ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2001. Серия 1. Том 8, № 2, 15–39

УДК 519.172.2

СТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ В ТЕРМИНАХ ПУЧКОВ И ЗВЕЗД*)

О. В. Бородин, Х. Брусма, А. Н. Глебов,

Я. ван ден Хойвел

Вес предполной звезды при вершине v плоского графа G определяется как сумма степеней всех смежных с v вершин, кроме одной, имеющей наибольшую степень. Показано, что если в плоской триангуляции T отсутствуют достаточно длинные цепи, которым принадлежат только вершины степени 4, то в T существует предполная звезда ограниченного веса при вершине степени не более 5.

Введение

Строение плоских триангуляций изучалось во многих работах, часть из них приводится в обзоре [1] и в библиографиях к статьям [2–4]. Из последних результатов в данном направлении отметим доказательство О. В. Бородиным и Д. Вудалом [3] гипотезы Коцига (1978) о существовании в плоской триангуляции с минимальной степенью 5 цикла длины 4 с суммой степеней вершин (весом) не более 25. Другой результат, непосредственно связанный с настоящей статьей, получен в [4], где доказана точная верхняя оценка для минимального веса граней в плоских триангуляциях в зависимости от максимальной длины цепи, которой принадлежат только вершины степени 4.

Заметим, что доказательство гипотезы Коцига в [3] основывается на существовании в плоской триангуляции с минимальной степенью 5 так называемой предполной звезды веса не более 25 с центром в некоторой 5-вершине. Вместе с тем для триангуляций, содержащих вершины степени меньше 5, невозможно указать никакой верхней оценки для веса

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581) и INTAS (грант 97–1001), второго автора — при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (грант 047–008–006), третьего автора — при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (грант 047–008–006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00916).

предполных звезд при младших вершинах, т. е. вершинах степени не более 5. Так, из примера бипирамиды следует, что любая младшая вершина в плоской триангуляции T может быть смежна не менее чем с двумя вершинами неограниченно большой степени (полюсами).

Ниже доказывается теорема о строении плоских триангуляций в терминах предполных звезд при младших вершинах и так называемых пучков (определение см. ниже). В частности, показано, что в плоской триангуляции T существует предполная звезда ограниченного веса при вершине степени не более 5, если в T отсутствуют пучки достаточно большой заданной ширины. Оценка на ширину пучков в этой теореме неулучшаема. В последующих работах данная теорема будет использована при получении точной верхней оценки для 2-дистанционной степени произвольного плоского графа и верхней оценки для его 2-дистанционного хроматического числа.

1. Определения и формулировка основного результата

Будем рассматривать обыкновенные плоские триангуляции (т. е. триангуляции, не содержащие петель и кратных ребер).

Определение 1. Будем говорить, что в плоской триангуляции T имеется *пучок* H ширины $m \geqslant 3$ с *полюсами* в вершинах p и q (где $p \neq q$), если в T существует последовательность путей $P_1, P_2, \dots, P_m$, обладающая следующими свойствами. Каждый путь P_i, $i = 1, \dots, m$, имеет длину 1 или 2, и его концами являются вершины p и q. При этом для любого $i = 1, \dots, m-1$ цикл, ограниченный путями P_i и P_{i+1}, не является разделяющим в T (т. е. внутри этого цикла не содержится ни одна вершина триангуляции T) (рис. 1 и 2). Кроме того, указанная последовательность путей является максимальной в том смысле, что не существует такого пути P_0 (равно как и P_{m+1}), который можно было бы добавить к пучку H с сохранением всех указанных свойств.

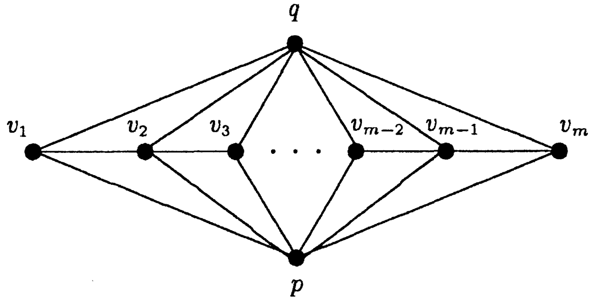


Рис. 1. Пучок без родительского ребра

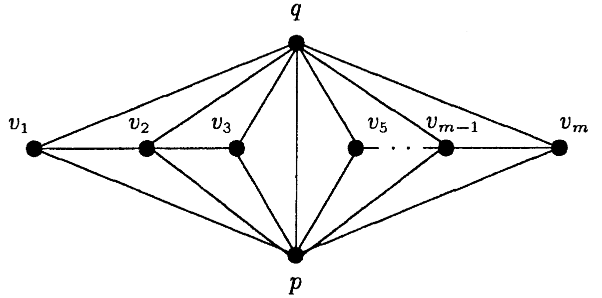


Рис. 2. Пучок с родительским ребром

Если при некотором i путь P_i, принадлежащий пучку H, имеет длину 2, т. е. $P_i = pv_iq$, то вершину v_i будем называть *собственной вершиной* пучка H, или *пучковой* вершиной. Всякий путь $P_i = pq$ длины 1, принадлежащий пучку H, будем также называть *родительским ребром* пучка H (рис. 2).

Если цикл, ограниченный путями P_1 и P_m, является разделяющим в T (т. е. вне пучка имеется хотя бы одна вершина графа T), то ребра, принадлежащие путям P_1 и P_m, будем называть *граничными ребрами*, а вершины v_1 и v_m — *концевыми вершинами* (или *концами*) пучка H. Заметим, что поскольку T является триангуляцией, родительское ребро pq не может быть граничным в H. Вершины v_i при $2 \leqslant i \leqslant m-1$ будем называть *внутренними*, а при $3 \leqslant i \leqslant m-2$ — *строго внутренними* вершинами пучка H. Каждое ребро вида v_iv_{i+1}, соединяющее соседние пучковые вершины, назовем *горизонтальным*, а каждое ребро, принадлежащее какому-либо из путей P_i, — *вертикальным* ребром пучка. Заметим, что согласно определению степень любой внутренней вершины v_i пучка H равна 4 или 3, причем последнее возможно лишь в случае, если вершина v_i инцидентна грани, содержащей родительское ребро pq. При этом вершина v_i смежна с каждым из полюсов p и q, а также с одной или двумя соседними пучковыми вершинами v_{i-1} и (или) v_{i+1}.

Вершины степени не менее 26 в T будем называть *B-вершинами*, вершины степени не более 25 — *L-вершинами*, вершины степени не более 5 — *младшими вершинами*.

Определение 2. Пусть u — некоторая вершина степени d в T и $v_1, \dots, v_k$ — несколько вершин в окружении u (не обязательно идущих подряд). Будем говорить, что вершины $u, v_1, \dots, v_k$ и ребра $uv_1, \dots, uv_k$ образуют *k-звезду* при d-вершине u, определяемую вершинами $v_1, \dots, v_k$. Величину $\sum_{i=1}^{k} d(v_i)$ будем называть *весом* указанной звезды. При этом всякую $(d-1)$-звезду при d-вершине u будем называть *предполной*, а всякую d-звезду — *полной*.

Теорема 1. *Для любой плоской триангуляции T верно одно из следующих утверждений:*

(A) *В T имеется предполная звезда при младшей вершине, не содержащая B-вершин, веса не более 38.*

(B) *В T имеется B-вершина b, которая является полюсом либо для пучка ширины более $d(b)/5$, либо для пучка ширины $d(b)/5$ с родительским ребром, либо для пяти пучков ширины $d(b)/5$ без родительских ребер и с несовпадающими концевыми вершинами. При этом в последнем случае все концевые вершины, кроме, возможно, одной, имеют степень 5, а степень последней концевой вершины не превосходит 11 (рис. 3).*

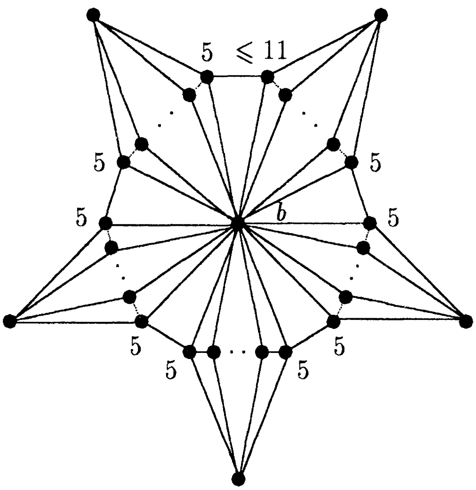


Рис. 3

Следствие 1. *Если в плоской триангуляции T каждая B-вершина b является полюсом лишь для пучков ширины менее $d(b)/5$, то в T имеется предполная звезда при младшей вершине веса не более 38. В частности, если ширина каждого пучка в T не превосходит 5, то T содержит звезду указанного вида.*

2. План доказательства теоремы 1

Доказательство теоремы 1 составляет содержание пп. 3–9 настоящей статьи и проводится в несколько этапов.

