково минимальное число $\lambda_{\min}$ такое, что всякая индивидуальная задача из $O3|op = 2|C_{\max}$, удовлетворяющая условию $L_{\max} \geqslant \lambda_{\min} p_{\max}$, является нормальной? В статье показывается, что $\lambda_{\min} = 3$.

## 1. Предварительные сведения

Через $a_j$, $b_j$ и $c_j$ будем обозначать операции работы $J_j \in \mathscr{J}$ на машинах $A$, $B$ и $C$ соответственно. (Напомним, что в задаче $O3|op = 2|C_{\max}$ для каждой работы $J_j$ существует только две из трех указанных операций.)

Длительность какой-либо операции $x$ и сумму длительностей операций из множества $X$ будем обозначать через $|x|$ и $|X|$ соответственно. Согласно определению из [2] *приоритетной укладкой* (или просто *укладкой*) будем называть расписание, в котором операции на каждой машине выполняются в установленном порядке без простоев начиная с момента 0. Ясно, что длина такого расписания равна $L_{\max}$. С учетом того, что величина $L_{\max}$ является нижней оценкой оптимума, всякая приоритетная укладка, определяющая допустимое расписание, является оптимальным расписанием.

*Блоком операций* назовем некоторое множество операций, выполняемых в определенном порядке на одной машине подряд и без простоев. (Отсюда приоритетная укладка является расписанием, в котором все операции каждой машины выполняются одним блоком.)

Будем говорить, что расписание $S$ *допустимо* относительно работы $J_j \in \mathscr{J}$, если интервалы выполнения ее операций не пересекаются. Ясно, что приоритетная укладка является допустимым расписанием, если и только если это расписание допустимо относительно каждой работы $J_j \in \mathscr{J}$.

Опишем алгоритм $H$, который в дальнейшем будет применяться в случае двух машин. Рассмотрим его на примере машин $A$, $B$ и множества работ $\mathscr{J}_{AB}$.

**Алгоритм $H$**

• Множество $\mathcal{J}_{AB}$ разбивается на два подмножества: $\mathcal{J}_{AB}^1 = \{J_j \in \mathcal{J}_{AB} \mid |a_j| < |b_j|\}$ и $\mathcal{J}_{AB}^2 = \{j \in \mathcal{J}_{AB} \mid |a_j| \geqslant |b_j|\}$.

• Среди работ из $\mathcal{J}_{AB}^1$ выбирается такая работа $J_k$, что $|b_k| \geqslant |a_j|$ при всех $J_j \in \mathcal{J}_{AB}^1$.

• Среди работ из $\mathcal{J}_{AB}^2$ выбирается такая работа $J_l$, что $|a_l| \geqslant |b_j|$ при всех $J_j \in \mathcal{J}_{AB}^2$. Работы $J_k$ и $J_l$, а также их операции далее будут называться *особыми*.

• Дальнейшая работа алгоритма разделяется на два случая (A и B) в зависимости от выполнения или невыполнения неравенства

$$\sum_{J_j \in \mathcal{J}_{AB}^1} |b_j| - \sum_{J_j \in \mathcal{J}_{AB}^1} |a_j| + |a_k| \geqslant \sum_{J_j \in \mathcal{J}_{AB}^2} |a_j| - \sum_{J_j \in \mathcal{J}_{AB}^2} |b_j| + |b_l|. \quad (3)$$

**Случай A** (неравенство (3) выполнено).

Находится расписание, в котором на каждой машине работы выполняются в порядке

$$J_k \to \mathcal{J}_{AB}^1 \setminus \{J_k\} \to \mathcal{J}_{AB}^2 \setminus \{J_l\} \to J_l;$$

при этом операции каждой работы $J_j \in \mathcal{J}_{AB}$ выполняются в порядке $A \to B$, т. е. сначала выполняется операция $a_j$, а затем — операция $b_j$.

**Случай B** (неравенство (3) не выполнено).

Находится расписание, в котором на каждой машине работы выполняются в порядке

$$J_l \to \mathcal{J}_{AB}^2 \setminus \{J_l\} \to \mathcal{J}_{AB}^1 \setminus \{J_k\} \to J_k;$$

при этом операции каждой работы $J_j \in \mathcal{J}_{AB}$ выполняются в порядке $B \to A$.

Алгоритм $H$ описан.

В полученном расписании самую первую работу и первую ее операцию будем называть *ведущими*. В случае A это работа $J_k$ и операция $a_k$, а в случае B — работа $J_l$ и операция $b_l$.

Для каждого множества $\mathcal{J}_{AB}$, $\mathcal{J}_{BC}$, $\mathcal{J}_{AC}$ найдем расписание с помощью алгоритма $H$. Полученные расписания будем обозначать соответственно через $S_\gamma^H$, $S_\alpha^H$ и $S_\beta^H$. Блоки операций на машинах $A$ и $B$ в расписании $S_\gamma^H$ будем обозначать через $A_\gamma$ и $B_\gamma$. Аналогично блоки операций в расписании $S_\alpha^H$ будем обозначать через $B_\alpha$ и $C_\alpha$, а в расписании $S_\beta^H$ — через $A_\beta$ и $C_\beta$. Для каждого блока $X$ определим *инвертированный* блок $\overline{X}$, в котором то же множество операций выполняется в обратном порядке. Через $j(\gamma), j(\alpha), j(\beta)$ будем обозначать номера ведущих работ из множеств $\mathcal{J}_{AB}$, $\mathcal{J}_{BC}$ и $\mathcal{J}_{AC}$ соответственно. Множества

$\mathcal{J}_{AB}$, $\mathcal{J}_{BC}$, $\mathcal{J}_{AC}$ и блоки $A_z, B_z, C_z$ ($z \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$) без ведущих работ будем обозначать соответственно через $\mathcal{J}'_{AB}$, $\mathcal{J}'_{BC}$, $\mathcal{J}'_{AC}$ и $A'_z, B'_z, C'_z$.

