ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2001. Серия 1. Том 8, № 2, 3–14

УДК 519.718

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСАХ $\{x \mid y\}, \{x \downarrow y\}$ ПРИ ОДНОТИПНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

М. А. Алехина

Показано, что любую булеву функцию в базисе $\{x \mid y\}$ при неисправностях типа 0 и в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 1 можно реализовать схемой с ненадежностью не более $2\gamma + 8\gamma^2 + 106\gamma^3$, где γ — вероятность неисправности каждого входа элемента, $\gamma \leqslant 1/100$; для любой булевой функции f, $f \not\equiv 1$, и любой схемы S, реализующей f, при $\gamma < 1/2$ ненадежность схемы не меньше $2\gamma - \gamma^2$; любую булеву функцию в базисе $\{x \mid y\}$ при неисправностях типа 1 и в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 0 можно реализовать схемой с ненадежностью не более $2\gamma^2 + 36\gamma^3 + 162\gamma^4$ при $\gamma \leqslant 1/50$; для любой булевой функции f, $f \not\equiv 0$, и любой схемы S, реализующей f, при $\gamma < 1/2$ ненадежность схемы не меньше γ^2.

Введение

Задача построения надежных схем из ненадежных элементов впервые рассматривалась Дж. Нейманом [4]. Он предполагал, что элементы подвержены таким неисправностям, когда функциональный элемент, реализующий в исправном состоянии булеву функцию $f(\tilde{x})$, в неисправном состоянии реализует функцию $\bar{f}(\tilde{x})$ (такие неисправности называются инверсными). Для построения надежных схем Дж. Нейман предложил итерационный метод, позволяющий при некотором ограничении на ε (вероятность неправильной работы элемента) с каждым шагом итерации уменьшать вероятность ошибки на выходе схемы, но при этом сложность схемы увеличивается примерно в 3 раза. Метод дает экспоненциальное увеличение сложности схемы (примерно в 3^k раз, где k — необходимое число итераций). В этом его главный недостаток, особенно при необходимости осуществления многократных итераций.

Эти же неисправности рассматривались затем в работах других авторов, например [5, 7]. Речь идет о реализации булевых функций

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00053).

схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном конечном базисе Ф [3]. Каждому элементу базиса приписано положительное число — вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что во всех элементах схемы независимым образом с вероятностью ε происходят сбои. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах. Вводится функция Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \min_S L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ с ненадежностью $P(S)$ не более p, а максимум — по всем булевым функциям f от n переменных.

С. И. Ортюков [5] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется для схем из ненадежных элементов при степенном убывании вероятности сбоев ε_n с ростом n. Ненадежность p_n схемы при этом такова, что $QL_g\varepsilon_n < p_n < 1/2$, где $Q > 1$, L_g — сложность реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе.

Для инверсных неисправностей, возникающих с вероятностью ε, Д. Улиг [7] показал, что асимптотика функции Шеннона для сложности схем сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к 1, вероятность сбоя ε ограничена константой. Ненадежность схемы при этом асимптотически не превосходит εL_g. Нижняя оценка ненадежности не приводится.

Упомянутые авторы решали задачу на минимум сложности реализации булевых функций, но при этом не рассматривали задачу на максимум надежности в классе инверсных неисправностей.

В данной работе речь идет о построении схем максимально высокой надежности из ненадежных функциональных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на входах.

Ниже рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисах $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$, где $x \mid y = \bar{x} \vee \bar{y}$ и $x \downarrow y = \bar{x} \& \bar{y}$ [3]. Схема реализует булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если при отсутствии неисправностей при поступлении на входы схемы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Все входы элементов схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния типа 0 (1). Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающий на вход нуль остается нулем, а поступающая на вход единица с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$) может превратиться в нуль. Аналогично определяются неисправности типа 1 на входах функциональных элементов.