В п. 3 вводится в рассмотрение триангуляция T, являющаяся контрпримером к утверждению теоремы. Для каждой вершины $v \in V(T)$ определяются понятия ее *начального* ($\mu(v)$) и *конечного* ($\mu^*(v)$) *зарядов* и формулируются правила П1–П3, по которым начальные заряды преобразуются в конечные. При этом основным свойством величин $\mu(v)$

и $\mu^*(v)$ является соотношение

$$\sum_{v\in V(T)} \mu(v) = \sum_{v\in V(T)} \mu^*(v) = -12. \qquad (1)$$

Дальнейшее доказательство состоит в проверке для каждой вершины $v \in V(T)$ неравенства $\mu^*(v) \geqslant 0$, которое противоречит (1). В п. 4 это неравенство доказывается для случая, когда v является L-вершиной (лемма 1). В п. 5 предполагается существование в T такой B-вершины b, для которой $\mu^*(b) < 0$. В лемме 2 устанавливаются некоторые свойства ребер, инцидентных вершине b . Далее (пп. 6–9) доказывается, что для выбранной вершины b справедливо утверждение (B) теоремы 1.

В п. 6 осуществляется локальный переучет зарядов, направляемых вершиной b по инцидентным ей ребрам, для чего вводится так называемое *правило усреднения* ПУ. Далее на основе этого правила определяются понятия *предпучка* и *разделителя*, представляющих собой некоторые подмножества ребер из окружения вершины b.

Лемма 3 из п. 7 описывает условия, при которых заданный предпучок из окружения вершины b является частью некоторого пучка. В леммах 4 и 5 из п. 8 изучается строение разделителей. Наконец, в п. 9 доказывается основная лемма 6, из которой следует, что вершина b является полюсом для одного или 5 пучков, удовлетворяющих утверждению (B) теоремы 1.

3. Правила перераспределения зарядов

Пусть триангуляция T является контрпримером к утверждению теоремы. Так как любая плоская триангуляция, отличная от K_3, не содержит вершин степени 1 и 2, то $\delta(T) \geqslant 3$. Очевидно также, что T обладает следующими свойствами:

(A$'$) Каждая предполная звезда при младшей вершине в T либо содержит B-вершину, либо имеет вес, не меньший 39.

(B$'$) Каждая B-вершина b в T может являться полюсом для пучков ширины не более $d(b)/5$.

Положим $V = V(T)$ и запишем формулу Эйлера для триангуляции T в виде

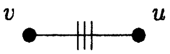
$$\sum_{v\in V}(d(v) - 6) = \sum_{v\in V} \mu(v) = -12. \qquad (2)$$

Число $\mu(v) = d(v) - 6$ называется (первоначальным) *зарядом* вершины $v \in V$. Заметим, что только младшие вершины в T имеют отрицательный заряд. Перераспределим заряды между вершинами из T таким образом, чтобы для каждой вершины $v \in V$ ее новый заряд $\mu^*(v)$ стал

неотрицательным, а сумма всех зарядов в T осталась неизменной. Это приведет к противоречию с (1) (см. п. 2):

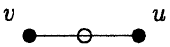
$$0 \leqslant \sum_{v \in V} \mu^*(v) = \sum_{v \in V} \mu(v) = -12. \tag{3}$$

Будем использовать следующие обозначения:


если вершина v передает вершине u заряд, равный $\frac{3}{2}$;


если вершина v передает вершине u заряд, равный 1;


если вершина v передает вершине u заряд, равный $\frac{1}{2}$;


если вершина v не передает заряд вершине u.

В первом случае ребро vu будем называть *полуторным*, во втором — *единичным*, в третьем — *половинным* и в последнем случае — *нулевым*. При этом направление передачи заряда вдоль ребра vu всегда будет однозначно определяться из контекста дальнейшего доказательства.

Определим следующие правила П1–П3 перераспределения зарядов, в соответствии с которыми вершины степени не менее 9 передают часть своего заряда младшим вершинам, делая заряд младших вершин неотрицательным.

П1: Пусть u — некоторая 4-вершина и v_1, v_2, v_3, v_4 — вершины из окружения вершины u, обозначенные в циклическом порядке. Ввиду свойства (A′) степени по крайней мере двух вершин из v_1, v_2, v_3, v_4 не менее 12. Возможны следующие случаи:

а) $d(v_i) \geqslant 12$ при каждом $i = 1, \ldots, 4$. В этом случае каждая вершина v_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, передает вершине u заряд, равный 1 (рис. 4, *а*);

б) $d(v_1) \leqslant 11$ и $d(v_i) \geqslant 12$ при $i = 2, 3, 4$. В этом случае вершина v_3 передает вершине u заряд 1, а каждая из вершин v_2 и v_4 передает заряд, равный $\frac{1}{2}$ (рис. 4, *б*);

в) $d(v_1) \leqslant 11$, $d(v_3) \leqslant 11$, $d(v_2) \geqslant 12$, $d(v_4) \geqslant 12$. В этом случае каждая из вершин v_2 и v_4 передает вершине u заряд 1 (рис. 4, *в*);

г) $9 \leqslant d(v_1) \leqslant 11$, $9 \leqslant d(v_2) \leqslant 11$, $d(v_3) \geqslant 12$, $d(v_4) \geqslant 12$. В этом случае каждая вершина v_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, передает вершине u заряд $\frac{1}{2}$ (рис. 4, *г*);

д) $d(v_1) \leqslant 8$, $9 \leqslant d(v_2) \leqslant 11$, $d(v_3) \geqslant 12$, $d(v_4) \geqslant 12$. В этом случае вершина v_3 передает вершине u заряд 1, а каждая из вершин v_2 и v_4 передает заряд, равный $\frac{1}{2}$ (рис. 4, *д*);

е) $d(v_1) \leqslant 8$, $d(v_2) \leqslant 8$, $d(v_3) \geqslant 12$, $d(v_4) \geqslant 12$. В этом случае каждая вершина v_3 и v_4 передает вершине u заряд 1 (рис. 4, *е*).

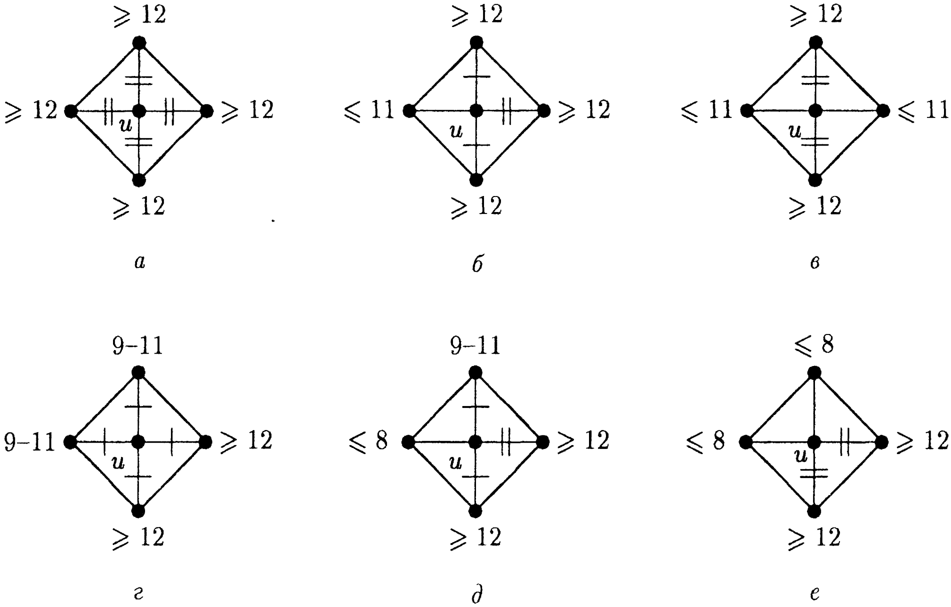


Рис. 4

П2: Пусть u — некоторая 3-вершина и v_1, v_2, v_3 — вершины из окружения вершины u. Ввиду свойства (A′) среди v_1, v_2, v_3 имеется не менее двух вершин степени не менее 12. Возможны следующие случаи:

а) $d(v_i) \geqslant 12$ при каждом $i = 1, \ldots, 3$. В этом случае каждая вершина v_1, v_2, v_3 передает вершине u заряд 1 (рис. 5, *а*).