Сформулируем свойство блоков, построенных с помощью алгоритма $H$, на примере множества работ $\mathcal{J}_{XY}$, где $X, Y \in \{A, B, C\}$.

**Лемма 1.** *Пусть в расписании $S_z^H$ для работ из множества $\mathcal{J}_{XY}$ ведущая операция выполняется на машине $X$, и пусть некоторое расписание $S$ для работ из $\mathcal{J}$ содержит блоки $X'_z$ и $Y_z$, причем блок $X'_z$ начинается не позже блока $Y_z$. Тогда расписание $S$ допустимо относительно блоков $X'_z$ и $Y'_z$. Если при этом $S$ содержит блок $X_z$, то $S$ допустимо относительно всех работ из $\mathcal{J}_{XY}$.*

*Симметрично: пусть расписание $S$ содержит блоки $\overline{X}'_z$ и $\overline{Y}_z$, причем блок $\overline{X}'_z$ заканчивается не раньше блока $\overline{Y}_z$. Тогда расписание $S$ допустимо относительно блоков $\overline{X}'_z$ и $\overline{Y}'_z$; при этом если $S$ содержит целый блок $\overline{X}_z$, то $S$ допустимо относительно всех работ из $\mathcal{J}_{XY}$.*

Справедливость леммы непосредственно вытекает из описания алгоритма $H$.

Для удобства доказательства формулируемой ниже теоремы 1 без ограничения общности можем считать, что **нагрузка каждой машины равна** $L_{\max}$. В противном случае, если, например, нагрузки $L_A$ и $L_B$ на машинах $A$ и $B$ меньше нагрузки $L_C = L_{\max}$ на машине $C$, их можно увеличить до $L_{\max}$ (без изменения величин $L_{\max}$ и $p_{\max}$) за счет, во-первых, добавления новых (фиктивных) работ с операциями нулевой длины и, во-вторых, увеличения длительностей операций, выполняемых на $A$ и $B$. Ясно, что искомое увеличение длительностей операций, дающее равенство $L_X = L_{\max} = L_C$, всегда существует, если число операций на машине $X$ не меньше числа операций на машине $C$. Добавив в каждое множество $\mathcal{J}_{XY}$ по $|\mathcal{J}_{XZ}| + |\mathcal{J}_{YZ}|$ фиктивных работ, получим одинаковое количество операций на всех машинах (общее число работ при этом утроится), что позволит добиться равенства $L_X = L_{\max}$ за счет увеличения длительностей операций, выполняемых на машине $X$.

## 2. Основной результат

**Теорема 1.** *Для задачи $O3|op = 2|C_{\max}$ существует алгоритм временной сложности $O(n)$, который находит оптимальное расписание для любого входа задачи, удовлетворяющего условию 1. При этом длина оптимального расписания равна $L_{\max}$.*

Доказательство. Работа алгоритма построения оптимального расписания начинается с построения расписаний $S_\gamma^H, S_\alpha^H$ и $S_\beta^H$ для работ из множеств $\mathcal{J}_{AB}, \mathcal{J}_{BC}$ и $\mathcal{J}_{AC}$. В процессе построения этих расписаний находятся ведущие операции в каждом из трех подмножеств

работ. При этом возможны два принципиально различных случая: *случай* (1+1+1), когда на каждой машине имеется ровно по одной ведущей операции, и *случай* (2+1+0), когда одна машина имеет две ведущие операции, другая — одну и третья машина не имеет ведущей операции.

В случае (1+1+1) без ограничения общности можем считать, что ведущая операция, выполняемая на машине $A$, принадлежит работе из множества $\mathscr{J}_{AB}$, ведущая операция на машине $B$ принадлежит работе из $\mathscr{J}_{BC}$, а ведущая операция на машине $C$ — работе из $\mathscr{J}_{AC}$. Этого соответствия всегда можно добиться подходящим переименованием машин.

В случае (2+1+0) без ограничения общности можем считать, что две ведущие операции выполняются на машине $A$, а одна ведущая операция — на машине $B$. (Следовательно, на машине $C$ нет ведущих операций.)

В процессе работы алгоритма будут строиться расписания $S_i$ (или $\widetilde{S}_i$), каждое из которых представляет собой приоритетную укладку операций. Для задания такого расписания достаточно указать порядок выполнения операций на каждой машине, после чего делается проверка расписания на допустимость с учетом условия (1). Если укладка допустима, то она является искомым оптимальным расписанием длины $L_{\max}$. Если же находится условие, при котором данная укладка недопустима, то строится следующая приоритетная укладка, и так далее. Показывается, что в каждом рассматриваемом случае одна из не более чем пяти строящихся приоритетных укладок дает искомое оптимальное расписание.

### 2.1. Случай (1+1+1)

Определяем укладку $\widetilde{S}_0$, в которой операции выполняются следующим образом.

$$\widetilde{S}_0 \qquad \begin{array}{ll} A: & a_{j(\gamma)} \to A'_\gamma \to A_\beta \\ B: & b_{j(\alpha)} \to B'_\alpha \to B_\gamma \\ C: & c_{j(\beta)} \to C'_\beta \to C_\alpha \end{array}$$

Рассмотрим несколько подслучаев.

**Подслучай 1.1.** $|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|$, $|C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|$, $|A_\gamma| \geqslant |c_{j(\beta)}|$.

В силу указанных неравенств в приоритетной укладке $\widetilde{S}_0$ блок $A'_\gamma$ начинается не позже блока $B_\gamma$, блок $B'_\alpha$ — не позже блока $C_\alpha$, а блок $C'_\beta$ — не позже $A_\beta$. Поэтому по лемме 1 укладка $\widetilde{S}_0$ допустима относительно всех работ $J_j \in \mathscr{J}$.