Вероятности P_0 и P_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходах базисных элементов — приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

При неисправностях типа 0 на входах элементов

x	y	$x \mid y$	P_0	P_1	x	y	$x \downarrow y$	P_0	P_1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	$1-\gamma$	γ
1	0	1	0	1	1	0	0	$1-\gamma$	γ
1	1	0	$(1-\gamma)^2$	$2\gamma-\gamma^2$	1	1	0	$1-\gamma^2$	γ^2

Таблица 2

При неисправностях типа 1 на входах элементов

x	y	$x \mid y$	P_0	P_1	x	y	$x \downarrow y$	P_0	P_1
0	0	1	γ^2	$1-\gamma^2$	0	0	1	$2\gamma-\gamma^2$	$(1-\gamma)^2$
0	1	1	γ	$1-\gamma$	0	1	0	1	0
1	0	1	γ	$1-\gamma$	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Следовательно, надежность схемы равна $1-P(S)$.

Из приведенных таблиц следует, что схему сколь угодно высокой надежности ($P(S)\to 0$) при рассматриваемых неисправностях для произвольной булевой функции построить невозможно [6]. Возникает вопрос, какой максимальной надежности можно добиться при использовании ненадежных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на входах? Ответ на него зависит от базиса и типа неисправностей и содержится в теоремах 1–4.

§ 1. Неисправности типа 0 на входах элементов $x \mid y$

Пусть базисные элементы $x \mid y$ подвержены неисправностям типа 0 на входах, причем вероятность неисправности каждого входа элемента равна γ.

Лемма 1. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \mid y$ и $\gamma \leqslant 1/100$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 4\gamma$.*

Доказательство проводится индукцией по числу существенных переменных для функций.

Основание индукции: $n = 0$. На рис. 1 приведена схема S_1, реализующая константу 1.

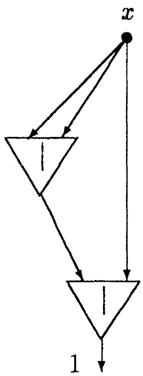

Рис. 1

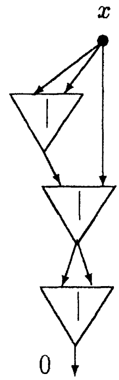

Рис. 2

Вероятности ошибок на выходе этой схемы:

$$P_0 = 0 \text{ при } x = 0; \quad P_0 = (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma)^2 \leqslant 2\gamma \text{ при } x = 1.$$

На рис. 2 приведена схема S_2, реализующая константу 0. Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы:

$$P_1 = 2\gamma - \gamma^2 \text{ при } x = 0;$$
$$P_1 = (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma)^2 + (1 - (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma)^2)(2\gamma - \gamma^2) \leqslant 4\gamma \text{ при } x = 1.$$

Основание индукции проверено.

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение леммы верно для булевых функций, существенно зависящих не более чем от $n-1$ переменной. Рассмотрим произвольную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Схема S_3 (рис. 3) реализует ее в соответствии с разложением:

$$f = x_n \cdot f_1 \vee \overline{x_n} \cdot f_0 = (x_n \mid f_1) \mid ((x_n \mid x_n) \mid f_0).$$

Нетрудно проверить, что выделенная подсхема A (рис. 3) имеет ненадежность $P(A) \leqslant 4\gamma$. Действительно,

$P_1 = 2\gamma - \gamma^2$, если $x_n \& f_1 = 0$ и $f_0 = 0$;

$P_1 = (1-\gamma)^2(2\gamma - \gamma^2) + (2\gamma - \gamma^2)((1-\gamma)^2 + (2\gamma - \gamma^2)^2) \leqslant 4\gamma$, если $x_n = 1$, $f_1 = 0$ и $f_0 = 1$;

$P_0 = (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma)^2 \leqslant 2\gamma$, если $x_n = 0$, $f_1 = 0$ и $f_0 = 1$, или $x_n = 0$, $f_1 = 1$ и $f_0 = 1$, или $x_n = 1$, $f_1 = 1$ и $f_0 = 0$;

$P_0 = (2\gamma - \gamma^2)((1-\gamma)^4 + (2\gamma-\gamma^2)^2(1-\gamma)^2) \leqslant 2\gamma$, если $x_n = 1$, $f_1 = 1$ и $f_0 = 1$.