б) $d(v_1) \leqslant 11$. Тогда согласно свойству (A′) вершины v_2 и v_3 являются B-вершинами. В этом случае каждая вершина v_2 и v_3 передает вершине u заряд $\frac{3}{2}$ (рис. 5, *б*).

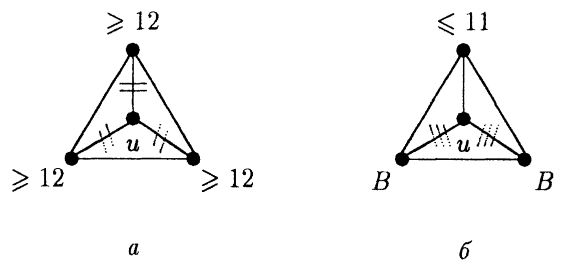


Рис. 5

П3: Пусть u — некоторая 5-вершина и $v_1, \ldots, v_5$ — вершины из окружения вершины u, обозначенные в циклическом порядке. Ввиду свойства (A′) по крайней мере две из вершин v_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, имеют степень не менее 9. Возможны следующие случаи:

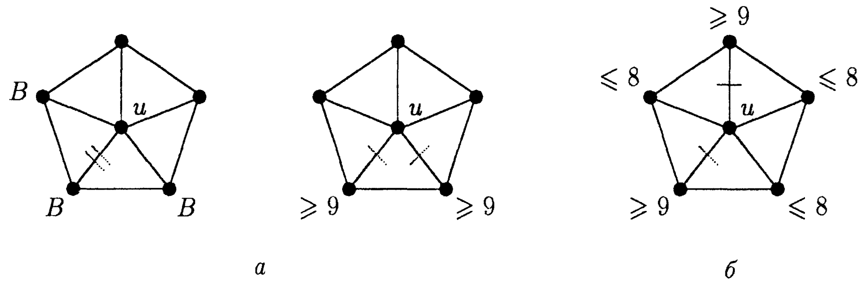


Рис. 6

а) В окружении вершины u имеются две соседние по циклу вершины степени не менее 9. Пусть v_i — некоторая вершина степени не менее 9 из окружения вершины u, для которой по крайней мере одна из вершин v_{i-1} или v_{i+1} имеет степень не менее 9. Тогда если каждая вершина v_i, v_{i-1} и v_{i+1} является B-вершиной в T, то вершина v_i передает вершине u заряд 1 (рис. 6, *а*). Если же хотя бы одна из вершин v_i, v_{i-1} или v_{i+1} является L-вершиной в T, то вершина v_i передает вершине u заряд $\frac{1}{2}$ (рис. 6, *а*).

б) В окружении вершины u нет двух соседних по циклу вершин степени не менее 9. При этом можно считать, что $d(v_i) \geqslant 9$ при $i = 1, 3$ и $d(v_i) \leqslant 8$ при $i = 2, 4, 5$. В этом случае каждая вершина v_1 и v_3 передает вершине u заряд $\frac{1}{2}$ (рис. 6, *б*).

Замечание 1. Из определения правила П3 следует, что вершина $v = v_1$ степени не менее 9 из окружения 5-вершины u передает заряд вершине u всегда, за исключением случая, когда $d(v_2) \leqslant 8$, $d(v_3) \geqslant 9$, $d(v_4) \geqslant 9$ и $d(v_5) \leqslant 8$. В этом случае вершины v_3 и v_4 передают вершине u по $\frac{1}{2}$ (правило для случая (а)) и передачи заряда от вершины v_1 на вершину u не происходит.

Обозначим через $\mu^*(v)$ заряд вершины $v \in V$ после применения правил П1–П3.

4. Лемма об L-вершинах

Лемма 1. *Для любой L-вершины $v \in V$ верно неравенство $\mu^*(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Непосредственно из определения правил П1–П3 следует, что $\mu^*(v) \geqslant 0$ при $d(v) \leqslant 8$.

Пусть $9 \leqslant d(v) \leqslant 25$. Положим $d(v) = n$ и обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_n$ вершины из окружения вершины v, перечисленные в циклическом порядке. Сравним заряд, реально передаваемый от вершины v по каждому инцидентному ребру согласно правилам П1–П3, с некоторым усредненным значением заряда, приходящимся на единицу степени вершины v.

Это среднее значение определим как $\lambda(v) = \mu(v)/d(v)$. Схему перераспределения, при которой по каждому ребру, инцидентному вершине v, передается заряд $\lambda(v)$, назовем *равномерной*. Поскольку в реальной схеме перераспределения по правилам П1–П3 заряд передается лишь младшим вершинам, то равномерную схему преобразуем таким образом, что для каждого ребра vu_i, когда вершина u_i не является младшей, заряд $\lambda(v)$ не передается вершине u_i, а равномерно распределяется между соседними вершинами u_{i-1} и u_{i+1}.

Определенную таким образом схему передачи зарядов назовем *обобщенно равномерной*. В соответствии с этой схемой каждая младшая вершина u_i получает от v заряд $\lambda(v)$, если вершины u_{i-1} и u_{i+1} являются младшими, $\frac{3}{2}\lambda(v)$, если ровно одна из вершин u_{i-1} или u_{i+1} является младшей, и $2\lambda(v)$, если ни одна из указанных вершин не является младшей.

Для завершения доказательства леммы достаточно убедиться, что во всех случаях обобщенно равномерная схема мажорирует реальную схему передачи зарядов, т. е. величина заряда, передаваемого от вершины v по любому инцидентному ребру (в соответствии с правилами П1–П3), не превосходит соответствующего значения в обобщенно равномерной схеме.

Заметим, что $\lambda(v) \geqslant \frac{1}{3}$ при $d(v) \geqslant 9$, $\lambda(v) \geqslant \frac{1}{2}$ при $d(v) \geqslant 12$ и $\lambda(v) \geqslant \frac{2}{3}$ при $d(v) \geqslant 18$. Отсюда и из определения правил П1–П3 следует, что во всех случаях применения этих правил, кроме случаев (в) и (е) из правила П1 и случая (б) из правила П3, величины зарядов, передаваемых вершиной v, не превосходят соответствующих значений в обобщенно равномерной схеме.

Докажем то же самое для оставшихся случаев.

Пусть имеет место случай (в) из правила П1. Если вершины v_1 и v_3 не являются младшими, то нужное утверждение немедленно следует из определения обобщенно равномерной схемы. Пусть только одна вершина v_1 или v_3 является младшей. Ввиду свойства (A$'$) (для вершины u) имеем $d(v_2) > 18$ и $d(v_4) > 18$. Из этих неравенств и определения обобщенно равномерной схемы следует нужная оценка для величины заряда, передаваемого вершинами v_2 и v_4. Наконец, если вершины v_1 и v_3 являются младшими, то согласно свойству (A$'$) вершины v_2 и v_4 являются B-вершинами. Рассмотрим случай (е) из правила П1. Из свойства (A$'$) следует, что $d(v_3) > 18$ и $d(v_4) > 18$. Из этих неравенств, как и в ранее рассмотренном случае, получаем необходимые оценки для величин передаваемых зарядов. Наконец, в случае (б) из правила П3 достаточно заметить, что ввиду свойства (A$'$) имеют место неравенства $d(v_1) > 12$ и $d(v_3) > 12$. Лемма 1 доказана.

