ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2001. Серия 1. Том 8, № 2, 40–51

УДК 519.174

ИНТЕРВАЛЬНАЯ РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ ОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг

При интервальной p-раскраске инциденторов ориентированного мультиграфа смежные инциденторы окрашиваются в различные цвета, разность между цветами конечного и начального инциденторов каждой дуги не меньше p и цвета инциденторов, примыкающих к одной и той же вершине, образуют интервал. Рассматриваются вопросы существования интервальной p-раскраски инциденторов; оценивается необходимое число цветов. Наиболее подробно изучается случай $p = 0$.

Введение

В ряде работ изучается интервальная раскраска ребер неориентированного мультиграфа [1, 10–12]. Задача интервальной раскраски ребер возникает при составлении расписания сеансов связи между узлами сети [13]. При этом цвета интерпретируются как дискретные моменты времени и требуется, чтобы каждый узел, включившись, осуществил все необходимые связи без простоев.

Задача интервальной раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа имеет аналогичную интерпретацию. Хотя толчком к изучению раскраски инциденторов явилась практическая проблема [8] и раскраска инциденторов изучалась в работах [2–4, 8, 9, 14, 16], интервальная раскраска инциденторов рассматривается впервые.

1. Основные понятия

Не определяемые в статье понятия можно найти в [5–7].

Под мультиграфом $G = (V, A)$ понимается конечный ориентированный мультиграф без петель с непустыми множествами вершин $V = V(G)$ и дуг $A = A(G)$. Через $d_G(v)$, $d_G^+(v)$, $d_G^-(v)$ обозначаются соответственно степень, полустепень исхода и полустепень захода вершины $v \in (V(G)$. Мы будем писать $d(v)$, $d^+(v)$, $d^-(v)$, опуская индекс G, если это не приводит к недоразумению.

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект INTAS–OPEN–97–1001).

Вершина $v \in V(G)$ называется *двубокой,* если $d^+(v) \cdot d^-(v) > 0$. Если же $d^+(v) \cdot d^-(v) = 0$, то вершина называется *однобокой*; однобокая вершина называется *источником,* если $d^+(v) > 0$, и стоком, если $d^-(v) > 0$.

Максимальные значения величин $d(v)$, $d^+(v)$, $d^-(v)$ в мультиграфе G обозначаются через $\Delta(G)$, $\Delta^+(G)$, $\Delta^-(G)$ соответственно.

Каждая дуга $(a) = (\overrightarrow{u,a})$ имеет два *инцидентора*: *начальный* $i_1(a) = (u, a)$ и *конечный* $i_2(a) = (v, a)$. Будем говорить, что инцидентор i_1 *примыкает* к вершине u, а инцидентор i_2 — к вершине v. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначается через $I(G)$. Различные инциденторы, примыкающие к одной и той же вершине, называются *смежными.*

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество этих чисел обозначим через C. *Полная раскраска инциденторов мультиграфа* G — это однозначное отображение $I(G)$ в C.

Мы будем рассматривать и *частичные раскраски,* т. е. однозначные отображения подмножеств из $I(G)$ в C.

Пусть $h, f \in C$ и $h \leqslant f$. Под *интервалом* $[h, f]$ понимается подмножество всех цветов $c \in C$, удовлетворяющих неравенствам $h \leqslant c \leqslant f$; величина $f - h + 1$ называется *длиной* интервала.

Пусть p — целое неотрицательное число.

Определение 1. (Частичная или полная) раскраска φ инциденторов мультиграфа $G = (V, A)$ называется *p-раскраской,* если

a) инциденторы раскрашены *правильно*, т. е. смежные инциденторы окрашены в разные цвета;

b) оба окрашенные инцидентора произвольной дуги окрашены *с шагом p*, т. е. $\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e)) \geqslant p$.

Через $\chi I(p, G)$ обозначается наименьшее натуральное k такое, что существует полная p-раскраска инциденторов цветами из интервала $[1, k]$. Число $\chi I(p, G)$ называется *инциденторным p-шаговым хроматическим числом* мультиграфа G.