**Подслучай 1.2.** $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|$, $|C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|$, $|A_\gamma| \geqslant |c_{j(\beta)}|$.

Допустимость укладки $\widetilde{S}_0$ нарушается только между блоками операций $A_\gamma$ и $B_\gamma$ (в частности, для операций работы $j(\gamma)$). Поэтому используем следующую приоритетную укладку $\widetilde{S}_1$.

$$\widetilde{S}_1 \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to A_\beta \to a_{j(\gamma)} \\ B: & B_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \\ C: & c_{j(\beta)} \to C'_\beta \to C_\alpha \end{array}$$

Как и в подслучае 1.1, допустимость $\widetilde{S}_1$ относительно работ из $\mathscr{J}_{BC}$ (в блоках $B_\alpha$ и $C_\alpha$) вытекает из соотношения $|C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|$.

Блок $A'_\gamma$ в укладке $\widetilde{S}_1$ начинается не позже блока $B_\gamma$. Поэтому по лемме 1 укладка $\widetilde{S}_1$ допустима относительно работ из $\mathscr{J}_{AB} \setminus \{j(\gamma)\}$.

Если предположить, что произошло нарушение допустимости по работе $j(\gamma)$, то получим $L_{\max} < |B_\alpha| + |b_{j(\gamma)}| + |a_{j(\gamma)}| < 3p_{\max}$ (в силу $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|$), что противоречит (1). Следовательно, $\widetilde{S}_1$ допустима относительно работы $j(\gamma)$.

Осталась возможность нарушения допустимости укладки $\widetilde{S}_1$ по блокам $C_\beta$ и $A_\beta$. Это произойдет, если и только если

$$|A'_\gamma| < |c_{j(\beta)}|. \tag{4}$$

Для этой ситуации строим приоритетную укладку $\widetilde{S}_2$, отличающуюся от $\widetilde{S}_1$ тем, что операция $c_{j(\beta)}$ переносится в конец расписания.

$$\widetilde{S}_2 \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to A'_\beta \to a_{j(\gamma)} \\ B: & B_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \\ C: & C'_\beta \to C_\alpha \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

Расположение блоков $A'_\gamma$ и $B'_\gamma$ и операций $a_{j(\gamma)}$ и $b_{j(\gamma)}$ остается таким же, как в укладке $\widetilde{S}_1$, и, следовательно, допустимо. Расположение блоков $A'_\beta$ и $C'_\beta$ не влечет недопустимости укладки $\widetilde{S}_2$ по лемме 1.

Если предположить, что укладка $\widetilde{S}_2$ недопустима по работе $j(\beta)$, то с учетом (4) получим $L_{\max} < |A'_\gamma| + |a_{j(\beta)}| + |c_{j(\beta)}| < 3p_{\max}$, что противоречит (1).

Из-за переноса операции $c_{j(\beta)}$ появилась возможность нарушения допустимости укладки $\widetilde{S}_2$ по операциям блоков $C_\alpha$ и $B_\alpha$. Это может произойти в случае, когда

$$|C'_\beta| < |b_{j(\alpha)}|. \tag{5}$$

Для этой ситуации строим следующую приоритетную укладку $\widetilde{S}_3$.

$$\widetilde{S}_3 \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to A'_\beta \to a_{j(\gamma)} \\ B: & B'_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to b_{j(\alpha)} \\ C: & C'_\beta \to c_{j(\alpha)} \to C'_\alpha \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

Допустимость укладки $\widetilde{S}_3$ относительно пар блоков $\{A'_\gamma, B'_\gamma\}$, $\{B'_\alpha, C'_\alpha\}$ и $\{A'_\beta, C'_\beta\}$ следует из леммы 1, а для работ $j(\gamma), j(\alpha), j(\beta)$ — из соотношений $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|$, (4), (5) и (1). Таким образом, в подслучае 1.2 одна из укладок $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{S}_3$ является допустимой.

Подслучаи $\{|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|,\ |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|,\ |A_\gamma| \geqslant |c_{j(\beta)}|\}$ и $\{|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|,\ |C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|, |A_\gamma| < |c_{j(\beta)}|\}$ рассматриваются аналогично.

**Подслучай 1.3.** $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|, |C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|, |A_\gamma| < |c_{j(\beta)}|$.

При выполнении (5) в качестве искомого расписания берем укладку $\widetilde{S}_3$. В противном случае допустима укладка $\widetilde{S}_2$.

Подслучаи $\{|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|,\ |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|,\ |A_\gamma| < |c_{j(\beta)}|\}$ и $\{|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|,\ |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|, |A_\gamma| \geqslant |c_{j(\beta)}|\}$ рассматриваются аналогично.

**Подслучай 1.4.** $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|, |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|, |A_\gamma| < |c_{j(\beta)}|$.

Расписание $\widetilde{S}_3$ является искомым.

## 2.2. Случай (2+1+0)

Определяем укладку $S_0$, в которой операции выполняются следующим образом.

$$S_0 \qquad \begin{array}{rl} A: & a_{j(\gamma)} \to A'_\gamma \to \overline{A}'_\beta \to a_{j(\beta)} \\ B: & b_{j(\alpha)} \to B'_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \\ C: & \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \to c_{j(\alpha)} \to C'_\alpha \end{array}$$

**Подслучай 2.1.**

$$|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|, |C_\alpha| \geqslant |a_{j(\beta)}|, |C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|. \tag{6}$$

Неравенства (6) обеспечивают соблюдение условий леммы 1 и допустимость укладки $S_0$ по отношению к работам из множеств $\mathscr{J}_{AB}, \mathscr{J}_{BC}$ и $\mathscr{J}_{AC}$.