Согласно индуктивному предположению функции $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ можно реализовать схемами с ненадежностью, не превосходящей 4γ.

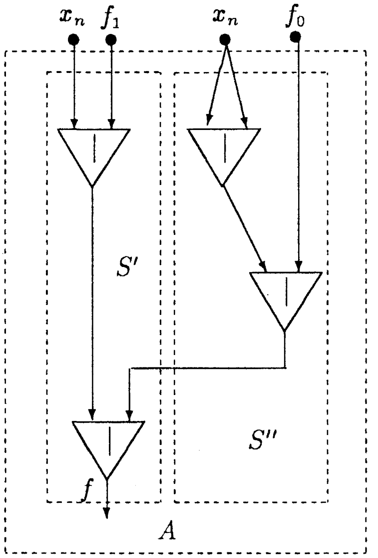

Рис. 3

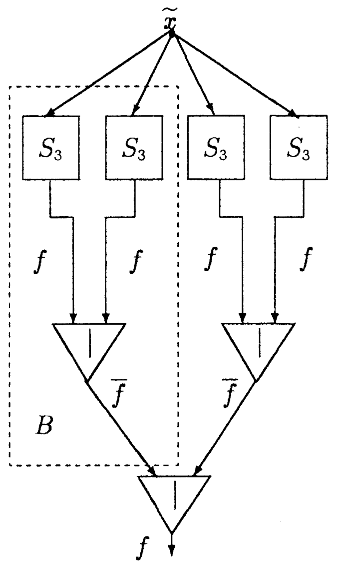

Рис. 4

Если схема S_3 исправна, то при реализации функции f она использует выходное значение одной из схем, реализующих функции f_0 и f_1. Выбор схемы зависит от значения x_n. Поэтому $P(S_3) \leqslant P(A) + 4\gamma \leqslant 8\gamma$.

Уменьшить ненадежность схемы S_3 можно с помощью схемы S_4 (рис. 4), предварительно вычислив вероятности ошибок на выходе подсхемы B. При входных наборах $\tilde{a}$ функции f таких, что $f(\tilde{a}) = 0$, имеем $P_0(B, \tilde{a}) = (P_1(S_3, \tilde{a}))^2(1-\gamma)^2$. Следовательно,

$$P_0(B, \tilde{a}) \leqslant (P_1(S_3, \tilde{a}))^2. \qquad (1)$$

При входных наборах $\tilde{a}$ функции f таких, что $f(\tilde{a}) = 1$, имеем $P_1(B, \tilde{a}) = (1 - P_0(S_3, \tilde{a}))^2(2\gamma - \gamma^2) + 2P_0(S_3, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a})) + (P_0(S_3, \tilde{a}))^2$. Следовательно,

$$P_1(B, \tilde{a}) \leqslant 2\gamma + 2P_0(S_3, \tilde{a}). \qquad (2)$$

Заметим, что схема S_4 получается из схемы B заменой обеих схем S_3 на B. Поэтому, учитывая (1) и (2), при таких входных наборах $\tilde{a}$

функции f, что $f(\tilde{a}) = 0$, получаем $P_1(S_4, \tilde{a}) \leqslant 2\gamma + 2(P_1(S_3, \tilde{a}))^2 \leqslant 2\gamma + 2(P(S_3))^2$, т. е.

$$P_1(S_4, \tilde{a}) \leqslant 2\gamma + 2(P(S_3))^2. \tag{3}$$

При входных наборах $\tilde{a}$ функции f таких, что $f(\tilde{a}) = 1$, имеем $P_0(S_4, \tilde{a}) \leqslant (2\gamma + 2P_0(S_3))^2 \leqslant 4(\gamma + P(S_3))^2$, т. е.