Пусть имеется раскраска инциденторов мультиграфа G в цвета из конечного множества $C_1 \subseteq C$. Будем говорить, что цвет $c \in C_1$ *присутствует* в вершине $v \in V(G)$, если хотя бы один инцидентор, примыкающий к v, окрашен в цвет c. В противном случае цвет c называется *отсутствующим* в вершине v.

Определение 2. Раскраска инциденторов мультиграфа называется *интервальной,* если множество цветов, присутствующих в каждой вершине, образует интервал. Наименьшее натуральное k такое, что существует интервальная полная p-раскраска инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, k]$, называется *интервальным инциденторным*

p-шаговым хроматическим числом мультиграфа G и обозначается через $\gamma(p, G)$.

Очевидно, что $\Delta(G) \leqslant \chi I(p, G) \leqslant \gamma(p, G)$.

Определение 3. Раскраска инциденторов мультиграфа G называется *нормальной,* если цвет любого начального инцидентора, примыкающего к произвольной вершине, меньше цвета любого конечного инцидентора, примыкающего к той же вершине.

Легко видеть, как от (интервальной) p-раскраски инциденторов перейти к нормальной (интервальной) p-раскраске инциденторов с теми же множествами цветов, присутствующих в каждой вершине.

2. Существование интервальной p-раскраски

Теорема 1. *Для любого мультиграфа G существует полная интервальная 1-раскраска инциденторов. При этом*

$$\gamma(1, G) \leqslant \Delta^+(G) + \Delta^-(G). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $C_1 = [1, \Delta^+(G)]$ и $C_2 = [\Delta^+(G) + 1, \Delta^+(G) + \Delta^-(G)]$ — два подмножества цветов. Раскрасим инциденторы мультиграфа G в произвольном порядке следующим образом. Берём неокрашенный инцидентор i, пусть он примыкает к вершине v. Если i — начальный инцидентор, то окрашиваем его в наибольший цвет из C_1, отсутствующий в вершине v; такой цвет существует, ибо $d^+(v) - 1 < \Delta^+(G) = |C_1|$. Если же i — конечный инцидентор, то окрашиваем его в наименьший цвет из множества C_2, отсутствующий в вершине v; такой цвет существует, ибо $d^-(v) - 1 < |C_2|$. После окраски указанным способом всех инциденторов получим полную интервальную 1-раскраску инциденторов мультиграфа G с использованием $\Delta^+(G) + \Delta^-(G)$ цветов. Теорема 1 доказана.

Так как 1-раскраска является и 0-раскраской инциденторов, то существование полной интервальной 0-раскраски инциденторов произвольного мультиграфа G вытекает из теоремы 1, причём верхняя оценка (1) справедлива и для $\gamma(0, G)$. Эту оценку можно уточнить.

Лемма 1. *Если $\gamma(1, G) > \Delta(G)$, то $\gamma(0, G) \leqslant \gamma(1, G) - 1$.*

Доказательство. Пусть φ — полная интервальная 1-раскраска инциденторов мультиграфа G в $\gamma(1, G)$ цветов, V_1 — подмножество вершин, в каждой из которых присутствует хотя бы один цвет, больший $\Delta(G)$. Так как φ — интервальная раскраска, то в каждой вершине множества V_1 отсутствует цвет 1. Уменьшим на 1 цвета всех инциденторов, примыкающих к вершинам множества V_1. Полученную полную интервальную раскраску инциденторов в $\gamma(1, G) - 1$ цветов обозначим через ψ.

Покажем, что ψ является 0-раскраской. Действительно, для любой дуги $a \in A(G)$ имеем $\psi(i_2(a)) \geqslant \varphi(i_2(a)) - 1$ и $\psi(i_1(a)) \leqslant \varphi(i_1(a))$. Поэтому $\psi(i_2(a)) - \psi(i_1(a)) \geqslant \varphi(i_2(a)) - 1 - \varphi(i_1(a)) \geqslant 1 - 1 = 0$. Лемма 1 доказана.