Далее рассматриваются подслучаи, когда из трех неравенств (6) хотя бы одно не выполняется (что влечет недопустимость укладки $S_0$). Так как из (1) и соотношения $L_{\max} = C_\alpha + C_\beta$ следует невозможность одновременного выполнения неравенств

$$|C_\alpha| < |a_{j(\beta)}|, |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|,$$

то из семи возможных комбинаций нарушения неравенств (6) реализуемы только пять, рассматриваемых ниже.

**Подслучай 2.2.** $|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|, |C_\alpha| \geqslant |a_{j(\beta)}|, |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|$.

Вследствие $|C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|$ укладка $S_0$ недопустима. Поэтому строим следующую приоритетную укладку $S_1$ (она отличается от $S_0$ тем, что

операция $b_{j(\alpha)}$ переносится в конец расписания).

$$S_1 \qquad \begin{array}{ll} A: & a_{j(\gamma)} \to A'_\gamma \to \overline{A}'_\beta \to a_{j(\beta)} \\ B: & B'_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to b_{j(\alpha)} \\ C: & \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \to c_{j(\alpha)} \to C'_\alpha \end{array}$$

В силу $|C_\alpha| \geqslant |a_{j(\beta)}|$ укладка $S_1$ допустима относительно работ из $\mathcal{J}_{AC}$. Поскольку блок $B'_\alpha$ начинается не позже чем $C_\alpha$, по лемме 1 укладка $S_1$ допустима относительно блоков $B'_\alpha, C'_\alpha$. В предположении недопустимости укладки $S_1$ относительно операций работы $j(\alpha)$ получаем $L_{\max} < |C_\beta| + |c_{j(\alpha)}| + |b_{j(\alpha)}| < 3p_{\max}$ (в силу $|C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|$), что противоречит (1).

Остается проверить $S_1$ на допустимость относительно блоков $A_\gamma, B_\gamma$. Если $|B'_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|$, то укладка $S_1$ допустима относительно $A_\gamma, B_\gamma$ по лемме 1. Пусть выполнено неравенство

$$|B'_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|. \tag{7}$$

В этом случае строим приоритетную укладку $S_2$, в которой по сравнению с $S_1$ операция $a_{j(\gamma)}$ перенесена в конец.

$$S_2 \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to \overline{A}'_\beta \to a_{j(\beta)} \to a_{j(\gamma)} \\ B: & B'_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to b_{j(\alpha)} \\ C: & \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \to c_{j(\alpha)} \to C'_\alpha \end{array}$$

Если предположить, что блок $\overline{A}'_\beta$ заканчивается в $S_2$ раньше блока $\overline{C}_\beta$, то с учетом неравенства $|C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|$ получим $L_{\max} < |C_\beta| + |a_{j(\beta)}| + |a_{j(\gamma)}| < 3p_{\max}$, что противоречит (1). Следовательно, по лемме 1 укладка $S_2$ допустима относительно работ из $\mathcal{J}_{AC}$.

Расположение блоков $A'_\gamma, B'_\gamma, B'_\alpha, C'_\alpha$ также удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому укладка $S_2$ допустима относительно работ из множеств $\mathcal{J}'_{AB}, \mathcal{J}'_{BC}$.

Наконец, допустимость укладки $S_2$ относительно работ $j(\alpha)$ и $j(\gamma)$ следует из соотношений $|C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|$, (7) и (1).

**Подслучай 2.3.**

$$|B_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|, \ |C_\alpha| < |a_{j(\beta)}|, \ |C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|. \tag{8}$$

Строим приоритетную укладку $S_3$, отличающуюся от $S_0$ расположением операций $a_{j(\beta)}$ и $c_{j(\beta)}$.

$$S_3 \qquad \begin{array}{ll} A: & a_{j(\gamma)} \to A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to \overline{A}'_\beta \\ B: & b_{j(\alpha)} \to B'_\alpha \to B_\gamma \\ C: & \overline{C}'_\beta \to C_\alpha \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

Поскольку для блоков $A_\gamma, B_\gamma$ с учетом первого неравенства из (8) выполнены условия леммы 1, укладка $S_3$ допустима относительно работ

из $\mathcal{J}_{AB}$. Так как из (1) и второго неравенства из (8) имеем $|\overline{C}'_\beta| = L_{\max} - |C_\alpha| - |c_{j(\beta)}| > p_{\max} \geqslant |b_{j(\alpha)}|$, то по лемме 1 укладка $S_3$ допустима относительно работ из $\mathcal{J}_{BC}$. Для операций из блоков $\overline{A}'_\beta$ и $\overline{C}'_\beta$ укладка $S_3$ также допустима по лемме 1. (Хотя в $S_3$ не содержится в явном виде блок $\overline{C}_\beta$, условия леммы 1 выполнятся, если операцию $c_{j(\beta)}$ поставить сразу после $\overline{C}'_\beta$. Но так как перестановка этой операции не влияет на расположение блоков $\overline{A}'_\beta$ и $\overline{C}'_\beta$, то ясно, что их расположение в укладке $S_3$ также допустимо.) Осталось рассмотреть возможность недопустимости укладки $S_3$ по работе $j(\beta)$.

Если $|A'_\beta| \geqslant |c_{j(\beta)}|$, то интервалы выполнения операций работы $j(\beta)$ не пересекаются. Следовательно, укладка $S_3$ допустима. Пусть далее

$$|A'_\beta| < |c_{j(\beta)}|. \tag{9}$$

Для этой ситуации строим следующую приоритетную укладку $S_4$.

$$S_4 \qquad \begin{array}{rl} A: & a_{j(\gamma)} \to a_{j(\beta)} \to \overline{A}'_\gamma \to \overline{A}'_\beta \\ B: & \overline{B}'_\gamma \to \overline{B}'_\alpha \to b_{j(\alpha)} \to b_{j(\gamma)} \\ C: & \overline{C}_\alpha \to \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

В укладке $S_4$ блок $\overline{B}'_\alpha$ заканчивается не раньше блока $\overline{C}_\alpha$. (В противном случае имеем $L_{\max} < |\overline{C}_\alpha| + |b_{j(\alpha)}| + |b_{j(\gamma)}| < 3p_{\max}$, что противоречит (1).) Следовательно, для блоков $\overline{B}_\alpha, \overline{C}_\alpha$ выполнены условия леммы 1 и укладка $S_4$ допустима для работ из $\mathcal{J}_{BC}$. Допустимость укладки $S_4$ для работ из $\mathcal{J}'_{AC}$ непосредственно следует из леммы 1, а для работ $j(\beta)$ и $j(\gamma)$ — из (1). Остается проверить допустимость $S_4$ для работ из $\mathcal{J}'_{AB}$.

