ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2001. Серия 1. Том 8, № 2, 52–62

УДК 519.172

О ЧИСЛЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В БУЛЕВОМ КУБЕ*)

А. Л. Пережогин, В. Н. Потапов

Показано, что при $n \to \infty$ логарифм числа разбиений n-мерного булева куба E^n на циклы равен $2^n(\ln n - 1 + o(1))$ и логарифм числа гамильтоновых циклов в E^n не меньше $2^{n-1}(\ln n - 1 + o(1))$. Доказано, что в E^n каждое совершенное паросочетание, в котором содержатся рёбра не более k направлений, дополняется до гамильтонова цикла при любом $n \geqslant n_0(k)$.

Введение

Пусть E^n обозначает n-мерный булев куб, т. е. граф, вершинами которого являются двоичные наборы длины n, и вершины $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ смежны тогда и только тогда, когда расстояние Хемминга

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \oplus \beta_i) = 1,$$

где $\oplus$ — сложение по модулю 2.

Проблема определения числа h_n гамильтоновых циклов в E^n была поставлена в [9] и рассматривалась в [6–8, 11]. Наилучшая известная (см. [11]) нижняя оценка для h_n при $n \to \infty$ имеет вид

$$\ln h_n \geqslant 2^{n-1}(c + o(1)), \quad \text{где} \quad c \approx 1,42.$$

Наилучшая верхняя оценка для h_n была получена в [7]:

$$\ln h_n \leqslant 2^n(\ln n - \ln 2/2).$$

В настоящей статье устанавливаются следующие асимптотические при $n \to \infty$ оценки для h_n:

$$2^{n-1}(\ln n - 1 + o(1)) \leqslant \ln h_n \leqslant 2^n(\ln n - 1 + o(1)).$$

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00531) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО–110).

При получении этих оценок были использованы следующие доказанные ниже асимптотики логарифма числа m_n совершенных паросочетаний и логарифма числа f_n 2-факторов (разбиений на простые циклы) в E^n:

$$\begin{aligned} \ln m_n &= 2^{n-1}(\ln n - 1 + o(1)), \\ \ln f_n &= 2^n(\ln n - 1 + o(1)). \end{aligned} \tag{1}$$

Эти асимптотики были найдены на основе известных результатов из [1, 3, 12] о перманентах квадратных $(0,1)$-матриц.

Заметим, что известные верхние оценки для h_n вытекают из неравенства $h_n \leqslant f_n$ и верхних оценок для f_n. Такой способ получения верхних оценок для h_n представляется исчерпанным, поскольку оценка (1) является асимптотически точной.

В [10] высказана гипотеза о том, что каждое совершенное паросочетание в E^n дополняется до гамильтонова цикла. Там же показано, что это утверждение верно при $n \leqslant 4$. Ниже доказано, что каждое совершенное паросочетание в E^n, в котором содержатся рёбра не более k направлений, дополняется до гамильтонова цикла при любом $n \geqslant n_0(k)$.

§ 1. Предварительные сведения

Введём несколько обозначений. Пусть G — произвольный граф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин и через $E(G)$ — множество рёбер в графе G. Через $k(G)$ обозначается число компонент связности графа G.

Произвольное подмножество попарно несмежных рёбер графа G называется *паросочетанием* в G. Паросочетание $A \subset E(G)$ называется *совершенным*, если каждая вершина графа G инцидентна единственному ребру из A. Произвольная совокупность простых попарно непересекающихся циклов в графе G, покрывающая все вершины графа G, называется 2-*фактором* в G. *Гамильтоновым циклом* в графе G называется 2-фактор, состоящий из одного цикла. Ясно, что два непересекающихся совершенных паросочетания в графе G порождают 2-фактор.

Пусть G — двудольный граф, в каждой доле которого содержится N вершин, вершины каждой доли занумерованы числами $1, 2, \ldots, N$. *Матрицей смежности* графа G называется квадратная $(0,1)$-матрица $A(G) = (a_{ij})$ порядка N такая, что $a_{ij} = 1$, если i-я вершина первой доли смежна с j-й вершиной второй доли; в противном случае $a_{ij} = 0$. Ниже рассматриваются только такие двудольные графы.