5. Свойства ребер, инцидентных B-вершине

Рассмотрим теперь неохваченный леммой 1 случай, когда вершина v является B-вершиной. Предположим, что в T имеется такая B-вершина b, что $\mu^*(b) < 0$. Зафиксируем эту вершину b и в дальнейшем будем обозначать ее степень через d, а вершины из окружения вершины b — в циклическом порядке через $v_1, v_2, \dots, v_d$. Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы, используя условие $\mu^*(b) < 0$, доказать, что вершина b является полюсом для пучка (или 5 пучков), удовлетворяющих условию (В) теоремы.

Лемма 2 (структурная). а) *Если в окружении вершины b имеется полуторное ребро bv_2, то одна и только одна из вершин v_1 или v_3 является B-вершиной (а соответствующее ребро bv_1 или bv_3 является нулевым).*

б) *Если в окружении вершины b имеется половинное ребро bv_2, то не более чем одна из вершин v_1 или v_3 является B-вершиной.*

в) *Пусть в окружении вершины b имеется B-вершина v_1, а ребро bv_2 является единичным. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(i) *ребро bv_3 является нулевым (рис. 7, а),*

(ii) *ребро bv_3 является половинным (рис. 7, б),*

(iii) *ребро bv_3 является единичным, а вершина v_4 является B-вершиной (следовательно, ребро bv_4 является нулевым) (рис. 7, в).*

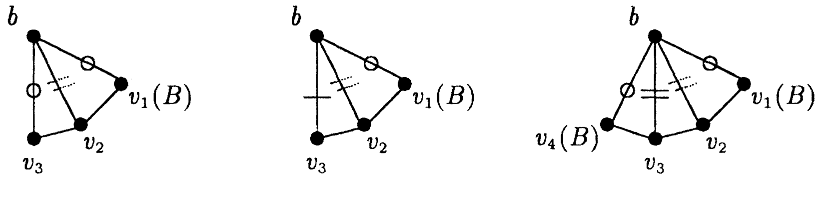
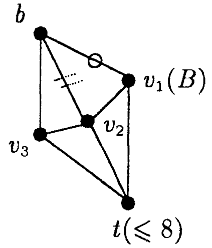


Рис. 7

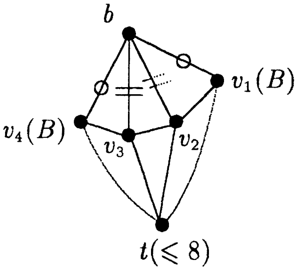
Доказательство. Утверждение (а) непосредственно следует из определения правила П2 (б), а утверждение (б) — из правил П1 (б, г, д) и П3.

Докажем утверждение (в). Предположим, что в условиях пункта (в) не выполняется ни одно из утверждений (i) и (ii). Докажем, что в этом случае выполняется утверждение (iii). Согласно сделанным предположениям ребро bv_2 является единичным, а ребро bv_3 — единичным или полуторным. Отсюда следует, что вершины v_2 и v_3 являются младшими.

Докажем, что $d(v_2) = 4$. Ясно, что в окружении вершины v_2 имеются B-вершины b и v_1, а также вершина v_3, степень которой не превосходит 5. Отсюда следует, что если $d(v_2) = 3$, то согласно правилу П2 (б)



а



б

Рис. 8

ребро bv_2 является полуторным, что противоречит условиям леммы. Допустим, что $d(v_2) = 5$. Тогда согласно правилу П3 ребро bv_2 является единичным только в том случае, если вершины v_1 и v_3 являются B-вершинами. Поскольку по доказанному вершина v_3 является младшей, $d(v_2) = 4$.

Обозначим через t вершину из окружения вершины v_2, отличную от вершин b, v_1 и v_3 (рис. 8, *а*). Заметим, что $d(t) \leqslant 8$, так как в противном случае согласно правилу П1 (б, д) ребро bv_2 было бы половинным. Отсюда следует, что $d(v_2) + d(t) \leqslant 12$, и по свойству (A$'$) имеем $d(v_3) \neq 3$. Из правила П3 следует, что $d(v_3) \neq 5$, так как вершина v_2 является L-вершиной. Следовательно, $d(v_3) = 4$. При этом вершина v_4, смежная с v_3, является B-вершиной, так как в противном случае вес предполной звезды при вершине v_3, определяемой вершинами v_2, v_4 и t, не превосходит 37 (это противоречит свойству (A$'$)) (рис. 8, *б*).

Так как согласно правилу П1 (е) ребро bv_3 является единичным, то выполняется утверждение (iii) пункта (в) леммы 2. Лемма 2 доказана.

6. Правило усреднения

Для дальнейшего доказательства осуществим локальный переучет вкладов, направляемых вершиной b по инцидентным ей ребрам, для чего воспользуемся правилом ПУ, которое будем называть *правилом усреднения*, а процесс применения этого правила — *процессом усреднения*.

ПУ (правило усреднения). Пусть в окружении вершины b расположены рядом ненулевое ребро bv_i, по которому передается заряд λ_i, и нулевое ребро bv_{i+1}, причем v_{i+1} является B-вершиной. В этом случае будем считать, что заряд λ_i, передаваемый от вершины b по ребру bv_i, уменьшается на $\frac{1}{2}$, а заряд $\frac{1}{2}$ направляется вдоль ребра bv_{i+1} (рис. 9, *а*). При этом ребро bv_{i+1} становится не менее чем половинным (это ребро может стать единичным, если на него также направляется заряд с ребра

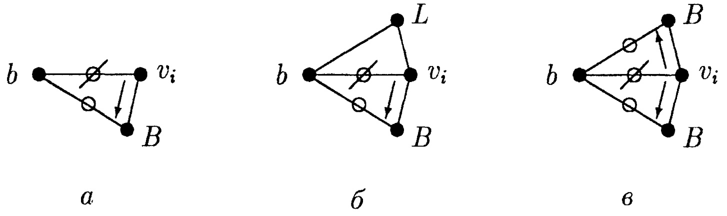


Рис. 9

bv_{i+2}). Если вершина v_{i-1} является L-вершиной, то по ребру bv_i теперь передается заряд $\lambda_i - \frac{1}{2}$ (рис. 9, *б*). Если же v_{i-1} является B-вершиной, то с ребра bv_i также производится сброс заряда на ребро bv_{i-1}, в результате чего по ребру bv_i передается заряд $\lambda_i - 1$ (рис. 9, *в*).

Замечание 2. Следует иметь в виду, что заново определенная величина заряда, направляемого вдоль ребра bv_j, $1 \leqslant j \leqslant d$, в соответствии с правилом ПУ *не передается реально* вершине v_j, а лишь *приписывается* (формально) ребру bv_j для лучшего учета вкладов вершины b. При этом величина заряда, реально передаваемого на вершину v_j, по-прежнему полностью определяется правилами П1–П3.

Корректность определения правила ПУ в случае, когда ребро bv_i является половинным, следует из утверждения (б) леммы 2. Согласно этому утверждению сброс заряда с половинного ребра bv_i может производиться не более чем на одно из двух соседних ребер. Из утверждения (а) леммы 2 следует, что после применения правила ПУ каждое полуторное ребро из окружения вершины b становится единичным. В частности, после усреднения в окружении вершины b не остается полуторных ребер. Кроме того, полезно заметить, что если производится сброс заряда с единичного ребра bv_2 на нулевое ребро bv_1, то имеет место один из случаев (i)–(iii), описанных в пункте (в) леммы 2. Наконец, если в окружении вершины b имеется нулевое ребро, инцидентное L-вершине, то оно остается нулевым и после применения правила ПУ. Отметим еще одно полезное свойство ребер из окружения вершины b, имеющее место после применения правила ПУ.

Утверждение 1 (о единичном ребре). *Если ребро bv_i после усреднения является единичным, то v_i либо B-вершина, либо вершина степени* 3 *или* 4.