Таким образом, если $\gamma(1, G) = \Delta(G)$, то $\gamma(0, G) = \gamma(1, G) = \Delta(G) \leqslant 2\Delta(G) - 1$. Если же $\gamma(1, G) > \Delta(G)$, то $\gamma(0, G) \leqslant \gamma(1, G) - 1 \leqslant \Delta^+(G) + \Delta^-(G) - 1 \leqslant 2\Delta(G) - 1$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для любого мультиграфа G существует полная интервальная 0-раскраска его инциденторов. При этом*

$$\gamma(0, G) \leqslant \max\{\Delta(G), \Delta^+(G) + \Delta^-(G) - 1\} \leqslant 2\Delta(G) - 1. \tag{2}$$

При $p \geqslant 2$ полная интервальная p-раскраска инциденторов существует не для всех мультиграфов. Легко убедиться в отсутствии такой раскраски при любом $p \geqslant 2$ для мультиграфа, являющегося простым ориентированным циклом (простым контуром). Вместе с тем справедлива следующая

Теорема 3. *Если в мультиграфе $G = (V, A)$ нет контуров, то при любом $p \geqslant 2$ существует полная интервальная раскраска его инциденторов. При этом*

$$\gamma(p, G) \leqslant \Delta^+(G) + \Delta^-(G) + l(p - 1), \tag{3}$$

где l — длина максимального пути в мультиграфе G.

Доказательство. Так как G — бесконтурный мультиграф и l — длина максимального пути в G, то множество V разбивается на непересекающиеся подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_l$, где V_0 — множество источников, а подмножество V_j, $1 \leqslant j \leqslant l$, состоит из вершин, в которые заходят только дуги, исходящие из вершин множества $\bigcup\limits_{r=0}^{j-1} V_r$. Окрашиваем инциденторы мультиграфа G в произвольном порядке, руководствуясь следующим правилом. Пусть i — очередной рассматриваемый неокрашенный инцидентор, примыкающий к вершине $v \in V_k$ $(0 \leqslant k \leqslant l)$. Если i — начальный инцидентор, то окрашиваем его в наибольший цвет, который не превосходит $\Delta^+(G) + k(p - 1)$ и отсутствует в вершине v. Если i — конечный инцидентор, то окрашиваем его в наименьший цвет, больший $\Delta^+(G) + k(p - 1)$, отсутствующий в вершине v. После окраски всех инциденторов мы получим полную интервальную раскраску φ инциденторов мультиграфа G. Покажем, что G является p-раскраской. Действительно, пусть $a = (\overrightarrow{v'v''}) \in A$ — произвольная дуга, $v' \in V_S$, $v'' \in V_t (0 \leqslant s < t \leqslant l)$. Тогда $\varphi(i_1(a)) \leqslant \Delta^+(G) + s(p - 1)$, $\varphi(i_2(a)) > \Delta^+(G) + t(p - 1)$. Поэтому $\varphi(i_2(a)) - \varphi(i_1(a)) > \Delta^+(G) + t(p - 1) - \Delta^+(G) - s(p - 1) \geqslant p - 1$, т. е. $\varphi(i_2(a)) - \varphi(i_1(a)) \geqslant p$. Таким образом, φ — полная интервальная

p-раскраска инциденторов. Очевидно, что наибольший цвет, используемый при раскраске φ, не больше $\Delta^+(G) + l(p-1) + \Delta^-(G)$, откуда и вытекает (3). Теорема 3 доказана.

Нам понадобится следующий факт, относящийся к частичной интервальной p-раскраске инциденторов.

Теорема 4. *Пусть $G = (V, A)$ — ориентированный мультиграф, $M \subseteq I(G)$ — подмножество его инциденторов. Тогда для существования p-раскраски всех инциденторов из M в L цветов необходимо и достаточно, чтобы существовала такая p-раскраска всех инциденторов из M в L цветов, при которой присутствующие в любой двубокой вершине цвета образуют интервал.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из следующего факта: если при p-раскраске всех инциденторов из M в L цветов окажется, что цвета, примыкающие к какой-либо однобокой вершине инциденторов, не образуют интервала, то, увеличив в случае стока или уменьшив в случае источника цвета некоторых из примыкающих инциденторов, всегда можно добиться без увеличения числа L используемых цветов, чтобы присутствующие в указанной однобокой вершине цвета образовывали интервал. Теорема 4 доказана.