Перманентом матрицы $A(G)$ называется величина

$$\operatorname{per} A(G) = \sum_{\tau \in S_N} \prod_{i=1}^{N} a_{i\tau(i)},$$

где S_N — множество всех перестановок порядка N. Известно (см., например, [3]), что число совершенных паросочетаний в двудольном графе G равно перманенту матрицы $A(G)$. Л. М. Брэгман [1] доказал следующую (высказанную Х. Минком [3]) верхнюю оценку для перманента квадратной $(0,1)$-матрицы B порядка N:

$$\operatorname{per} B \leqslant \prod_{i=1}^{N} (r_i!)^{1/r_i},$$

где r_i — сумма элементов i-й строки матрицы B. Из этого неравенства непосредственно следует оценка

$$\operatorname{per} A(G) \leqslant (k!)^{\frac{N}{k}} \tag{2}$$

для числа различных совершенных паросочетаний в k-регулярном (k-однородном) двудольном графе G с $2N$-вершинами.

Квадратная матрица, состоящая из неотрицательных элементов, называется *дважды стохастической*, если сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы равна 1.

Г. П. Егорычев [2] и Д. И. Фаликман [4] доказали гипотезу Ван дер Вардена о том, что перманент произвольной дважды стохастической матрицы порядка N, содержащей хотя бы два различных элемента, больше перманента дважды стохастической матрицы порядка N с одинаковыми элементами. Перманент последней матрицы равен $N!/(N^N)$. Если каждый элемент матрицы $A(G)$ поделить на k, то получим дважды стохастическую матрицу. Поэтому при $k < N$ справедливо неравенство

$$\operatorname{per} A(G) > (N!)\Big(\frac{k}{N}\Big)^N. \tag{3}$$

В [12] доказано, что если G является k-регулярным двудольным графом с $2N$ вершинами, $N \geqslant k$, то в G имеется не менее

$$\Big(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}\Big)^N = k^N\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^{N(k-1)} \tag{4}$$

различных совершенных паросочетаний.

Согласно уточнённой формуле Стирлинга (см., например, [5, с. 67]) имеем

$$\Big(\frac{N}{e}\Big)^N \sqrt{2\pi N} e^{1/(12N+1)} \leqslant N! \leqslant \Big(\frac{N}{e}\Big)^N \sqrt{2\pi N} e^{1/(12N)}. \tag{5}$$

Отсюда и из неравенства $(1-\frac{1}{k})^{k-1} > 1/e$ при $k \geqslant 2$ следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \Big(N!\Big(\frac{k}{N}\Big)^N\Big) = \ln k - 1$$
$$< \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \Big(\Big(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}\Big)^N\Big) = \ln k + \ln\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^{k-1}.$$

Таким образом, при фиксированном k и $N \to \infty$ оценка (4) лучше оценки (3).

§ 2. Верхние и нижние оценки числа совершенных паросочетаний и 2-факторов в E^n

Пусть M_n — множество совершенных паросочетаний в E^n и $M_n(A)$ — множество таких совершенных паросочетаний в E^n, которые не пересекаются с совершенным паросочетанием A.

Ясно, что E^n является двудольным n-регулярным графом с 2^n вершинами.

Теорема 1. *При $n \geqslant 2$ справедливы неравенства*

$$2^{n-1}(\ln n - 1) \leqslant \ln |M_n| \leqslant 2^{n-1}\Big(\ln n - 1 + \frac{1}{2n}\Big(\ln(2\pi n) + \frac{1}{6n}\Big)\Big).$$

Доказательство. Верхняя оценка для $\ln |M_n|$ следует из (2) и (5). Нижняя оценка для $\ln |M_n|$ вытекает из формулы (4) и неравенства

$$\ln\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{ik^i} \geqslant -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}, \tag{6}$$

которое верно при любом $k \geqslant 2$.