$$P_0(S_4, \tilde{a}) \leqslant 4(\gamma + P(S_3))^2. \tag{4}$$

Так как $P(S_3) \leqslant 8\gamma$ и $\gamma \leqslant 1/100$, то, учитывая (3) и (4), имеем $P_1(S_4, \tilde{a}) \leqslant 2\gamma + 128\gamma^2 \leqslant 4\gamma$, $P_0(S_4, \tilde{a}) \leqslant 4 \cdot 81\gamma^2 \leqslant 4\gamma$. Следовательно, $P(S_4) \leqslant 4\gamma$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \mid y$ и $\gamma \leqslant 1/100$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой $\widetilde{S}$, что $P(\widetilde{S}) \leqslant 2\gamma + 8\gamma^2 + 106\gamma^3$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная булева функция. Тогда по лемме 1 ее можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 4\gamma$. По схеме S строим схему S^*, заменив на рис. 4 все схемы S_3 на схемы S (т. е. проделаем шаг итерации). Тогда, используя (3) и (4), имеем $P_1(S^*, \tilde{a}) \leqslant 2\gamma + 2P^2(S)$ при нулевых входных наборах $\tilde{a}$ функции f; $P_0(S^*, \tilde{a}) \leqslant 4(\gamma + P(S))^2$ при единичных входных наборах $\tilde{a}$ функции f.

Так как $P(S) \leqslant 4\gamma$ и $\gamma \leqslant 1/100$, то $4(\gamma + P(S))^2 \leqslant 4(\gamma + 4\gamma)^2 = 100\gamma^2 \leqslant \gamma \leqslant 2\gamma + 2(P(S))^2$, т. е.

$$P(S^*) \leqslant 2\gamma + 2(P(S))^2. \tag{5}$$

Следовательно, $P(S^*) \leqslant 2\gamma + 32\gamma^2$.

Проделаем еще два шага итерации и построим схемы S^{**} и S^{***}. Используя (5), получаем

$$P(S^{**}) \leqslant 2\gamma + 2(2\gamma + 32\gamma^2)^2 \leqslant 2\gamma + 13\gamma^2;$$
$$P(S^{***}) \leqslant 2\gamma + 2(2\gamma + 13\gamma^2)^2 \leqslant 2\gamma + 8\gamma^2 + 102\gamma^3 + 340\gamma^4 \leqslant 2\gamma + 8\gamma^2 + 106\gamma^3.$$

Схема S^{***} — искомая. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \mid y$ и $\gamma \leqslant 1/100$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не превосходит $P^* = (1 - \sqrt{1 - 16\gamma})/4$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f реализуется схемой S, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Проделав $n + 1$ шаг итерации, построим схемы S_n и S_{n+1}, ненадежности которых $P(S_n)$ и $P(S_{n+1})$ (см.(5)) удовлетворяют неравенству $P(S_{n+1}) \leqslant 2\gamma + 2(P(S_n))^2$.

Рассмотрим действительную функцию $g(x) = 2\gamma + 2x^2$, отображающую $[0, 4\gamma]$ в себя. Эта функция удовлетворяет условию Липшица

$|g(x) - g(y)| = 2|x - y||x + y| \leqslant K|x - y|$ с константой $\mathrm{K} = 16\gamma < 1$ и, следовательно, является сжимающим отображением. Поэтому последовательность $x_1 = P(S)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2), \ldots$ сходится к единственному корню уравнения $x = g(x)$. В нашем случае этот корень равен $P^* = (1 - \sqrt{1 - 16\gamma})/4$.

Таким образом, любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не превосходит P^*, если число итераций $n \to \infty$. Следствие 1 доказано.

Замечание 1. $\mathrm{P}^* \approx 2\gamma + 8\gamma^2 + 64\gamma^3$ при малых значениях γ.

Из следствия 1 и замечания 1 следует, что оценка ненадежности из теоремы 1 отличается от P^* при $\gamma \to 0$ лишь в третьем слагаемом, содержащем γ^3. Продолжая итерационный процесс в теореме 1, можно уменьшить лишь коэффициенты при γ^n, $n \geqslant 3$. Следовательно, этот метод не приводит к существенному улучшению оценки ненадежности.