Если $|B_\alpha| = |\overline{B}'_\alpha| + |b_{j(\alpha)}| \geqslant |A'_\beta|$, то по лемме 1 укладка $S_4$ допустима для работ из $\mathcal{J}'_{AB}$. (Действительно, условия леммы 1 выполнятся для блоков $\overline{A}'_\gamma$ и $\overline{B}_\gamma$, если переставить местами $\overline{B}_\alpha$ и $b_{j(\gamma)}$. Но так как эта перестановка не меняет расположения блоков $\overline{A}'_\gamma$ и $\overline{B}'_\gamma$, то укладка $S_4$ также допустима относительно блоков $\overline{A}'_\gamma$ и $\overline{B}'_\gamma$.) Далее предполагаем, что

$$|B_\alpha| < |A'_\beta| < |c_{j(\beta)}|. \tag{10}$$

Строим приоритетную укладку $S_5$.

$$S_5 \qquad \begin{array}{rl} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to a_{j(\gamma)} \to \overline{A}'_\beta \\ B: & b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to \overline{B}_\alpha \\ C: & \overline{C}_\alpha \to \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

Для блоков $\overline{A}'_\beta, \overline{C}'_\beta, A'_\gamma, B'_\gamma$ укладка $S_5$ допустима по лемме 1. Блоки $\overline{C}_\alpha$ и $\overline{B}_\alpha$ просто не пересекаются в силу (8), (10) и (1). Из недопустимости $S_5$

по работе $j(\gamma)$ с учетом (9) следует $L_{\max} < |b_{j(\gamma)}| + |a_{j(\gamma)}| + |A'_\beta| < 3p_{\max}$, что противоречит (1). Таким образом, недопустимость $S_5$ возможна лишь по работе $j(\beta)$ при выполнении неравенства

$$|A'_\beta| + |a_{j(\gamma)}| < |c_{j(\beta)}|. \tag{11}$$

Напомним, что согласно алгоритму $H$ в каждом блоке $A'_\gamma, B'_\gamma$ работы выполняются в таком порядке $j(\gamma,1),\ldots,j(\gamma,s)$, что сначала выполняются работы из множества $\mathscr{J}^1_{AB} = \{J_{j(\gamma)}, J_{j(\gamma,1)}, J_{j(\gamma,2)},\ldots,J_{j(\gamma,k)}\}$ со свойством $|a_j| < |b_j|$, а затем — работы из $\mathscr{J}^2_{AB} = \{J_{j(\gamma,k+1)}, J_{j(\gamma,k+2)}, \ldots, J_{j(\gamma,s)}\}$ со свойством $|a_j| \geqslant |b_j|$.

Найдем наибольшее $l$ такое, что

$$\sum_{i=l+1}^{s} |a_{j(\gamma,i)}| + |a_{j(\gamma)}| + |\overline{A}'_\beta| \geqslant |c_{j(\beta)}|, \tag{12}$$

после чего из операций работ $J_j \in \mathscr{J}^3 \doteq \{J_{j(\gamma,1)},\ldots,J_{j(\gamma,l)}\}$, взятых в этом порядке, сформируем блоки $A^3_\gamma$ и $B^3_\gamma$, а из операций работ $J_j \in \mathscr{J}^4 \doteq \{J_{j(\gamma,l+1)},\ldots,J_{j(\gamma,s)}\}$ — блоки $A^4_\gamma$ и $B^4_\gamma$. Согласно выбору номера $l$ имеем

$$|A^4_\gamma| + |a_{j(\gamma)}| + |\overline{A}'_\beta| < 2p_{\max}. \tag{13}$$

Построим укладку $S_6$, отличающуюся от $S_5$ расположением операции $a_{j(\beta)}$ и операций работ из $\mathscr{J}_{AB}$.

$$S_6 \quad \begin{array}{ll} A: & A^3_\gamma \to a_{j(\beta)} \to \overline{A}^4_\gamma \to a_{j(\gamma)} \to \overline{A}'_\beta \\ B: & \overline{B}^4_\gamma \to b_{j(\gamma)} \to B^3_\gamma \to \overline{B}_\alpha \\ C: & \overline{C}_\alpha \to \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \end{array} \quad \bullet$$

Из (12) следует, что укладка $S_6$ допустима относительно работы $j(\beta)$. Допустимость $S_6$ относительно блоков $\overline{C}_\alpha, \overline{B}_\alpha, \overline{A}'_\beta, \overline{C}'_\beta, A^3_\gamma, B^3_\gamma$ вытекает из допустимости $S_5$ относительно этих же блоков (отличие состоит в том, что по сравнению с $S_5$ в $S_6$ блок $B^3_\gamma$ сдвинут вправо, что не может нарушить допустимости.)