Заметим, что неравенство $\ln |M_n| \geqslant 2^{n-1}(\ln n - 1 + o(1))$ при $n \to \infty$ можно получить из неравенства (3).

Утверждение 1. *Пусть A — произвольное совершенное паросочетание в E^n. Тогда при $n \geqslant 3$*

$$2^{n-1}(\ln(n-1) - 1) \leqslant \ln |M_n(A)|$$
$$\leqslant 2^{n-1}\Big(\ln(n-1) - 1 + \frac{1}{2(n-1)}\Big(\ln(2\pi(n-1)) + \frac{1}{6(n-1)}\Big)\Big).$$

Доказательство. Удалим из графа E^n рёбра паросочетания A. Полученный граф является двудольным $(n-1)$-регулярным графом. Тогда оценки для $\ln |M_n(A)|$ получаются из (2) и (4–6).

Пусть F_n — множество 2-факторов в E^n. Обозначим через $F_n(i) \subset F_n$ множество 2-факторов, каждый из которых состоит из i компонент связности.

Так как длина наименьшего простого цикла в E^n равна 4, то $F_n(i) = \varnothing$ при $i > 2^{n-2}$.

Утверждение 2. *При любом $i, 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-2}$, справедливо неравенство*

$$|F_n(i)| \leqslant n^{2^n - i} 2^{2^n}.$$

Доказательство. Пусть 2-фактор $U \in F_n(i)$ состоит из i простых циклов, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-2}$. Удалив из каждого цикла по одному ребру, получим подграф U' — разбиение гиперкуба E^n на i попарно непересекающихся цепей. Ясно, что 2-фактор $U \in F_n(i)$ восстанавливается по подграфу U' однозначно. Для задания произвольного разбиения E^n на i простых попарно непересекающихся цепей достаточно выбрать i вершин в качестве концов цепей (по одному на каждую цепь) и определить направления рёбер, выходящих из всех оставшихся вершин булева куба E^n. Следовательно, число различных разбиений булева куба E^n на i попарно непересекающихся цепей не превышает $n^{2^n-i}\binom{2^n}{i}$. Поэтому $|F_n(i)| \leqslant n^{2^n-i}2^{2^n}$.

Теорема 2. *При $n \geqslant 3$ справедливы неравенства*

$$2^n\Big(\ln(n-1)-1-\frac{4}{\ln n}\Big) \leqslant \ln|F_n| \leqslant 2^n\Big(\ln n - 1 + \frac{1}{2n}\Big(\ln(2\pi n)+\frac{1}{6n}\Big)\Big).$$

Доказательство. Верхняя оценка. Произвольный 2-фактор порождается двумя непересекающимися совершенными паросочетаниями, т. е. $|F_n| \leqslant |M_n|^2$. Поэтому требуемое неравенство следует из теоремы 1.

Нижняя оценка. Каждая компонента связности 2-фактора $U \in F_n(i)$ разделяется на два равных по мощности и непересекающихся по вершинам набора рёбер. Поскольку каждую половину рёбер цикла можно отнести к первому или второму паросочетанию, то 2-фактор U порождается 2^i различными упорядоченными парами совершенных паросочетаний. Число упорядоченных пар непересекающихся совершенных паросочетаний не меньше $|M_n|m$, где $m = \min\limits_{B\in M_n}|M_n(B)|$. Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{2^{n-2}} |F_n(i)|2^i \geqslant |M_n|m. \tag{7}$$

Пусть

$$F_n^1 = \bigcup_{i=1}^{I} F_n(i), \quad F_n^2 = \bigcup_{i=I+1}^{2^{n-2}} F_n(i),$$

где $I = \big\lfloor \frac{2^{n+2}}{\ln n} \big\rfloor$. Тогда из утверждения 2 следует, что

$$|F_n^2| \leqslant 2(2n)^{2^n} n^{-2^{n+2}/\ln n},$$

т. е.