В дальнейшем рассматривается только интервальная 0-раскраска инциденторов. Что касается случая $p \neq 0$, то остаются открытыми вопросы, связанные с возможностью уточнения оценок (1) и (3), а также с нахождением отличных от содержащегося в теореме 3 условия существования полной интервальной p-раскраски инциденторов при $p \geqslant 2$.

3. Интервальная 0-раскраска при $\Delta(G) \leqslant 4$

В этом параграфе мы докажем, что если $\Delta(G) \leqslant 4$, то $\gamma(0, G) = \Delta(G)$.

Определение 4. Пусть q — натуральное число. Мультиграф K называется *q-критическим,* если $\Delta(K) \leqslant q$, $\gamma(0, K) > q$ и для любого мультиграфа H с $\Delta(H) \leqslant q$ и меньшим числом ребер, чем в K, выполняется неравенство $\gamma(0, H) < \gamma(0, K)$.

Известно [3, 8, 9], что для любого мультиграфа G выполняется равенство $\chi I(0, G) = \Delta(G)$. В случае $\Delta(G) \leqslant 2$ любая полная 0-раскраска инциденторов мультиграфа G в $\Delta(G)$ цветов является, очевидно, интервальной. Поэтому $\gamma(0, G) = \Delta(G)$ при $\Delta(G) \leqslant 2$. Следовательно, при $q \leqslant 2$ нет q-критических мультиграфов.

Лемма 2. *В q-критическом мультиграфе ($q \geqslant 3$) нет вершин степени 1, а также двубоких вершин степени 2.*

Доказательство. Отсутствие вершин степени 1 в критическом мультиграфе очевидно. Предположим, что в q-критическом мультиграфе K с $\gamma(0,K) = T > q$ существует двубокая вершина v степени 2, и пусть $a_1 = (\overrightarrow{v_1, v})$, $a_2 = (\overrightarrow{v, v_2})$ — дуги, инцидентные вершине v. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $v_1 = v_2$. Удалим из K дуги a_1 и a_2 и построим полную интервальную 0-раскраску инцидентов оставшегося мультиграфа H в цвета из множества $[1, T-1]$. Так как $d_H(v_1) \leqslant q - 2 \leqslant T - 3$, то существуют два таких отсутствующих в вершине v_1 цвета j_1 и j_2, где $j_1 < j_2$ и $j_1, j_2 \in [1, T-1]$, что добавление их к цветам, присутствующим в вершине v_1, образует интервал. Окрасим начальные инциденторы дуг a_1 и a_2 в цвет j_1, конечный инцидентор дуги a_2 в цвет j_2, а конечный инцидентор дуги a_1 в цвет $j_1 + 1$, оставив без изменения цвета инциденторов, принадлежащих мультиграфу H. В результате получим полную интервальную 0-раскраску инциденторов мультиграфа K в цвета из множества $[1, T-1]$, что противоречит равенству $\gamma(0,K) = T$.