Доказательство. Заметим, что если $d(v_i) = 5$ и до усреднения ребро bv_i было единичным, то, как следует из определения правил П3 (а) и ПУ, после усреднения ребро bv_i становится нулевым. Если же $d(v_i) = 5$ и ребро bv_i первоначально было половинным или нулевым, то это ребро не может стать единичным в результате усреднения. Следовательно, если вершина v_i является младшей, то ее степень равна 3 или 4. Если

же вершина v_i не является младшей, но является L-вершиной, то ребро bv_i нулевое и до и после усреднения. Отсюда следует, что если вершина v_i не является младшей, то она является B-вершиной. Утверждение 1 доказано.

Ниже под нулевыми, половинными и единичными ребрами из окружения вершины b мы будем понимать нулевые, половинные и единичные ребра после усреднения. Количество нулевых ребер из окружения вершины b обозначим через e_0, количество половинных — через $e_{1/2}$ и количество единичных — через e_1. Из условия $\mu^*(b) < 0$ следует, что

$$2e_0 + e_{1/2} \leqslant 11. \tag{4}$$

Определение 3. *Предпучком* ширины k в окружении вершины b назовем максимальную (непродолжаемую) последовательность из k подряд расположенных единичных ребер из окружения b (последовательность может быть непродолжаемой либо из-за того, что она с обеих сторон окружена неединичными ребрами, либо из-за того, что $k = d$). *Разделителем* ширины l назовем последовательность из l подряд расположенных неединичных ребер из окружения b, ограниченную с обеих сторон единичными ребрами (в случае с разделителем возможности $l = d$ и $l = d-1$ исключены ввиду (4)).

Из данного определения следует, что множество всех ребер из окружения вершины b распадается на непересекающиеся и чередующиеся между собой предпучки и разделители. При этом число предпучков равно числу разделителей (кроме случая, когда все ребра в окружении b являются единичными). Всякое неединичное ребро из окружения вершины b будем также называть *разделительным*. Из (4) следует, что в окружении вершины b имеется не более 11 разделительных ребер.

7. Основное свойство предпучков

Следующая лемма разъясняет смысл понятия предпучка и указывает на естественность введенного нами правила усреднения ПУ.

Лемма 3 (о предпучках). *Каждый предпучок ширины $k \geqslant 3$ из окружения вершины b является частью некоторого пучка ширины не менее $k+2$, один полюс которого находится в вершине b, а другой — в некоторой B-вершине t. При этом ребра предпучка являются последовательными вертикальными ребрами пучка и ни одно из них не является граничным в пучке.*

Доказательство. Пусть предпучок состоит из ребер bv_1, $bv_2, \dots,$ bv_k. Из утверждения 1 следует, что при любом $i = 1, \dots, k$ вершина v_i является либо B-вершиной, либо вершиной степени 3 или 4. Покажем,

что если $d(v_i) = 3$ (при $i = 1, \dots, k$), то вершина v_i смежна ровно с двумя B-вершинами в T. Достаточно доказать, что передача заряда по ребру bv_i производится в соответствии с правилом П2 (б). Предположим, что имеет место случай (а) из определения этого правила. Тогда первоначально ребро bv_i было единичным, а ребра bv_{i-1} и bv_{i+1} — нулевыми. При этом ни одно из последних двух ребер не может стать единичным в результате усреднения, так как на данные ребра не производится сброс заряда с ребра bv_i. Это противоречит условию леммы. Следовательно, в окружении вершины v_i имеются ровно две B-вершины (одной из которых является вершина b).

Определим отображение $\pi : \{v_1, \dots, v_k\} \to V$, которое условимся называть «отображением второго полюса». Если при некотором i вершина v_i является B-вершиной, то положим $\pi(v_i) = v_i$. Если $d(v_i) = 3$, то определим $\pi(v_i)$ как единственную B-вершину, смежную с вершиной v_i и отличную от вершины b. Если $d(v_i) = 4$, то определим $\pi(v_i)$ как вершину, смежную с вершиной v_i и отличную от вершин b, v_{i-1} и v_{i+1}.

Докажем, что образ отображения π состоит из единственной вершины, т. е. в T существует такая вершина t, что $\pi(v_i) = t$ при каждом $i = 1, \dots, k$. Для этого достаточно доказать, что $\pi(v_i) = \pi(v_{i+1})$ при $i = 1, \dots, k-1$.

Если $d(v_i) = 3$, то по доказанному одна и только одна из вершин v_{i-1} или v_{i+1} является B-вершиной. Если B-вершиной является v_{i+1}, то из определения отображения π следует, что $\pi(v_i) = \pi(v_{i+1}) = v_{i+1}$. Пусть B-вершиной является вершина v_{i-1}. Тогда по доказанному степень вершины v_{i+1} равна 3 или 4. Если $d(v_{i+1}) = 3$, то в T имеются две смежные 3-вершины v_i и v_{i+1}, что невозможно в триангуляции T, отличной от K_4. Поэтому $d(v_{i+1}) = 4$, и из определения отображения π следует, что $\pi(v_i) = \pi(v_{i+1}) = v_{i-1}$ (рис. 10).

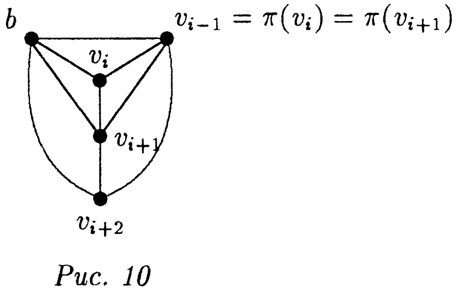


Рис. 10

Пусть $d(v_i)=4$. Если $d(v_{i+1})=3$, то единственной B-вершиной в окружении вершины v_{i+1}, отличной от b, является вершина v_{i+2}. В этом случае из определения отображения π следует, что $\pi(v_i) = \pi(v_{i+1}) = v_{i+2}$. Если $d(v_{i+1})=4$, то $\pi(v_i)=\pi(v_{i+1})$, так как T является триангуляцией.

Докажем, что случай, когда v_{i+1} является B-вершиной, невозможен. Действительно, если v_{i+1} является B-вершиной, то первоначально ребро bv_{i+1} было нулевым, а ребро bv_i — единичным. В этом случае согласно правилу ПУ происходит сброс заряда с ребра bv_i на ребро bv_{i+1}. После этого сброса ребро bv_i перестает быть единичным, что противоречит условиям леммы.

Пусть вершина v_i является B-вершиной. Если $d(v_{i+1}) = 3$, то из определения отображения π следует, что $\pi(v_i) = \pi(v_{i+1}) = v_i$. Случай, когда $d(v_{i+1}) = 4$, невозможен, как было доказано выше. Случай, когда вершина v_{i+1} является B-вершиной, также невозможен, так как в этом случае каждое из ребер bv_i и bv_{i+1} первоначально было нулевым и ни одно из них не может стать единичным в результате усреднения. Итак, мы доказали, что в T имеется такая вершина t, что $\pi(v_i) = t$ при каждом $i = 1, \dots, k$.

Из определения отображения π теперь следует, что ребра $bv_1, \dots, bv_k$ являются последовательными вертикальными ребрами некоторого пучка H ширины не менее k с полюсами в вершинах b и t. Докажем, что t является B-вершиной. Если при некотором $i = 1, \dots, k$ степень вершины v_i отлична от 4, то по определению отображения π вершина $\pi(v_i) = t$ является B-вершиной. Пусть при каждом $i = 1, \dots, k$ степень вершины v_i равна 4. В этом случае вершина v_2 смежна с двумя 4-вершинами v_1 и v_3, а также с вершинами b и t. Отсюда и из свойства (A$'$) следует, что t является B-вершиной.

Так как ширина найденного пучка H с полюсом в B-вершине b не меньше k, то из свойства (B$'$) следует, что $k < d - 1$. Последнее неравенство означает, что в окружении вершины b имеются не принадлежащие предпучку различные ребра bv_d и bv_{k+1}. Докажем, что эти ребра принадлежат пучку H. Достаточно сделать это для ребра bv_d. Если вершина v_1 является B-вершиной, то из определения отображения π следует, что $t = v_1$. В этом случае ребро bv_1 является родительским ребром пучка H, а путь bv_dv_1 — его продолжением. Если $d(v_1) = 4$, то из того, что T является триангуляцией, следует, что путь bv_dt принадлежит пучку H. Пусть $d(v_1) = 3$. Если $t = \pi(v_1) = v_d$, то ребро bv_d является родительским в H. Если же $t = \pi(v_1) = v_2$, то из того, что T является триангуляцией, снова следует принадлежность пути $bv_dv_2 = bv_dt$ пучку H. Лемма 3 доказана.