$$\ln|F_n^2| \leqslant \ln 2 + 2^n(\ln n + \ln 2 - 4). \tag{8}$$

Из (8), теоремы 1 и утверждения 1 получаем неравенство

$$|F_n^2| \leqslant \frac{|M_n|m}{2^{1+2^{n-2}}}. \tag{9}$$

Из неравенств (7) и (9) следует, что

$$\sum_{i=1}^{I} |F_n(i)|2^i \geqslant |M_n|m - |F_n^2|2^{2^{n-2}} \geqslant \frac{|M_n|m}{2}.$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$|F_n| \geqslant |F_n^1| \geqslant \frac{|M_n|m}{2^{l+1}} \geqslant \frac{|M_n|m}{2^{1+2^{n+2}/\ln n}}$$

и нижняя оценка для $\ln |F_n|$ следует из теоремы 1 и утверждения 1.

§ 3. Нижняя оценка числа гамильтоновых циклов в E^n

Для установления нижней оценки числа гамильтоновых циклов в E^n нам понадобится несколько обозначений. Для произвольного множества рёбер A в E^n через $G(A)$ обозначим подграф графа E^n, порождённый множеством рёбер A. Будем говорить, что совершенное паросочетание A в E^n дополняется до l простых цепей (до 2-фактора с l компонентами связности), если найдётся такое паросочетание B в E^n, что граф $G(A \cup B)$ состоит из l простых попарно непересекающихся цепей (соответственно $G(A \cup B)$ является 2-фактором в гиперкубе E^n и $k(G(A \cup B)) = l$). В этом случае граф $G(A \cup B)$ будем называть *дополнением* совершенного паросочетания A до l простых цепей (до 2-фактора, состоящего из l компонент связности).

Для любого набора $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V(E^n)$ определим

$$\varphi_i(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, i), \quad i \in \{0, 1\}.$$

Для любого ребра $e = (x_1\ x_2) \in E(E^n)$ положим

$$\varphi_i(e) = (\varphi_i(x_1)\ \varphi_i(x_2)), \quad i \in \{0, 1\}.$$

В случае произвольного множества $A = \{e_1, \ldots, e_j\}$ рёбер из E^n полагаем

$$\varphi_i(A) = \{\varphi_i(e_1), \ldots, \varphi_i(e_j)\}, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Лемма 1. *Пусть A и B — совершенные паросочетания в E^n и A дополняется до l простых цепей. Тогда совершенное паросочетание*

$$\varphi_0(A) \cup \varphi_1(B) \in M_{n+1}$$

дополняется до 2-фактора, состоящего не более чем из l компонент связности.

Доказательство. Построим в E^{n+1} совершенное паросочетание, дополняющее совершенное паросочетание

$$\varphi_0(A) \cup \varphi_1(B)$$

до 2-фактора, состоящего не более чем из l компонент связности.

Пусть $C = A \cup B$ и $G(C) = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k$, где Φ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, — компоненты связности графа $G(C)$. По условию леммы найдется такое паросочетание D в E^n, что граф $G(A \cup D)$ имеет l компонент связности. Так как $A \subset C$, то граф $G(C \cup D)$ имеет m, $m \leqslant l$, компонент связности.

Рассмотрим граф Δ, вершинами которого являются графы $\Phi_1, \dots, \Phi_k$, и две вершины Φ_i и Φ_j, $i \neq j$, соединены ребром $\varepsilon = (\Phi_i\ \Phi_j)$, если имеется такое ребро $(x_i\ x_j) \in D$, что $x_i \in V(\Phi_i)$ и $x_j \in V(\Phi_j)$. Для каждого $\varepsilon = (\Phi_i\ \Phi_j)$ выберем одно ребро $e(\varepsilon) = (x_i\ x_j)$, обладающее этим свойством. Поскольку $V(G(C)) = V(E^n)$, граф Δ имеет m компонент связности как и граф $G(C \cup D)$.