Случай 2. $v_1 \neq v_2$. Удалим из K дуги a_1, a_2 и добавим дугу $a_3 = (\overrightarrow{v_1, v_2})$. Получится мультиграф H с меньшим числом дуг и с $\Delta(H) \leqslant q$. Поэтому $\gamma(0,H) \leqslant T - 1$. Построим полную интервальную 0-раскраску инциденторов мультиграфа H в цвета из множества $[1, T-1]$. Пусть начальный инцидентор дуги a_3 окрасится в цвет j_1, конечный — в цвет j_2 $(1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant T-1)$. Уберём из H дугу $a_3 = (\overrightarrow{v_1, v_2})$ и восстановим дуги a_1 и a_2. Получим мультиграф K с неполной 0-раскраской инциденторов. Теперь окрасим начальный инцидентор дуги a_1 в цвет j_1, а конечный инцидентор дуги a_2 в цвет j_2. Затем, если $j_2 = T - 1 \geqslant 3$, окрасим конечный инцидентор дуги a_1 в цвет j_2, а начальный инцидентор дуги a_2 в цвет $j_2 - 1$. Если же $j_2 \leqslant T-2$, то окрасим конечный инцидентор дуги a_1 в цвет $j_2 + 1$, а начальный инцидентор дуги a_2 в цвет j_2. В результате получим полную интервальную 0-раскраску инциденторов мультиграфа K с использованием $T - 1$ цвета, что невозможно. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если* $\Delta(G) = 3$, *то* $\gamma(0,G) = 3$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\gamma(0,G) \geqslant 4$. Тогда существует 3-критический мультиграф K. Кроме вершин степени 3 в K могут присутствовать только однобокие вершины степени 2. Построим полную 0-раскраску инциденторов в K тремя цветами; такая раскраска существует, ибо $\Delta(K) \leqslant 3$. При этой раскраске цвета, присутствующие в любой двубокой вершине (которая обязательно имеет степень 3), образуют интервал. По теореме 4 существует полная интервальная 0-раскраска инциденторов в 3 цвета, что противоречит неравенству $\gamma(0,G) \geqslant 3$. Лемма 3 доказана.

Напомним, что фактором мультиграфа $G(V,E)$ называется мультиграф $F=(V,E')$, где $E'\subseteq E$ [5, 6]. Теорема Петерсона [15] утверждает, что однородный мультиграф чётной степени $2k$ можно представить в виде объединения k однородных факторов степени 2.

Лемма 4. *Если* $\Delta(G)=4$, *то* $\gamma(0,G)=4$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\gamma(0,G)>4$. Тогда существует 4-критический мультиграф $K=(V,E)$ такой, что $\Delta(K)=4$. Представим мультиграф K в виде объединения двух факторов: $F_1=(V,E_1)$ и $F_2=(V,E_2)$, где $E_1\cap E_2=\varnothing$, $\Delta(F_j)=2$ при $j=1,2$. Возможность такого представления мультиграфа K вытекает из теоремы Петерсона. Построим полную 0-раскраску инциденторов мультиграфа F_2 в цвета 2 и 3, затем осуществим 0-раскраску специального вида инциденторов мультиграфа F_1 в цвета 1 и 4.

Сначала введём понятие прямой и обратной дуги мультиграфа F_1. Зафиксируем направление обхода каждой компоненты связности фактора F_1. Дуги в F_1, направления которых совпадают с направлением обхода, будем называть *прямыми*; остальные дуги фактора F_1 назовём *обратными.*

Начальные инциденторы всех прямых дуг фактора F_1 окрасим в цвет 1, конечные инциденторы всех обратных дуг — в цвет 4. Остальные инциденторы в F_1 окрасим в цвета 1 и 4 так, чтобы получилась полная правильная раскраска инциденторов мультиграфа F_1. Это всегда можно сделать, так как $\Delta(F_1)=2$.

После раскраски инциденторов в F_1 и F_2 получим полную 0-раскраску инциденторов мультиграфа K. Покажем, что перекраской конечных инциденторов прямых дуг и начальных инциденторов обратных дуг фактора F_1 можно добиться такой 0-раскраски инциденторов мультиграфа K, при которой множество цветов, присутствующих в каждой двубокой вершине степени 3, окажется интервалом. Действительно, пусть V' — подмножество таких двубоких вершин степени 3 в мультиграфе K, в каждой из которых множество присутствующих цветов не является интервалом. Обозначим через $\alpha(v)$, где $v\in V'$, тот цвет из множества $\{2,3\}$, который отсутствует в вершине v. Легко видеть, что к каждой вершине из V' примыкает либо конечный инцидентор прямой дуги, либо начальный инцидентор обратной дуги фактора F_1. Такие инциденторы назовем *особыми.* Перекрасив в цвет $\alpha(v)$ каждый особый инцидентор, примыкающий к вершине $\{2,3\}$, получим полную 0-раскраску инциденторов мультиграфа K в 4 цвета, при которой присутствующие в любой двубокой вершине цвета образуют интервал. В силу теоремы 4 это означает, что $\gamma(0,K)\leqslant 4$, что невозможно. Лемма 4 доказана.