Теорема 2. *Пусть элементы $x \mid y$ подвержены неисправностям типа 0 на входах, f — произвольная булева функция, отличная от константы 1, и S — любая схема, реализующая функцию f. Тогда при $\gamma < 1/2$ справедливо неравенство $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, не равная константе 1, реализуется схемой S. Выделим в S функциональный элемент E, выход которого является выходом схемы. Обозначим через C подсхему схемы S без элемента E. Вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$ таком, что $f(\tilde{a}) = 0$, равна

$$P_1 = (1 - p)(2\gamma - \gamma^2) + p = 2\gamma - \gamma^2 + p(1 - 2\gamma + \gamma^2) \geqslant 2\gamma - \gamma^2,$$

где $1 - p$ — вероятность появления набора (1,1) на выходах схемы C. Теорема 2 доказана.

Пример. Схема (см. рис. 1) реализует константу 1 с ненадежностью $(2\gamma - \gamma^2)(1 - \gamma)^2$, которая меньше $2\gamma - \gamma^2$ при $\gamma > 0$.

Из теоремы 2 следует, что если $\gamma \leqslant 1/100$, то любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая произвольную булеву функцию, кроме, быть может, константы 1, является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Таким образом, показано, что при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \mid y$ любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, константы 1.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 1 на входах

элементов [1]. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $\{x \downarrow y\}$ произвольную функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, константы 0.

§ 2. Неисправности типа 1 на входах элементов $x \mid y$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \mid y\}$ при неисправностях типа 1 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Лемма 2. *При неисправностях типа* 1 *на входах элементов* $x \mid y$ *и* $\gamma \leqslant 1/50$ *любую булеву функцию* f *можно реализовать такой схемой* S, *что* $P(S) \leqslant \gamma$.

Доказательство проводится индукцией по числу существенных переменных булевых функций и аналогично доказательству леммы 1.

Основание индукции: $n = 0$. На рис. 1 приведена схема S_1, реализующая константу 1. Для этой схемы имеем

$$P_0 = \gamma^4 + (1 - \gamma^2)\gamma = \gamma - \gamma^3 + \gamma^4 \leqslant \gamma \text{ при } x = 0;$$
$$P_0 = \gamma \text{ при } x = 1.$$

На рис. 2 приведена схема S_2, реализующая константу 0. Вероятность ошибки на выходе этой схемы равна

$$P_1 = (\gamma - \gamma^3 + \gamma^4)(1 - \gamma^2) \leqslant \gamma \text{ при } x = 0;$$
$$P_1 = \gamma(1 - \gamma^2) \leqslant \gamma \text{ при } x = 1.$$

Следовательно, утверждение леммы верно при $n = 0$.

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение леммы верно для булевых функций, существенно зависящих не более чем от $n - 1$ переменной. Пусть произвольная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется схемой S_3 (см. рис. 3) в соответствии с разложением:

$$f = x_n \cdot f_1 \vee \overline{x_n} \cdot f_0 = (x_n \mid f_1) \mid ((x_n \mid x_n) \mid f_0).$$

Чтобы проверить, что выделенная подсхема A (см. рис. 3) имеет ненадежность $P(A) \leqslant 2\gamma$, вычислим ненадежности ее подсхем S' и S''. Вероятность ошибки на выходе схемы S' равна

$P_0 = \gamma - \gamma^3 + \gamma^4$ на входном наборе (0,0,0);
$P_1 = \gamma^2 - \gamma^3$ на входном наборе (0,0,1);
$P_0 = \gamma - \gamma^2 + \gamma^3$ на входном наборе (0,1,0);

$P_1 = \gamma - \gamma^2$ на входном наборе (0,1,1);
$P_0 = \gamma - \gamma^2 + \gamma^3$ на входном наборе (1,0,0);
$P_1 = \gamma - \gamma^2$ на входном наборе (1,0,1);
$P_0 = \gamma^2$ на входном наборе (1,1,0);
$P_0 = \gamma$ на входном наборе (1,1,1).
Следовательно, $P(S') = \gamma$.

Так как схема S'' получается из схемы S' склеиванием двух первых входов, то $P(S'') \leqslant P(S') = \gamma$.

Ошибка на выходе схемы A появляется, если неверное значение выдала хотя бы одна из подсхем S', S''. Поэтому $P(A) \leqslant P(S') + P(S'')$. Итак, $P(A) \leqslant 2\gamma$.