Для доказательства допустимости $S_6$ относительно блоков $\overline{A}^4_\gamma \oplus a_{j(\gamma)}$ и $\overline{B}^4_\gamma \oplus b_{j(\gamma)}$ достаточно убедиться, что выполняются условия леммы 1. Поскольку множество работ $\mathscr{J}^1_{AB}$ представлено в этих блоках не полностью, нельзя утверждать, что работа $j(\gamma)$ является особой для множества работ $\hat{\mathscr{J}}^4 \doteq \mathscr{J}^4 \cup \{J_{j(\gamma)}\}$. Возможны два варианта особой работы: $j(\gamma)$ и $j(\gamma,s)$. Поэтому для доказательства допустимости укладки $S_6$ относительно работ из $\hat{\mathscr{J}}^4$ достаточно убедиться в справедливости двух симметричных утверждений:

1) блок $\overrightarrow{A}^4_\gamma$ начинается не раньше окончания операции $b_{j(\gamma,s)}$, которая выполняется первой на машине $B$;

2) операция $b_{j(\gamma)}$ заканчивается не позже начала операции $a_{j(\gamma)}$.

Первое утверждение вытекает из (13) и (1).

Для доказательства второго утверждения достаточно убедиться, что

$$|\overrightarrow{B}^4_\gamma| + |b_{j(\gamma)}| + |a_{j(\gamma)}| + |\overrightarrow{A}'_\beta| \leqslant L_{\max}. \tag{14}$$

Если $|\overrightarrow{B}^4_\gamma| \leqslant |\overrightarrow{A}^4_\gamma|$, то (14) вытекает из (13) и (1).

Пусть $|\overrightarrow{B}^4_\gamma| > |\overrightarrow{A}^4_\gamma|$. Тогда $\mathscr{J}^4$ содержит **все** работы из $\mathscr{J}^2_{AB}$ и непустое подмножество работ из $\mathscr{J}^1_{AB}$. Таким образом, $\mathscr{J}^3$ содержит только работы из $\mathscr{J}^1_{AB}$, откуда

$$|A^3_\gamma| < |B^3_\gamma|. \tag{15}$$

Предполагаем также, что (14) не выполнено (иначе укладка $S_6$ допустима). Тогда

$$|B^3_\gamma| + |\overline{B}_\alpha| < |a_{j(\gamma)}| + |\overrightarrow{A}'_\beta| \doteq y. \tag{16}$$

Пусть $j^* \doteq j(\gamma, l+1)$. По выбору номера $l$ удаление операции $a_{j^*}$ из блока $\overrightarrow{A}^4_\gamma$ приводит к нарушению неравенства (12). Иначе говоря, справедливо неравенство

$$|\overrightarrow{A}^4_\gamma| - |a_{j^*}| + y < |c_{j(\beta)}|. \tag{17}$$

Предположим, что выполнено неравенство

$$|a_{j^*}| + y \leqslant |c_{j(\beta)}|. \tag{18}$$

Сложив неравенства (15)–(18) с неравенством $|a_{j(\beta)}| \leqslant |a_{j(\beta)}|$, получим

$$|A^3_\gamma| + |a_{j(\beta)}| + |\overrightarrow{A}^4_\gamma| + y = L_{\max} < 2|c_{j(\beta)}| + |a_{j(\beta)}| \leqslant 3p_{\max},$$

что противоречит (1). Таким образом, предположение (18) неверно. Следовательно,

$$|a_{j^*}| + y > |c_{j(\beta)}|. \tag{19}$$

Через $A''_\gamma, B''_\gamma$ обозначим блоки $A'_\gamma, B'_\gamma$ за вычетом операций $a_{j^*}$ и $b_{j^*}$. Построим укладку $S_7$, получающуюся из $S_5$ перемещением операций $a_{j^*}$ и $b_{j^*}$.

$$S_7 \qquad \begin{array}{ll} A: & A''_\gamma \to a_{j(\beta)} \to a_{j^*} \to a_{j(\gamma)} \to \overrightarrow{A}'_\beta \\ B: & b_{j^*} \to b_{j(\gamma)} \to B''_\gamma \to \overline{B}_\alpha \\ C: & \overline{C}_\alpha \to \overrightarrow{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

Из (19) следует допустимость укладки $S_7$ относительно работы $j(\beta)$. Допустимость $S_7$ относительно блоков $A''_\gamma, B''_\gamma$ следует из допустимости

$S_5$ относительно блоков $A'_\gamma, B'_\gamma$. Наконец, допустимость $S_7$ относительно работы $j^*$ вытекает из (11) и (1).

Таким образом, в подслучае 2.3 одна из пяти укладок $S_3 - S_7$ является допустимой.

**Подслучай 2.4.** $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|, |C_\alpha| \geqslant |a_{j(\beta)}|, |C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|$.

Строим приоритетную укладку $S_8$.

$$S_8 \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to a_{j(\gamma)} \to \overline{A}'_\beta \\ B: & b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to \overline{B}_\alpha \\ C: & \overline{C}_\alpha \to \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

Укладка $S_8$ допустима относительно блоков $A'_\gamma, B'_\gamma, \overline{A}'_\beta, \overline{C}'_\beta$ по лемме 1. Так как $|C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|$, то условия леммы 1 выполнены также для блоков $B_\alpha, C_\alpha$. Таким образом, допустимость укладки $S_8$ может нарушаться либо по работе $j(\beta)$ в случае

$$|a_{j(\gamma)}| + |A'_\beta| < |c_{j(\beta)}|, \tag{20}$$

либо по работе $j(\gamma)$ в случае

$$|a_{j(\beta)}| + |A'_\gamma| < |b_{j(\gamma)}|. \tag{21}$$

Одновременное выполнение (20) и (21) невозможно ввиду (1).

Сначала предположим, что выполнено (20). Строим следующую укладку $S_9$.

$$S_9 \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\gamma)} \to \overline{A}'_\beta \to a_{j(\beta)} \\ B: & b_{j(\gamma)} \to b_{j(\alpha)} \to B'_\gamma \to \overline{B}'_\alpha \\ C: & \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \to \overline{C}'_\alpha \to a_{j(\alpha)} \end{array}$$

По лемме 1 укладка $S_9$ допустима для блоков $A'_\gamma, B'_\gamma, \overline{B}'_\alpha, \overline{C}'_\alpha$, а с учетом неравенства $|C_\alpha| \geqslant |a_{j(\beta)}|$ — и для блоков $\overline{A}_\beta, \overline{C}_\beta$. Допустимость укладки относительно работы $j(\alpha)$ следует из (1), а относительно работы $j(\gamma)$ — из (1) и (20). Таким образом, укладка $S_9$ полностью допустима.