8. Свойства разделителей

Утверждение 2 (о границе разделителя). *Если в процессе усреднения производится сброс заряда с ребра bv_1 на ребро bv_2, то после усреднения либо ребро bv_2 становится единичным, либо ребра bv_2 и bv_3*

становятся разделительными. В частности, если ребро bv_1 является разделительным, то ребро bv_2 не может быть крайним в разделителе, содержащем ребро bv_1.

Доказательство. Если до усреднения ребро bv_3 не было нулевым, то согласно правилу ПУ с этого ребра производится сброс заряда на ребро bv_2, в результате чего ребро bv_2 становится единичным. Если же до усреднения ребро bv_3 было нулевым, то оно не могло стать единичным, так как на него не сбрасывается заряд с ребра bv_2. В этом случае после усреднения ребра bv_2 и bv_3 становятся разделительными. Утверждение 2 доказано.

Лемма 4 (о половинном разделителе). *После усреднения в окружении вершины b не существует разделителя, состоящего из одного половинного ребра.*

Доказательство. Предположим, что в окружении вершины b имеется разделитель, состоящий из одного половинного ребра bv_3. Тогда из определения разделителя следует, что ребра bv_2 и bv_4 являются единичными.

Случай 1. Ребро bv_3 было половинным до усреднения.

В этом случае из правил П1–П3 следует, что $d(v_3) \in \{4, 5\}$. Если $d(v_3) = 4$, то согласно определению правила П1 по крайней мере одно из ребер bv_2 или bv_4 первоначально было нулевым. При этом такое ребро не может оказаться единичным после усреднения, так как на него не производится сброс заряда с ребра bv_3.

Пусть $d(v_3) = 5$. Так как после усреднения ребра bv_2 и bv_4 оказываются единичными и на них не производится сброс заряда с ребра bv_3, то каждое из указанных ребер до усреднения могло быть либо единичным либо полуторным.

Предположим, что до усреднения ребра bv_2 и bv_4 были единичными. Тогда из утверждения 1 и определения правил П1 и П2 следует, что $d(v_2) = d(v_4) = 4$. В этом случае имеет место конфигурация, изображенная на рис. 11.

Докажем, что степень ровно одной из вершин x и y не меньше 9 (см. рис. 11). Действительно, если $d(x) \leqslant 8$ и $d(y) \leqslant 8$, то в окружении 5-вершины v_3 имеется предполная звезда, определяемая вершинами v_2, v_4, x и y, вес которой не превосходит 24. Если же $d(x) \geqslant 9$ и $d(y) \geqslant 9$, то по правилу П3 (a) ребро bv_3 является нулевым, что противоречит сделанным предположениям. Следовательно, в силу симметрии можно считать, что $d(x) \geqslant 9$ и $d(y) \leqslant 8$. Тогда согласно свойству (A$'$) вершина v_5 является B-вершиной, а ребро bv_5 первоначально было нулевым, так как в противном случае вес предполной звезды при вершине v_4

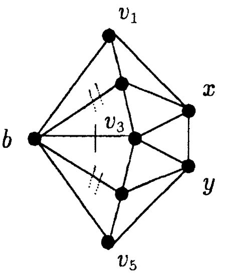


Рис. 11

не превосходит 38. Из доказанного следует, что в процессе усреднения производится сброс заряда с ребра bv_4 на ребро bv_5. В результате ребро bv_4 становится половинным, что противоречит сделанным предположениям.

Рассмотрим случай, когда до усреднения ребро bv_2 было полуторным, а ребро bv_4 — единичным. В этом случае $d(v_2) = 3$ и $d(v_4) = 4$. Это означает (см. рис. 11), что вершина x совпадает с v_1 и является B-вершиной (это следует из определения правила П2 (б)). Далее, как и в ранее рассмотренном случае, если $d(y) \geqslant 9$, то ребро bv_3 является нулевым, а если $d(y) \leqslant 8$, то ребро bv_4 после усреднения становится половинным. Наконец, рассмотрим случай, когда до усреднения ребра bv_2 и bv_4 являются полуторными. В этом случае степени вершин v_2 и v_4 равны 3. Отсюда и из определения правила П2(б) следует, что вершины x и y являются B-вершинами, а ребро bv_3 — нулевым. Полученное противоречие завершает доказательство леммы в случае 1.

Случай 2. Ребро bv_3 становится половинным в результате усреднения.

Предположим, что до усреднения ребро bv_3 было нулевым, а в процессе усреднения на него сбрасывается заряд $\frac{1}{2}$ с ребра bv_2. Тогда из сделанных предположений и определения правила ПУ следует, что вершина v_3 является B-вершиной, а ребро bv_2 до усреднения было полуторным. Если до усреднения ребро bv_4 не было нулевым, то с него также производится сброс заряда на ребро bv_3, в результате чего ребро bv_3 становится единичным. Если же ребро bv_4 первоначально было нулевым, то в результате усреднения оно не может оказаться единичным, поскольку на него не сбрасывается заряд с ребра bv_3.

Предположим, что до усреднения ребро bv_3 было единичным и становится половинным в результате сброса заряда с ребра bv_3 на первоначально нулевое ребро bv_2. Тогда из утверждения (в) леммы 2 и определения правила ПУ следует, что после усреднения ребро bv_4 становится нулевым или половинным, что противоречит сделанным предположениям. Лемма 4 доказана.

Следствие 2. *В окружении вершины b имеется не более 5 разделителей и не более 5 предпучков.*

Доказательство. Определим понятие *величины экономии* для разделительных ребер и разделителей из окружения вершины b. Считаем, что величина экономии нулевого ребра равна 1 (в сравнении с единичным ребром), а величина экономии половинного ребра равна $\frac{1}{2}$. *Величиной экономии* разделителя назовем сумму величин экономии всех входящих в него ребер. Поскольку $\mu^*(b) < 0$, общая сумма экономии по всем разделителям из окружения вершины b не превосходит $5\frac{1}{2}$. Остается заметить, что согласно лемме 4 величина экономии любого разделителя из окружения вершины b не меньше 1. Следствие 2 доказано.

Лемма 5 (о тройном разделителе). *После усреднения в окружении вершины b не существует разделителя, состоящего из трех половинных ребер.*

Доказательство. Предположим, что в окружении вершины b имеется разделитель S, состоящий из трех половинных ребер. Рассмотрим отдельно следующие два случая.

Случай 1. Все ребра разделителя S являются половинными до усреднения.

Докажем, что в этом случае все ребра разделителя инцидентны вершинам степени 5. Действительно, согласно правилу П1 каждое половинное ребро bu, инцидентное вершине u степени 4, расположено в окружении вершины b рядом с некоторым первоначально нулевым ребром bv. При этом если $bu \in S$, то ребро bv не может стать единичным в результате усреднения, так как на него не сбрасывается заряд с ребра bu. Если же в результате усреднения ребро bv становится половинным, то оно также принадлежит S, что противоречит сделанному для случая 1 предположению.

Значит, в разделителе S все ребра инцидентны вершинам степени 5. Не уменьшая общности, можно считать, что S состоит из ребер bv_2, bv_3 и bv_4. При этом имеет место конфигурация, изображенная на рис. 12, *а*.

Таким же образом, как и при доказательстве леммы 4, устанавливаем, что одна и только одна вершина x или y (см. рис. 14) имеет степень не менее 9 (иначе ребро bv_3 не является половинным). То же самое верно и для вершин y и z, а также для x и w. Поэтому в силу симметрии можно считать, что $d(y) \geqslant 9$, $d(w) \geqslant 9$, $d(x) \leqslant 8$ и $d(z) \leqslant 8$ (см. рис. 14, *б*).