Пусть Θ — остов графа Δ. Пусть $T = \{e(\varepsilon) \in D\ :\ \varepsilon \in E(\Theta)\}$. Остов Θ состоит из m деревьев на k вершинах. Поэтому $|T| = |E(\Theta)| = k - m = p$. Упорядочим произвольным образом элементы множества $E(\Theta)$, $E(\Theta) = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$. По определению остова Θ граф $(V(\Delta),\ \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i\})$ имеет $k - i$ компонент связности, где $0 \leqslant i \leqslant p$. Тогда

$$k(G(C \cup \{e_1, \dots, e_i\})) = k - i, \quad 0 \leqslant i \leqslant p, \tag{10}$$

где $e_j = e(\varepsilon_j)$.

Пусть

$$e_i = (x_0^i\ x_1^i), \quad 1 \leqslant i \leqslant p. \tag{11}$$

Заметим, что все вершины x_0^i, x_1^i, $1 \leqslant i \leqslant p$, различны, так как множество T содержится в паросочетании D.

Построим последовательность совершенных паросочетаний в E^{n+1} следующим образом:

$$Y_0 = \{(\varphi_0(x)\ \varphi_1(x)) \mid x \in V(E^n)\},$$
$$Y_i = Y_{i-1} \cup \{\varphi_0(e_i),\ \varphi_1(e_i)\} \backslash \{(\varphi_0(x_0^i)\ \varphi_1(x_0^i)),\ (\varphi_0(x_1^i)\ \varphi_1(x_1^i))\},$$

где $0 \leqslant i \leqslant p$.

Для произвольного множества ребер I в графе E^{n+1} определим множество

$$\pi_n(I) = \{e \in E(E^n) \mid \{\varphi_0(e),\ \varphi_1(e)\} \cap I \neq \varnothing\} -$$

проекцию множества I по $(n+1)$-му направлению.

Пусть $Y = \varphi_0(A) \cup \varphi_1(B)$. По определению множества T справедливо равенство $T \cap (A \cup B) = \varnothing$. Тогда при любом i, $0 \leqslant i \leqslant p$, имеем $Y_i \cap Y = \varnothing$. Кроме того, по построению

$$\pi_n(Y_i \cup Y) = C \cup \{e_1, \dots, e_i\}. \tag{12}$$

Покажем по индукции, что 2-фактор $G(Y_i \cup Y)$ имеет $k - i$ компонент связности, где $0 \leqslant i \leqslant p$. Очевидно, что

$$k(G(Y_0 \cup Y)) = k(G(A \cup B)) = k.$$

Пусть предположение индукции верно при некотором i, $0 \leqslant i < p$. Рассмотрим рёбра $a = (\varphi_0(x_0^{i+1})\ \varphi_1(x_0^{i+1}))$ и $b = (\varphi_0(x_1^{i+1})\ \varphi_1(x_1^{i+1}))$. По построению $a, b \in Y_i$. Пусть a и b принадлежат одной компоненте связности графа $G(Y_i \cup Y)$. Тогда вершины x_0^{i+1} и x_1^{i+1} принадлежат одной компоненте связности графа $G(\pi_n(Y_i \cup Y))$. Отсюда и из (11) и (12) следует, что

$$k(G(C \cup \{e_1, \dots, e_i\})) = k(G(C \cup \{e_1, \dots, e_{i+1}\})).$$

Это противоречит (10). Поэтому рёбра a и b принадлежат разным компонентам связности Ψ_1 и Ψ_2 графа $G(Y_i \cup Y)$. Поскольку $G(Y_i \cup Y)$ является 2-фактором, Ψ_1 и Ψ_2 — простые циклы. Тогда, удалив рёбра a и b и добавив рёбра $\varphi_0(e_{i+1})$ и $\varphi_1(e_{i+1})$, соединим два цикла Ψ_1 и Ψ_2 в один. Таким образом,

$$k(G(Y_{i+1} \cup Y)) = k(G(Y_i \cup Y)) - 1 = k - i - 1.$$

Следовательно, граф $G(Y_p \cup Y)$ имеет $k - p = m \leqslant l$ компонент связности. Лемма 1 доказана.