Далее предполагаем выполненным (21). Строим приоритетную укладку $S_{10}$.

$$S_{10} \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to \overline{A}'_\beta \to a_{j(\gamma)} \\ B: & b_{j(\alpha)} \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to \overline{B}'_\alpha \\ C: & \overline{C}'_\beta \to \overline{C}'_\alpha \to c_{j(\alpha)} \to c_{j(\beta)} \end{array}$$

По лемме 1 укладка $S_{10}$ допустима относительно блоков $A'_\gamma, B'_\gamma, \overline{B}'_\alpha, \overline{C}'_\alpha$. Допустимость $S_{10}$ по работам $j(\gamma)$, $j(\alpha)$ и $j(\beta)$ следует из (1) и (21). Наконец, если $|C_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|$, то условия леммы 1 выполняются для блоков $\overline{A}'_\beta, \overline{C}'_\beta$, что делает укладку $S_{10}$ полностью допустимой. Таким образом,

недопустимость $S_{10}$ возможна лишь по работам из $\mathscr{J}'_{AC}$ при выполнении неравенства

$$|C_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|. \tag{22}$$

Пусть в блоках $A'_\beta, C'_\beta$ работы выполняются в порядке $\{J_{j(\beta,1)}, \dots, J_{j(\beta,s)}\}$. Находим наибольший номер $f \leqslant s$ такой, что

$$\sum_{i=f+1}^{s} |c_{j(\beta,i)}| + |C_\alpha| \geqslant |a_{j(\gamma)}|. \tag{23}$$

Ввиду (1) такое $f$ всегда существует, а из (22) следует, что $f < s$. Из операций работ $J_j \in \mathscr{J}^3 \doteq \{J_{j(\beta,1)}, \dots, J_{j(\beta,f)}\}$, взятых в этом порядке, формируем блоки $A^3_\beta$ и $C^3_\beta$, а из операций работ $J_j \in \mathscr{J}^4 \doteq \{J_{j(\beta,f+2)}, \dots, J_{j(\beta,s)}\}$ — блоки $A^4_\beta$ и $C^4_\beta$. Строим укладку $S_{11}$.

$$S_{11} \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to a_{j(\beta,f+1)} \to A^4_\beta \to \overline{A}^3_\beta \to a_{j(\gamma)} \\ B: & B_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \\ C: & \overline{C}^3_\beta \to c_{j(\beta)} \to c_{j(\beta,f+1)} \to C^4_\beta \to C_\alpha \end{array}$$

Как и в случае укладки $S_{10}$, легко устанавливается допустимость укладки $S_{11}$ относительно блоков $B_\alpha, C_\alpha, A'_\gamma, B'_\gamma$ и работы $j(\gamma)$. Кроме того, из (23) следует, что для блоков $\overline{C}^3_\beta, \overline{A}^3_\beta$ выполняются условия леммы 1 и, следовательно, $S_{11}$ допустимо относительно этих блоков. По выбору $f$ имеем

$$|C^4_\beta| + |C_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|. \tag{24}$$

Из (24) следует, что $S_{11}$ допустимо относительно блоков $A^4_\beta, C^4_\beta$, поскольку блок $C^4_\beta$ покрывается интервалом выполнения операции $a_{j(\gamma)}$. Таким образом, нарушение допустимости укладки $S_{11}$ возможно лишь по двум работам: $j(\beta)$ и $j(\beta, f+1)$.

Пусть укладка $S_{11}$ недопустима по работе $j(\beta)$. Отсюда следует, что

$$|\overline{C}^3_\beta| < |a_{j(\beta)}| + |A'_\gamma|. \tag{25}$$

Строим приоритетную укладку $S_{12}$.

$$S_{12} \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to A^4_\beta \to \overline{A}^3_\beta \to a_{j(\gamma)} \to a_{j(\beta,f+1)} \\ B: & b_{j(\gamma)} \to B_\alpha \to B'_\gamma \\ C: & \overline{C}^3_\beta \to c_{j(\beta,f+1)} \to c_{j(\beta)} \to C^4_\beta \to C_\alpha \end{array}$$

По лемме 1 укладка $S_{12}$ допустима относительно блоков $A'_\gamma, B'_\gamma$. Допустимость $S_{12}$ относительно блоков $B_\alpha, C_\alpha$ следует из (1), (22) и неравенства $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|$; относительно работы $j(\gamma)$ — из (1); относительно работы $j(\beta, f+1)$ — из (1), (25) и (21); относительно работы $j(\beta)$ —

из (1), (21) и (24); относительно блоков $A^4_\beta, C^4_\beta$ — из (24); относительно блоков $\overline{C}^3_\beta, \overline{A}^3_\beta$ — из (25). Таким образом, укладка $S_{12}$ допустима.