Заметим, что единичное ребро bv_5 не может быть нулевым до усреднения, так как на него не сбрасывается заряд с ребра bv_4. Отсюда с учетом утверждения 1 следует, что $d(v_5) \leqslant 4$. Так как $d(v_4) + d(z) \leqslant 13$, то согласно свойству (A$'$) степень вершины v_5 равна 4, причем вершина v_6,

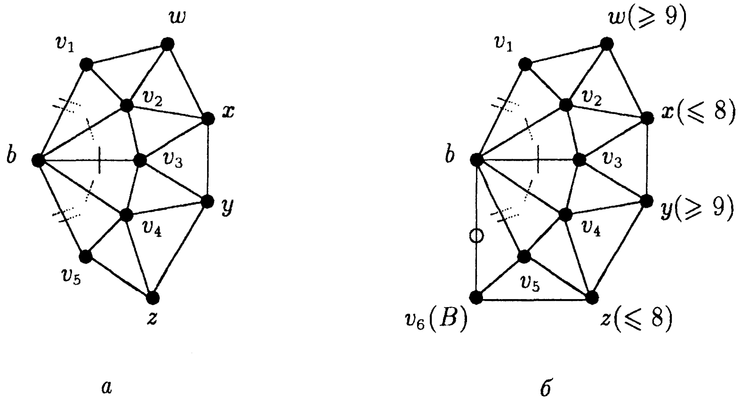


Рис. 12

смежная с v_5, является B-вершиной. В этом случае согласно правилу П1(е) ребро bv_5 первоначально было единичным (рис. 12, *б*). Из сказанного следует, что в процессе усреднения производится сброс заряда с ребра bv_5 на нулевое ребро bv_6, в результате чего ребро bv_5 становится половинным, что противоречит сделанным предположениям.

Случай 2. Какое-то ребро разделителя S становится половинным в результате усреднения.

Если первоначально ребро bv_i является нулевым и становится половинным в результате сброса на него заряда с половинного ребра bv_{i+1}, то после усреднения ребро bv_{i+1} становится нулевым. Отсюда следует, что $bv_i \notin S$.

Пусть ребро bv_2 принадлежит разделителю S и становится половинным в результате сброса на него заряда с полуторного ребра bv_1. В этом случае из определения правила ПУ следует, что v_2 является B-вершиной. Так как после усреднения ребро bv_1 становится единичным, то $S = \{bv_2, bv_3, bv_4\}$. Если до усреднения ребро bv_3 не было нулевым, то с него также сбрасывается заряд на ребро bv_2, в результате чего ребро bv_2 становится единичным. Пусть первоначально ребро bv_3 было нулевым и становится половинным в результате сброса на него заряда с ребра bv_4. Поскольку после усреднения ребра bv_3 и bv_4 становятся половинными, вершина v_3 является B-вершиной, а ребро bv_4 до усреднения было единичным (рис. 13).

Заметим, что сброс заряда с единичного ребра bv_4 на нулевое ребро bv_3 происходит лишь в одном из случаев (i)–(iii), описанных в лемме 2 (в). Нетрудно убедиться, что в каждом из этих случаев после усреднения либо ребро bv_5 оказывается неединичным, либо ребро bv_4 становится нулевым. В любом случае мы не получаем, что $S = \{bv_2, bv_3, bv_4\}$.

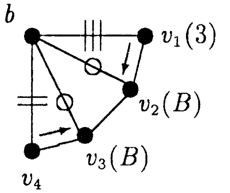


Рис. 13

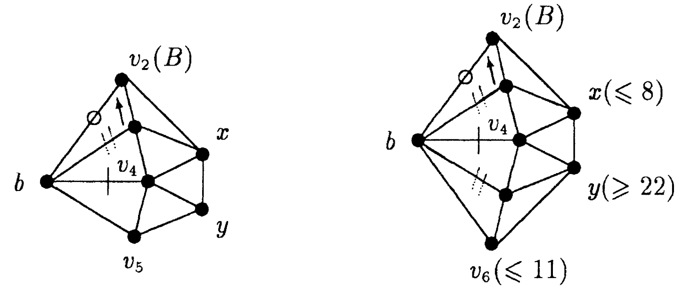
Остается рассмотреть случай, когда какое-то ребро разделителя S становится половинным в результате сброса заряда с единичного ребра bv_3 на нулевое ребро bv_2. Если в результате усреднения ребро bv_2 становится половинным, то либо $S = \{bv_1, bv_2, bv_3\}$, либо $S = \{bv_2, bv_3, bv_4\}$. Если же после усреднения ребро bv_2 становится единичным, то $S = \{bv_3, bv_4, bv_5\}$. Заметим, что случай, когда $S = \{bv_2, bv_3, bv_4\}$, невозможен ввиду утверждения 2. Из утверждения (в) леммы 2 и определения правила ПУ следует, что $S \neq \{bv_1, bv_2, bv_3\}$.

Пусть $S = \{bv_3, bv_4, bv_5\}$, и в результате усреднения ребро bv_2 становится единичным. Согласно утверждению (в) леммы 2 до усреднения ребро bv_4 может быть нулевым, половинным или единичным. При этом в последнем случае вершина v_5 является B-вершиной, а ребро bv_5 до усреднения было нулевым.

Если до усреднения ребро bv_4 было нулевым, то v_4 является L-вершиной, так как в противном случае производится сброс заряда с ребра bv_3 на ребро bv_4, в результате чего ребро bv_3 становится нулевым. В этом случае ребро bv_4 остается нулевым и после усреднения, что противоречит сделанным предположениям.

Допустим, что первоначально ребро bv_4 было единичным. Из утверждения (в) леммы 2 и определения правила ПУ следует, что в процессе усреднения производится сброс заряда с ребра bv_4 на первоначально нулевое ребро bv_5. Тогда из утверждения 2 следует, что ребро bv_5 не является крайним ребром в S, что противоречит сделанным предположениям.

Пусть первоначально ребро bv_4 было половинным. Так как вершина v_4 является младшей, а ребро bv_3 до усреднения было единичным, то из правил П1–П3 следует, что $d(v_3) = 4$. Согласно сделанным предположениям ребро bv_4 является половинным и до и после усреднения, следовательно, $d(v_4) \in \{4, 5\}$. Предположим, что $d(v_4) = 4$. Тогда из правила П1 следует, что $d(v_5) \geqslant 12$ и до усреднения ребро bv_5 было нулевым. Если при этом вершина v_5 является L-вершиной, то ребро bv_5 остается нулевым и после усреднения. Если же v_5 является B-вершиной, то в ходе усреднения происходит сброс заряда с ребра bv_4 на ребро bv_5, в результате чего ребро bv_4 становится нулевым.



а *б*

Рис. 14

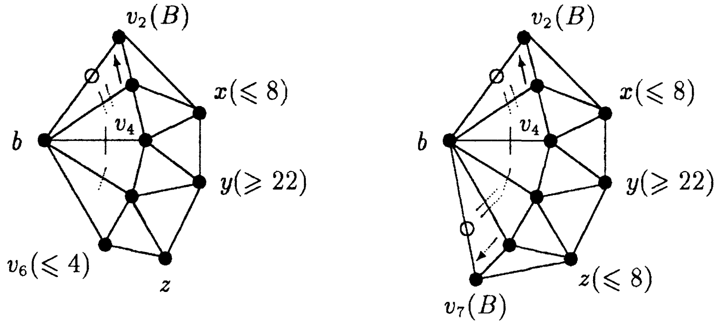
Пусть $d(v_4) = 5$ и имеет место конфигурация, изображенная на рис. 14, *а*.

Поскольку первоначально ребро bv_3 было единичным, из определения правила П1 следует, что $d(x) \leqslant 8$ (рис. 14). Докажем, что вершина v_5 является младшей. Так как сброса заряда с ребра bv_4 на ребро bv_5 не происходит, то v_5 является L-вершиной. Следовательно, ребро bv_5 до усреднения было либо половинным, либо единичным, откуда вершина v_5 является младшей. Из доказанного выше следует, что $d(v_3) = 4$ и $d(x) \leqslant 8$, а из свойства (A$'$) для вершины v_4, — что $d(y) \geqslant 22$.