Обозначим через M_n^* множество совершенных паросочетаний в E^n, дополняемых до гамильтонова цикла в E^n, и через H_n — множество гамильтоновых циклов в E^n.

Из леммы 1 в случае $l = 1$ имеем

Следствие 1. *Если $A \in M_n^*$ и $B \in M_n$, то $\varphi_0(A) \cup \varphi_1(B) \in M_{n+1}^*$.*

Теорема 3. *При $n \geqslant 3$ справедливы неравенства*

$$2^{n-1}\Big(\ln n - 1 - \frac{4}{n} - \frac{\ln n}{2^{n/2-2}}\Big) - 1 \leqslant \ln |H_n| \leqslant 2^n\Big(\ln n - 1 + \frac{1}{2n}\Big(\ln(2\pi n) + \frac{1}{6n}\Big)\Big).$$

Доказательство. Поскольку $|H_n| \leqslant |F_n|$, верхняя оценка для $|H_n|$ следует из теоремы 2.

Так как $|H_n| \geqslant |M_n^*|/2$, то для доказательства нижней оценки для $|H_n|$ при $n \geqslant 2$ достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\ln |M_n^*| \geqslant 2^{n-1}\Big(\ln n - 1 - \frac{4}{n} - \frac{\ln n}{2^{n/2-2}}\Big). \tag{13}$$

Из теоремы 1 и следствия 1 при $n \geqslant 3$ имеем

$$\ln |M_n^*| \geqslant \sum_{i=2}^{n-1} \ln |M_i| \geqslant \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-1}(\ln i - 1). \tag{14}$$

Оценим сверху сумму ряда $\sum\limits_{i=2}^{n-1} 2^{i-1} \ln i$. Из (6) и равенства $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} = 2$

при $n \geqslant 3$ получаем

$$\sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-1} \ln i \geqslant \sum_{i=\lceil n/2\rceil}^{n-1} 2^{i-1}\Big(\ln n + \ln\Big(1 - \frac{n-i}{n}\Big)\Big)$$

$$\geqslant \Big(2^{n-1} - 2^{\lceil n/2\rceil}\Big)\ln n - 2^{n-1}\sum_{i=\lceil n/2\rceil}^{n-1} 2^{i-n}\Big(\frac{n-i}{n} + \Big(\frac{n-i}{n}\Big)^2\Big)$$

$$= \Big(2^{n-1} - 2^{\lceil n/2\rceil}\Big)\ln n - 2^{n-1}\sum_{j=1}^{n-\lceil n/2\rceil} 2^{-j}\Big(\frac{j}{n} + \Big(\frac{j}{n}\Big)^2\Big)$$

$$\geqslant \Big(2^{n-1} - 2^{\lceil n/2\rceil}\Big)\ln n - \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n-\lceil n/2\rceil} 2j2^{-j} \geqslant 2^{n-1}\Big(\ln n - \frac{4}{n} - \frac{\ln n}{2^{n-1-\lceil n/2\rceil}}\Big).$$

Тогда из (14) следует (13) и теорема 3 доказана.

§ 4. Дополнение совершенного паросочетания до гамильтонова цикла в E^n

Обозначим через M_n^k, $M_n^k \subset M_n$, множество совершенных паросочетаний, в каждом из которых содержатся рёбра не более k различных направлений. Ясно, что $M_n = M_n^n$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Для каждого целого $k > 0$ найдётся такое $n_0 \geqslant k$, что для всех целых $n \geqslant n_0$ справедливо включение $M_n^k \subset M_n^*$.*

Доказательство. Так как длина наименьшего простого цикла в E^k равна 4, то для любых непересекающихся совершенных паросочетаний A и B из M_k 2-фактор $G(A \cup B)$ состоит не более чем из 2^{k-2} компонент связности.