Изложенные в этом разделе факты можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 5. *Если* $\Delta(G) \leqslant 4$, *то* $\gamma(0, G) = \Delta(G)$.

Вопрос о том, справедливо ли равенство $\gamma(0, G) = \Delta(G)$ при $5 \leqslant \Delta(G) \leqslant 7$, остаётся открытым.

4. Уточнение оценок для $\gamma(0, G)$

Для любого натурального m обозначим через $g(m)$ наименьшее натуральное такое, что $\gamma(0, G) \leqslant g(m)$ для любого мультиграфа G с $\Delta(G) \leqslant m$. Очевидно, что функция $g(m)$ не убывает и $g(m) \geqslant m$. Выше установлено, что $g(m) = m$ при $m \leqslant 4$. Из (2) вытекает, что $g(m) \leqslant 2m - 1$. Эта оценка будет улучшена и при $m \geqslant 5$.

Лемма 5. *Пусть имеется интервальная* 0*-раскраска* φ *в цвета из интервала* $[h, f]$ *некоторого подмножества* M *инциденторов мультиграфа* $G = (V, A)$, *и пусть к каждой вершине* $v \in V$ *примыкает не более* t *инциденторов множества* $M, t \leqslant f - h + 1$. *Тогда существует такая интервальная* 0*-раскраска* ψ *всех инциденторов множества* M *в цвета из* $[h, f]$, *при которой цвет любого начального инцидентора не превосходит* $h + t - 1$.

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что φ — нормальная раскраска. Пусть $V_0 \subseteq V$ — подмножество тех вершин, к которым примыкают начальные инциденторы, окрашенные в цвета, бо́льшие, чем $h+t-1$. Если $V_0 = \varnothing$, то лемма доказана. Если $V_0 \neq \varnothing$, то для каждой вершины $v \in V_0$ обозначим через $\alpha(v)$ наибольший цвет примыкающего к ней начального инцидентора и уменьшим на $\alpha(v) - (h + t - 1)$ цвета всех примыкающих к v инциденторов. Легко видеть, что полученная в результате раскраска ψ будет искомой. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *При любом натуральном* $k \geqslant 4$ *справедливо неравенство*

$$g(k + 1) \leqslant g(k) + 2. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим противное: пусть существует мультиграф G с $\Delta(G) \leqslant k+1$ и $\gamma(0, G) \geqslant g(k)+3$. Так как $\gamma(0, G) > g(k)$, то $\Delta(G) = k + 1$. Обозначим через V_1 множество источников степени $k + 1$, через V_2 множество остальных вершин степени $k + 1$ мультиграфа G. Так как $\Delta(G) = k + 1$, то $V_1 \cup V_2 \neq \varnothing$. Для каждой вершины из V_1 (если $V_1 \neq \varnothing$) отметим один начальный инцидентор, примыкающий к этой вершине, для каждой вершины из V_2 (если $V_2 \neq \varnothing$) отметим один примыкающий к ней конечный инцидентор. Множество так отмеченных инциденторов обозначим через R и положим $Q = I(G) \setminus R$. Так как

к каждой вершине мультиграфа G примыкает не более k инциденторов, то, очевидно, существует интервальная 0-раскраска всех инциденторов из множества Q с использованием $g(k)$ цветов из интервала $[2, g(k)+1]$. По лемме 5 возможна такая интервальная 0-раскраска ψ всех инциденторов множества Q цветами из интервала $[2, g(k)+1]$, при которой цвета всех начальных инциденторов не больше чем $k+1$.