Как уже было доказано, до усреднения ребро bv_5 может быть лишь половинным или единичным. Если до усреднения ребро bv_5 было единичным, то из определения правил П1–П3 следует, что $d(v_5) = 4$ (так как соседняя с вершиной v_5 в окружении b вершина v_4 имеет степень 5). Из того, что ребро bv_5 является единичным, согласно правилу П1 следует, что степень вершины v_6, смежной с v_5, не превосходит 11 (рис. 14, *б*). В этом случае не происходит сброса заряда с ребра bv_5 на ребро bv_6 и ребро bv_5 остается единичным после усреднения, что противоречит сделанным предположениям.

Предположим, что первоначально ребро bv_5 является половинным. Если $d(v_5) = 4$, то согласно правилу П1 ребро bv_6 до усреднения было нулевым. При этом ребро bv_6 не может стать единичным в результате усреднения, так как на него не сбрасывается заряд с ребра bv_5. Предположим, что $d(v_5) = 5$. Поскольку после усреднения ребро bv_6 является единичным и сброса заряда с ребра bv_5 на ребро bv_6 не происходит, из утверждения 1 следует, что $d(v_6) \leqslant 4$ (рис. 15, *а*).

Так как первоначально ребро bv_5 является половинным, то из определения правила П3 следует, что степень вершины z на рис. 15 не превосходит 8. Отсюда с учетом свойства (A$'$) для вершины v_6 и доказанного неравенства $d(v_5) + d(z) \leqslant 13$, получаем, что $d(v_6) \neq 3$. Следовательно, $d(v_6) = 4$, причем вершина v_7, смежная с v_6, отлична от z и является



а *б*

Рис. 15

B-вершиной. Наконец, согласно правилу П1(е) ребро bv_6 первоначально было единичным (рис. 15, *б*). Отсюда следует, что в процессе усреднения производится сброс заряда с единичного ребра bv_6 на нулевое ребро bv_7, в результате чего ребро bv_6 становится половинным. Из полученного противоречия следует справедливость утверждения леммы. Лемма 5 доказана.

9. Завершение доказательства теоремы 1

Лемма 6 (основная). *В окружении вершины b имеется ровно 5 разделителей и 5 пучков, ограниченных этими разделителями. При этом ширина каждого разделителя равна 2 и среди разделительных ребер не более одного нулевого.*

Доказательство. Согласно следствию 2 число разделителей в окружении вершины b не превосходит 5. Из (4) следует, что число разделительных ребер не превосходит 11, откуда число единичных ребер не меньше $d - 11$.

Докажем, что любые 4 предпучка из окружения вершины b содержат в совокупности не более $d-14$ единичных ребер. Предположим, что это неверно. Тогда в окружении вершины b найдется предпучок ширины не менее $\lceil (d-13)/4 \rceil$. Согласно лемме 3 этот предпучок является частью некоторого пучка ширины не менее $\lceil (d-13)/4 \rceil + 2$ с полюсом в вершине b. Поскольку $d(b) \geqslant 26$, то $\lceil (d-13)/4 \rceil + 2 > d/5$, что противоречит свойству (B$'$). Из полученного противоречия следует, что в окружении вершины b имеется ровно 5 предпучков и 5 разделителей. Кроме того, ширина любого предпучка не меньше 3. Отсюда и из леммы 3 следует, что каждый предпучок является частью некоторого пучка, т. е. в окружении вершины b имеется ровно 5 пучков и 5 разделителей.

Докажем, что ширина каждого разделителя равна 2. Воспользуемся понятием экономии, введенным при доказательстве следствия 2. Из леммы 5 следует, что любой разделитель ширины больше 2 экономит не менее двух единиц заряда. В случае существования такого разделителя суммарная величина экономии по всем пяти разделителям из окружения вершины b оказывается не меньше 6, что противоречит условию $\mu^*(b) < 0$. Следовательно, ширина любого разделителя не превосходит 2. Предположим, что некоторый разделитель имеет ширину 1 (т. е. состоит из одного ребра). Тогда из леммы 3 следует, что сумма ширин всех 5 пучков из окружения вершины b превосходит d. В таком случае найдется пучок ширины больше $d/5$, что противоречит свойству (B$'$).

Остается заметить, что, как следует из неравенства (4), среди 10 разделительных ребер в окружении вершины b может быть не более одного нулевого. Лемма 6 доказана.

Согласно лемме 6 в окружении вершины b имеется ровно 5 пучков, сумма ширин которых не меньше d. Если не все пучки имеют одинаковую ширину, то найдется пучок ширины больше $d/5$, что противоречит свойству (B$'$). Поэтому можно считать, что все пучки имеют одинаковую ширину, равную $d/5$, и ни один пучок не имеет родительского ребра (иначе выполняется вторая часть утверждения (B) теоремы). При этом каждое разделительное ребро из окружения вершины b является граничным ребром ровно для одного пучка.

Из доказательства леммы 3 следует, что каждое единичное ребро из окружения вершины b, инцидентное двум B-вершинам, является родительским ребром для некоторого пучка. Из этого же доказательства следует, что если некоторый пучок содержит пучковую вершину степени 3, то он содержит и родительское ребро. Следовательно, можно считать, что каждое единичное ребро из окружения вершины b инцидентно вершине степени 4. Тогда из определения правил П1 и ПУ следует, что все единичные ребра из окружения вершины b являются единичными и до и после усреднения.

Более того, не происходит ни одного применения правила ПУ по отношению к ребрам из окружения вершины b. Действительно, для единичных ребер это было доказано, а для разделительных следует из леммы 6 и определения правила ПУ.

Докажем, что каждое половинное ребро из окружения вершины b инцидентно вершине степени 5. Предположим, напротив, что в разделителе, состоящем из ребер bv_1 и bv_2, ребро bv_2 является половинным и $d(v_2) = 4$. Тогда из того, что T — триангуляция, следует, что вершина v_2 является внутренней в пучке H, содержащем вершину v_3 в качестве пучковой вершины (см. доказательство леммы 3). В этом случае

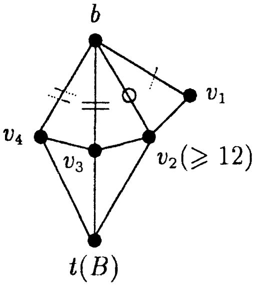


Рис. 16

ребро bv_2 не является граничным в H, а ширина пучка H оказывается больше $d/5$. Из полученного противоречия следует, что каждое половинное ребро из окружения вершины b инцидентно вершине степени 5, причем эта вершина является концевой в некотором единственном пучке. Тем самым доказано, что если все разделительные ребра из окружения вершины b являются половинными, то выполняется заключительная часть утверждения (В) теоремы.

Теперь, учитывая результат леммы 6, рассмотрим случай, когда в окружении вершины b имеется разделитель, состоящий из половинного ребра bv_1 и нулевого ребра bv_2. Если $d(v_2) \leqslant 11$, то снова выполняется заключительная часть утверждения (В) теоремы. Поэтому будем считать, что $d(v_2) \geqslant 12$. Тогда по доказанному имеем $d(v_1) = 5$ и $d(v_3) = d(v_4) = 4$. При этом вершины v_3 и v_4 являются внутренними, а вершина v_2 — концевой в некотором пучке, один полюс которого находится в вершине b, а другой — в некоторой B-вершине t (рис. 16).

Остается заметить, что в этом случае согласно правилу П1 (б) ребро bv_3 должно быть половинным, что противоречит сделанным предположениям. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В.** Раскраски и топологические представления графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 3–27.

2. **Jendrol S., Madaras T., Soták R., Tuza Z.** On light cycles in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 197/198. P. 453–467.

3. **Borodin O. V., Woodall D. R.** Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.

4. **Borodin O. V.** Triangulated 3-polytopes without faces of low weight // Discrete Math. 1998. V. 186, N 1–3. P. 281–285.

Статья поступила
10 марта 2001 г.

Адреса авторов:

О. В. Бородин, А. Н. Глебов
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: borodin@math.nsc.ru
H. Broersma
University of Twente,
Enschede, Netherlands.
E-mail:
broersma@math.utwente.nl
Jan van den Heuvel
Centre for Discrete
and Applicable Mathematics,
Dep. of Mathematics London
School of Economics,
Houghton Street,
London WC2A 2AE, U. K.