Согласно индуктивному предположению функции $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ можно реализовать схемами с ненадежностью не более γ.

Если схема S_3 исправна, то при реализации функции f используется выходное значение одной из схем, реализующих функции f_0 и f_1. Выбор схемы зависит от значения x_n. Поэтому $P(S_3) \leqslant P(A) + \gamma \leqslant 3\gamma$.

Уменьшить ненадежность схемы S_3 можно с помощью схемы S_4 (см. рис. 4).

Предварительно вычислим вероятности ошибок на выходе подсхемы B (см. рис. 4). При нулевых входных наборах $\tilde{a}$ функции f имеем

$$P_0(B, \tilde{a}) = (1 - P_1(S_3, \tilde{a}))^2\gamma^2 + 2P_1(S_3, \tilde{a})(1 - P_1(S_3, \tilde{a}))\gamma + (P_1(S_3, \tilde{a}))^2.$$

Следовательно,

$$P_0(B, \tilde{a}) \leqslant (\gamma + P_1(S_3, \tilde{a}))^2. \tag{6}$$

При единичных входных наборах $\tilde{a}$ функции f имеем

$$P_1(B, \tilde{a}) = 2P_0(S_3, \tilde{a})(1 - P_0(S_3, \tilde{a}))(1 - \gamma) + (P_0(S_3, \tilde{a}))^2(1 - \gamma^2).$$

Поэтому

$$P_1(B, \tilde{a}) \leqslant 2P_0(S_3, \tilde{a}). \tag{7}$$

Заметим, что схема S_4 получается из схемы B заменой обеих схем S_3 на B. Поэтому, учитывая (6) и (7), при нулевых входных наборах $\tilde{a}$ функции f получаем $P_1(S_4, \tilde{a}) \leqslant 2(\gamma + P_1(S_3, \tilde{a}))^2 \leqslant 2(\gamma + P(S_3))^2$. При единичных входных наборах $\tilde{a}$ функции f имеем $P_0(S_4, \tilde{a}) \leqslant (\gamma + 2P_0(S_3, \tilde{a}))^2 \leqslant (\gamma + 2P(S_3))^2$. Следовательно,

$$P(S_4) \leqslant \max\{2(\gamma + P(S_3))^2, (\gamma + 2P(S_3))^2\}. \tag{8}$$

Так как $P(S_3) \leqslant 3\gamma$ и $\gamma \leqslant 1/50$, то $P(S_4) \leqslant 49\gamma^2 \leqslant \gamma$. Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Если $P(S) \leqslant \gamma/\sqrt{2}$, то

$$\max\{2(\gamma + P(S))^2, (\gamma + 2P(S))^2\} = 2(\gamma + P(S))^2.$$

Теорема 3. *При неисправностях типа 1 на входах элементов $x \mid y$ и $\gamma \leqslant 1/50$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой $\widetilde{S}$, что $P(\widetilde{S}) \leqslant 2\gamma^2 + 36\gamma^3 + 162\gamma^4$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 2 ее можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant \gamma$. По схеме S строим схему S^*, заменив на рис. 4 все схемы S_3 на схемы S (т. е. проделаем шаг итерации). Тогда, используя (8), имеем $P(S^*) \leqslant \max(8\gamma^2, 9\gamma^2)$.

Проделав еще один шаг итерации, построим схему S^{**} и оценим ее ненадежность, используя (8):

$$P(S^{**}) \leqslant \max(2(\gamma + 9\gamma^2)^2, (\gamma + 18\gamma^2)^2) = 2\gamma^2 + 36\gamma^3 + 162\gamma^4.$$

Схема S^{**} — искомая. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *При неисправностях типа 1 на входах элементов $x \mid y$ и $\gamma \leqslant 1/50$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой, ненадежность которой асимптотически не превосходит $P^* = (1 - 4\gamma - \sqrt{1 - 8\gamma})/4$.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1. Пусть произвольная булева функция f реализуется схемой S, которая удовлетворяет условиям теоремы 3. Проделав $n + 1$ шаг итерации, построим такие схемы S_n и S_{n+1}, что

$$P(S_{n+1}) \leqslant \max\{2(\gamma + P(S_n))^2, (\gamma + 2P(S_n))^2\}.$$

Если n — число шагов итерации достаточно велико, то согласно замечанию 2 имеем $P(S_{n+1}) \leqslant 2(\gamma + P(S_n))^2$.