Теперь приступим к раскраске инциденторов множества R цветами из интервала $[1, g(k)+2]$. Начальные инциденторы множества R (если они есть) окрашиваем в цвет 1. Конечные инциденторы множества R (если они есть) окрашиваем, руководствуясь правилом: конечный инцидентор множества R, примыкающий к вершине v, окрашиваем цветом $c+1$, где c — наибольший из цветов, присутствующих в вершине v. Очевидно, что $k+2 \leqslant c+1 \leqslant g(k)+2$. После раскраски всех инциденторов множества R получим полную интервальную 0-раскраску инциденторов мультиграфа G в цвета из интервала $[1, g(k)+2]$, что противоречит неравенству $\gamma(0, G) \geqslant g(k)+3$. Лемма 6 доказана.

Из леммы 6 и равенства $g(4)=4$ вытекает

Теорема 6. *При $m \geqslant 5$ справедливо неравенство $g(m) \leqslant 2m-4$. Иными словами, если $\Delta(G) \geqslant 5$, то $\gamma(0, G) \leqslant 2\,\Delta(G)-4$.*

Теперь займёмся нижней оценкой для $g(m)$. Как уже отмечалось, мы не знаем, имеет ли место равенство $g(m)=m$ при $5 \leqslant m \leqslant 7$. Для остальных m справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть $m \geqslant 8$ и $r = \lfloor\sqrt{m}\rfloor$. Тогда*

$$g(m)\begin{cases} 2m-2r-1, & \text{если } m=r^2; \\ 2m-2r-2, & \text{если } r^2+1 \leqslant m \leqslant r_2+r; \\ 2m-2r-3, & \text{если } r^2+r+1 \leqslant m \leqslant (r+1)^2-1. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случаи $m=r^2$ и $m=r^2+r$. Так как $m \geqslant 8$, то $r \geqslant 3$. При таких m построим мультиграфы H_m, изображенные на рис. 1 и 2, где в каждом исходящем из y пучке параллельных дуг имеется ровно r дуг.

В обоих случаях $\Delta(H_m)=m$.

Рассмотрим полную интервальную 0-раскраску инциденторов мультиграфа H_m в случае $m=r^2$. Так как к вершине y примыкает r^2 начальных инциденторов, то один из них получит цвет, не меньший r^2. Следовательно, найдётся вершина y_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$, к которой примыкает конечный инцидентор, имеющий цвет, не меньший r^2. Так как $d(y_j)=r+1$, то единственный начальный инцидентор, примыкающий к y_j, имеет цвет, не меньший r^2-r. Значит, к x примыкает конечный инцидентор с цветом, не меньшим r^2-r, а начальный инцидентор,