Докажем по индукции, что при любом i, $0 \leqslant i < 2^{k-2} - 1$, каждое совершенное паросочетание из M_{k+i}^k дополняется до 2-фактора, состоящего не более чем из $2^{k-2} - i$ компонент связности. Действительно, пусть предположение индукции верно при некотором i, $0 \leqslant i < 2^{k-2} - 2$. Рассмотрим совершенное паросочетание $A \in M_{k+i+1}^k$. Без ограничения общности можно считать, что в A нет рёбер $(k+i+1)$-го направления. Следовательно, A можно представить в виде $A = \varphi_0(A_0) \cup \varphi_1(A_1)$, где $A_0, A_1 \in M_{k+i}^k$. Тогда по предположению индукции найдётся $B \in M_{k+i}$ такое, что $A_0 \cap B = \varnothing$ и 2-фактор $G(A_0 \cup B)$ имеет m компонент связности, причем

$$m \leqslant 2^{k-2} - i. \tag{15}$$

Если $m = 1$, то справедливость теоремы вытекает из следствия 1. Пусть $m > 1$. В силу связности E^n найдётся такое ребро $e = (x_1\ x_2) \in$

$E(E^{k+i})$, что x_1 и x_2 принадлежат разным компонентам связности графа $G(A_0 \cup B)$. Тогда удалим из 2-фактора $G(A_0 \cup B)$ два ребра, принадлежащих множеству B, которые инцидентны вершинам x_1 и x_2, и добавим в него ребро e. Во всех оставшихся циклах 2-фактора $G(A_0 \cup B)$ удалим по одному произвольному ребру, принадлежащему множеству B. В результате получим граф $G = G(A_0 \cup B')$, где паросочетание B' содержится в $B \cup \{e\}$. Граф $G(A_0 \cup B')$ состоит из $(m-1)$-й простой цепи. Тогда из (15) и леммы 1 следует, что совершенное паросочетание A дополняется до 2-фактора, состоящего не более чем из $2^{k-2}-i-1$ компонент связности.

Тогда при $i = 2^{k-2}-1$ произвольное совершенное паросочетание из M^k_{k+i} дополняется до гамильтонова цикла. Таким образом, $M^k_{n_0} \subset M^*_{n_0}$ при $n_0 = k+2^{k-2}-1$. Кроме того, из следствия 1 вытекает, что $M^k_n \subset M^*_n$ при $n \geqslant n_0$. Теорема 4 доказана.

Таким образом, каждое совершенное паросочетание, в котором содержатся рёбра не более k направлений, дополняется до гамильтонова цикла в E^n при $n \geqslant n_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Брэгман Л. М.** Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 1. С. 27–30.
2. **Егорычев Г. П.** Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов. Красноярск, 1980. (Препринт ИФСО–13М / СО АН СССР. Ин-т физики им. Л. В. Киренского).
3. **Минк Х.** Перманенты. М.: Мир, 1982.
4. **Фаликман Д. И.** Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 6. С. 931–938.
5. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и её приложения. I. М.: Мир, 1967.
6. **Abbott H. L.** Hamiltonian circuits and paths on the n-cube // Canad. Math. Bull. 1966. V. 9, N 5. P. 557–562.
7. **Dixon E., Goodman S.** On the number of Hamiltonian circuits in the n-cube // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 50. P. 500–504.
8. **Douglas R. G.** Bounds on the number of Hamiltonian circuits in the n-cube // Discrete Math. 1977. V. 17, N 2. P. 143–146.
9. **Gilbert E. N.** Gray codes and paths on the n-cube // Bell System Tech. J. 1958. V. 37, N 3. P. 815–826.

10. **Kreweras G.** Matching and Hamiltonian cycles on hypercubes // Bull. Inst. Comb. Appl. 1996. V. 16. P. 87–91.

11. **Mollard M.** Un nouvel encadrement du nombre de cycles hamiltoniens du n-cube // European J. Combinatorics. 1988. V. 9, N 1. P. 49–52.

12. **Schrijver A.** Counting 1-factors in regular bipartite graphs // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1998. V. 72, N 1. P. 122–135.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
6 февраля 2001 г.