Теперь рассмотрим случай, когда укладка $S_{11}$ недопустима по работе $j(\beta, f+1)$. Тогда с учетом (24) выполнено следующее неравенство:

$$|c_{j(\beta,f+1)}| > |A'_\beta| - |a_{j(\beta,f+1)}|. \tag{26}$$

Строим приоритетную укладку $S_{13}$.

$$S_{13} \quad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to a_{j(\beta)} \to a_{j(\beta,f+1)} \to a_{j(\gamma)} \to \overline{A}'_\beta \setminus \{a_{j(\beta,f+1)}\} \\ B: & b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to B_\alpha \\ C: & C_\alpha \to \overline{C}'_\beta \setminus \{c_{j(\beta,f+1)}\} \to c_{j(\beta)} \to c_{j(\beta,f+1)} \end{array}$$

Укладка $S_{13}$ допустима относительно блоков $A'_\gamma, B'_\gamma$ по лемме 1; относительно блоков $B_\alpha, C_\alpha$ — из 1 (поскольку длина каждого блока не превосходит $p_{\max}$); относительно работы $j(\gamma)$ — из (1) и (26); относительно работ $j(\beta)$ и $j(\beta, f+1)$ — из (1) и (21); наконец, относительно блоков $\overline{A}'_\beta \setminus \{a_{j(\beta,f+1)}\}$ и $\overline{C}'_\beta \setminus \{c_{j(\beta,f+1)}\}$ — из (26). Отсюда следует, что $S_{13}$ допустима по всем работам.

Таким образом, в подслучае 2.4 при выполнении неравенства (21) одна из четырех приоритетных укладок $S_{10} - S_{13}$ является допустимой.

**Подслучай 2.5.** $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|, |C_\alpha| < |a_{j(\beta)}|, |C_\beta| \geqslant |b_{j(\alpha)}|$.

Рассматриваем укладку $S_8$. Как и в подслучае 2.4, недопустимость укладки $S_8$ влечет выполнение одного из неравенств (20), (21).

При выполнении (21), как и в подслучае 2.4, показывается, что одна из трех приоритетных укладок $S_{11} - S_{13}$ является допустимой. (В рассмотрении укладки $S_{10}$ нет необходимости, так как неравенство $|C_\alpha| < p_{\max}$, использовавшееся в подслучае 2.4 для анализа последующих расписаний, в подслучае 2.5 дано изначально.)

Далее замечаем, что при построении расписаний $S_{11} - S_{13}$ блоки $B_\alpha$ и $C_\alpha$ участвуют целиком, причем в анализе этих расписаний используется лишь факт, что длины этих блоков не превосходят $p_{\max}$. Таким образом, становится несущественным, какая из операций $b_{j(\alpha)}, c_{j(\alpha)}$ является ведущей. Следовательно, рассматриваемая ситуация становится симметричной относительно машин $B$ и $C$. В частности, становятся симметричными условия (20) и (21). Отсюда следует, что если в случае (20) построить расписания $S'_{11} - S'_{13}$, аналогичные расписаниям $S_{11} - S_{13}$ (с точностью до взаимной замены машин $B$ и $C$ и работ $j(\beta)$ и $j(\gamma)$), то одно из этих трех расписаний будет допустимым, что завершает рассмотрение подслучая 2.5.

**Подслучай 2.6.** $|B_\alpha| < |a_{j(\gamma)}|, |C_\alpha| \geqslant |a_{j(\beta)}|, |C_\beta| < |b_{j(\alpha)}|$.
Строим следующую укладку $S_{14}$.

$$S_{14} \qquad \begin{array}{ll} A: & A'_\gamma \to \overline{A}'_\beta \to a_{j(\beta)} \to a_{j(\gamma)} \\ B: & B'_\alpha \to b_{j(\gamma)} \to B'_\gamma \to b_{j(\alpha)} \\ C: & \overline{C}'_\beta \to c_{j(\beta)} \to c_{j(\alpha)} \to C'_\alpha \end{array}$$

Укладка $S_{14}$ допустима относительно блоков $A'_\gamma, B'_\gamma, B'_\alpha, C'_\alpha$ по лемме 1, относительно блоков $\overline{A}_\beta, \overline{C}_\beta$ — по лемме 1 и условию $|C_\beta| < p_{\max}$. Из этого же условия и неравенства (1) следует допустимость укладки по работе $j(\alpha)$. Наконец, ее допустимость по работе $j(\gamma)$ следует из (1) и $|B_\alpha| < p_{\max}$. Таким образом, укладка $S_{14}$ допустима.

Тем самым рассмотрены все возможные варианты соотношений между параметрами входа рассматриваемой задачи. В каждом случае построено несколько приоритетных укладок и показано, что хотя бы одна из них является допустимым расписанием. Таким образом, во всех случаях эффективно строится оптимальное расписание длины $L_{\max}$. Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** *Минимальное число $\lambda_{\min}$, для которого соотношение $L_{\max} \geqslant \lambda_{\min} p_{\max}$ определяет нормальный класс входов задачи $O3|op = 2|C_{\max}$, равно* 3.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\lambda_{\min} \leqslant 3$. Пример, состоящий из трех работ с длительностями операций $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1 - \varepsilon$, $|b_1| = |b_2| = |c_3| = 1$, показывает, что коэффициент 3 в условии (1) является минимально возможным.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Каширских К. Н., Севастьянов С. В., Черных И. Д.** Четырехпараметрический анализ сложности задачи open shop // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 59–77.

2. **Севастьянов С. В.** Эффективное построение расписаний в системах открытого типа // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 20–42.

3. **Севастьянов С. В.** Нестрогое суммирование векторов на плоскости и его применение в задачах теории расписаний // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 2. С. 69–100.

4. **Chen B., Potts C. N., Woeginger G. J.** A review of machine scheduling: complexity, algorithms and approximability // Handbook of Combinatorial Optimization. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1998. V. 3. P. 21–169.

5. **Drobouchevitch I. G., Strusevich V. A.** A polynomial algorithm for the three-machine open shop with a bottleneck machine // Ann. Oper. Res. 1999. V. 92. P. 185–214.

6. **Gonzalez T., Sahni S.** Open shop scheduling to minimize finish time // J. Assoc. Comput. Mach. 1976. V. 23, N 4. P. 665–679.

7. **Kononov A., Sevastianov S., Tchernykh I.** When difference in machine loads leads to efficient scheduling in open shops // Ann. Oper. Res. 1999. V. 92. P. 211–239.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
24 апреля 2000 г.