Рассмотрим действительную функцию $g(x) = 2(\gamma + x)^2$, отображающую $[0, \gamma]$ в себя. Эта функция удовлетворяет условию Липшица $|g(x) - g(y)| = 2|x - y||x + y + 2\gamma| \leqslant \mathrm{K}|x - y|$ с константой $\mathrm{K} = 8\gamma < 1$. Следовательно, $g(x)$ является сжимающим отображением. Поэтому последовательность $x_1 = P(S)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2), \ldots$ сходится к единственному корню уравнения $x = g(x)$. В нашем случае этот корень равен $P^* = (1 - 4\gamma - \sqrt{1 - 8\gamma})/4$.

Таким образом, любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше P^*. Следствие 2 доказано.

Замечание 3. $P^* \approx 2\gamma^2 + 8\gamma^3 + 40\gamma^4$ при малых значениях γ.

Теорема 4. *Пусть элементы $x \mid y$ подвержены неисправностям типа 1 на входах, f — произвольная булева функция, отличная от константы 0, и S — любая схема, реализующая функцию f. Тогда при $\gamma < 1/2$ справедливо неравенство $P(S) \geqslant \gamma^2$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, не равная константе 0, реализуется схемой S. Выделим в S функциональный элемент E, выход которого является выходом схемы. Обозначим через C подсхему схемы S без элемента E. Вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$ таком, что $f(\tilde{a}) = 1$, равна

$$P_0 = p + p_{01}\gamma + p_{10}\gamma + p_{00}\gamma^2 \geqslant p + (p_{01} + p_{10} + p_{00})\gamma^2 = p + (1-p)\gamma^2 \\ = \gamma^2 + p(1-\gamma^2) \geqslant \gamma^2,$$

где p — вероятность появления набора (1,1) на выходах схемы C, p_{ab} — вероятность появления набора (ab) на выходах схемы C, $p_{01} + p_{10} + p_{00} = 1 - p$. Следовательно, $P(S) \geqslant \gamma^2$. Теорема 4 доказана.

Таким образом, показано, что если $\gamma \to 0$, то при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \mid y$ произвольную булеву функцию $f \not\equiv 0$ можно реализовать такой схемой, ненадежность которой асимптотически не больше $2\gamma^2$ и не меньше γ^2.

Пример. Легко построить схему с ненадежностью γ^2. Для этого достаточно взять базисный элемент и отождествить его входы. Полученная схема реализует инверсию с вероятностями ошибок $P_0 = \gamma^2$, $P_1 = 0$.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в базисе $\{x \downarrow y\}$ при неисправностях типа 0 на входах функциональных элементов [1], а именно при $\gamma \to 0$ произвольную функцию $f \not\equiv 1$ можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше $2\gamma^2$ и не меньше γ^2.

В заключение автор благодарит профессора Н. П. Редькина за постановку задачи и внимание к работе.

Краткая информация о результатах настоящей работы имеется в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 6–8.
2. **Алехина М. А.** Синтез надежных схем в базисах $\{|\}, \{\downarrow\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Тр. IV Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19–25 июня 2000 г.). М.: Изд-во МАКС Пресс, 2000. С. 10–12.

3. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. С. 68–139.
5. **Ортюков С. И.** Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок // Проблемы передачи информации. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 84–97.
6. **Тарасов В. В.** К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Мат. заметки. 1976. Т. 20, вып. 3. С. 391–400.
7. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // Fundamentals of computation theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес автора:

Пензенский
государственный университет,
ул. Красная, 40,
440017 Пенза, Россия.
E-mail:
alehina@diamond.stup.ac.ru

Статья поступила
25 декабря 2000 г.,
переработанный вариант —
6 марта 2001 г.