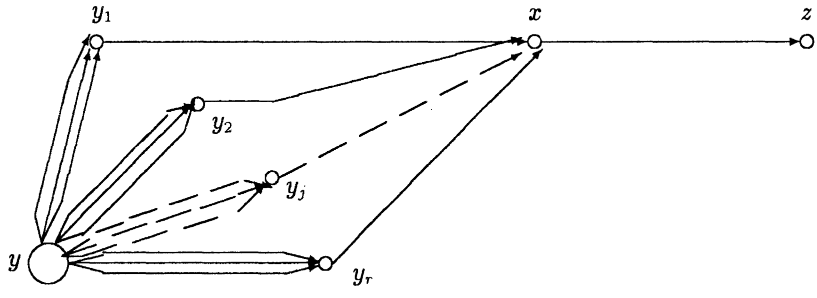

Рис. 1. Мультиграф H_m при $m = r^2$

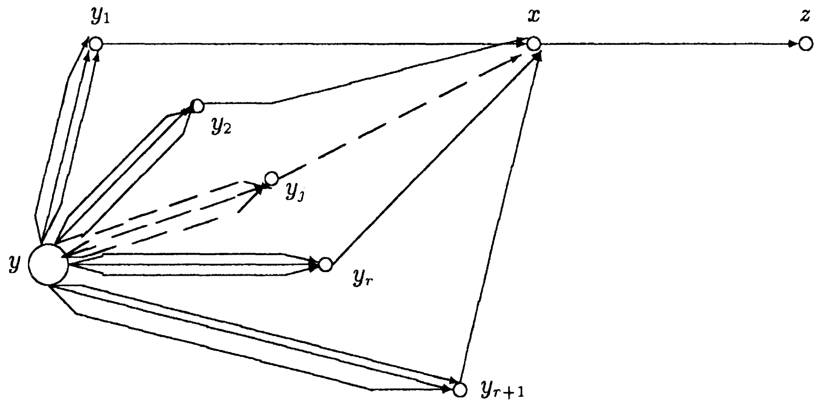

Рис. 2. Мультиграф H_m при $m = r^2 + r$

примыкающий к x, имеет цвет, не меньший $r^2 - 2r$. Таким образом, к вершине z примыкает конечный инцидентор, имеющий цвет, не меньший $r^2 - 2r$.

Аналогично в случае $m = r^2 + r$ при любой полной интервальной 0-раскраске инциденторов мультиграфа H_m конечный инцидентор, примыкающий к вершине z, имеет цвет, не меньший $r^2 - r - 1$.

Теперь в каждом из рассматриваемых случаев возьмём m экземпляров мультиграфа H_m и «склеим» их в вершине z. Полученный мультиграф обозначим через G_m. Ясно, что $\Delta(G_m) = m$. Построим полную интервальную 0-раскраску инциденторов мультиграфа G_m. Так как при $m = r^2$ все конечные инциденторы, примыкающие к вершине z мультиграфа G_m, имеют цвет, не меньший $r^2 - 2r$, то по крайней мере один из этих инциденторов имеет цвет, не меньший $r^2 - 2r + m - 1 = 2m - 2r - 1$.

Следовательно, $\gamma(0, G_m) \geqslant 2m - 2r - 1$ при $m = r^2$. Аналогично при $m = r^2 + r$ имеем $\gamma(0, G_m) \geqslant 2m - 2r - 2$.

Таким образом, при $r \geqslant 3$ справедливы неравенства

$$g(r^2) \geqslant 2r^2 - 2r - 1, \tag{5}$$

$$g(r^2 + r) \geqslant 2r^2 - 2. \tag{6}$$

Теперь доказательство теоремы завершается с использованием леммы 6. Из (4) следует, что при $k \geqslant 4$ и целом $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $g(k + t) \leqslant g(k) + 2t$. Следовательно,

$$g(k) \geqslant g(k + t) - 2t. \tag{7}$$

Пусть $r^2 + 1 \leqslant m \leqslant r^2 + r$. Так как $m \geqslant 8$, то $r \geqslant 3$. Из (7) и (6) следует, что $g(m) \geqslant g(r^2 + r) - 2(r^2 + r - m) \geqslant 2r^2 - 2 - 2r^2 - 2r + 2m = 2m - 2r - 2$.

Наконец, пусть $r^2 + r + 1 \leqslant m \leqslant (r + 1)^2 - 1$. Тогда $r \geqslant 2$ и из (7) и (5) следует, что $g(m) \geqslant g((r + 1)^2) - 2((r + 1)^2 - m) \geqslant 2(r + 1)^2 - 2(r + 1) - 1 - 2(r + 1)^2 + 2m = 2m - 2r - 3$. Теорема 7 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Асратян А. С., Камалян Р. Р.** Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1987. С. 25–34.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
3. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.
4. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
5. **Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, 1999.
6. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
7. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
8. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.

9. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.
10. **Севастьянов С. В.** Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискрет. анализа в решении экстремальных задач. Вып. 50. Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 61–72.
11. **Asratian A. S., Kamalian R. R.** Investigation on interval edge-coloring of graphs // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1994. V. 62, N 1. P. 34–43.
12. **Hanson D., Loten C. O. M., Toft B.** On interval colorings of bi-regular bipartite graphs // ARS Combinatoria. 1998. N 50. P. 23–32.
13. **Iensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, 1995.
14. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.
15. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.
16. **Pyatkin A. V.** Proof of Melnikov–Vizing conjecture for multigraphs with maximum degree at most 3 // Discrete Math. 1998. V. 185, N 1–3. P. 275–278.

Адрес автора:

Одесская гос. академия
пищевых технологий,
ул. Канатная, 112,
65039 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
25 декабря 2000 г.