ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2001. Серия 1. Том 8, № 2, 63–89

УДК 519.816

РАЗДЕЛИТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА*)

Л. А. Шоломов

Исследуются алгоритмические проблемы, связанные с разделительной декомпозицией отношений в задачах многокритериального выбора, т. е. с возможностью разбиения множества критериев I на подмножества $I_1, \dots, I_k$ и представления выбора по заданному отношению ρ на I в виде последовательного выбора по некоторым отношениям $\rho_1, \dots, \rho_k$, заданным соответственно на $I_1, \dots, I_k$. Отношения предполагаются порядковыми и описываются функциями (3,2)-значной логики. Доказывается, что всякое отношение обладает лучшей разделительной декомпозицией, которая единственна с точностью до некоторого преобразования. При задании представляющих функций отношений в форме ДНФ и КНФ задачи о существовании нетривиальных декомпозиций и о построении лучших декомпозиций NP-трудны. Если отношения обладают свойством монотонности, то в случае ДНФ эти задачи остаются NP-трудными, а при задании в виде КНФ полиномиально разрешимы.

Введение

Прикладные методы построения моделей выбора решений часто используют декомпозицию процедур выбора (см., например, [7]). Некоторые формальные методы декомпозиции абстрактных функций выбора развиты в [1, 5, 8, 12].

Декомпозиция может применяться не только на стадии конструирования моделей выбора. Иногда декомпозиция уже построенной модели позволяет существенно понизить трудоемкость процедуры выбора. Наиболее известный пример — декомпозиция модели многокритериального выбора, выполняемого по отношению предпочтения, монотонно зависящему от значений критериев. При реализации этой модели выбор часто

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00073).

разбивают на два этапа: сначала производят выбор по отношению Парето, а затем — по исходному отношению (из вариантов, отобранных на первом этапе). При очень слабых допущениях такая двухступенчатая процедура выбора эквивалентна одноступенчатой. Поскольку выбор по отношению Парето выполним с малой сложностью [13] и после первого этапа отсеиваются многие варианты [4], двухступенчатая процедура реализуется более просто.

Еще одним важным типом декомпозиции задач многокритериального выбора является разделительная декомпозиция. Критерии разбиваются на упорядоченные группы, и при выборе сначала используются критерии первой группы, затем из отобранных вариантов производится выбор по критериям второй группы и так далее. Уменьшение сложности реализации процедур выбора при разделительной декомпозиции происходит в результате понижения размерности задач. Наиболее известным и изученным частным случаем является лексикографический выбор [6], когда каждая группа состоит из одного критерия. Обычно разделительную декомпозицию производят на стадии построения модели, исходя из содержательного анализа задачи выбора. В настоящей работе исследуются формальные методы разделительной декомпозиции многокритериальных моделей.

В статье рассматривается задача многокритериального выбора по порядковому отношению [2], т. е. отношению, в котором результат сравнения вариантов определяется не самими оценками по критериям, а соотношениями оценок (больше, меньше, равно). Отношение допускает разделительную декомпозицию, если выбор по нему эквивалентен последовательному выбору по некоторой системе отношений, заданных на непересекающихся множествах критериев. Исследуются алгоритмические проблемы, связанные с существованием и построением разделительных декомпозиций для порядковых отношений. Найдено необходимое и достаточное условие существования разделительной декомпозиции при заданном разбиении множества критериев. Доказано, что для каждого отношения имеется в определенном смысле лучшая разделительная декомпозиция, которая единственна с точностью до некоторого простого преобразования.

Основное внимание в работе уделяется вопросам, связанным со сложностью построения разделительных декомпозиций. Порядковые отношения могут быть заданы своими представляющими функциями, являющимися двузначными функциями от трехзначных аргументов. Рассматриваются представления этих функций в виде дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм (ДНФ и КНФ), которые подобны соответствующим представлениям булевых функций. Показано, что задачи построения декомпозиций с заданным разбиением множества критериев и лучших декомпозиций являются NP-трудными для обоих типов задания отношений — ДНФ и КНФ. Если порядковые отношения обладают свойством монотонности (именно такие отношения обычно возникают в приложениях), то при использовании ДНФ обе задачи остаются NP-трудными, а для КНФ они оказываются полиномиально разрешимыми.

В статье используется развитая в [9] техника исследования порядковых отношений.

1. Разделительная декомпозиция

Пусть задано множество A (конечное или бесконечное), элементы которого называются *вариантами.* Произвольное отображение $C\colon 2^A \to 2^A$, которое каждому множеству $X \subseteq A$ ставит в соответствие некоторое подмножество $C(X) \subseteq X$, называется *функцией выбора.* Варианты из $C(X)$ считаются *выбранными* из множества X.

Пусть r — заданное бинарное отношение на A, обладающее свойством иррефлексивности $x\bar{r}x$ $(x \in A)$; соотношение yrx содержательно интерпретируется как «вариант y предпочтительнее варианта x». С отношением r связывается функция выбора

$$C_r(X) = \{x \in X \mid \forall y \in X\ y\bar{r}x\}.$$

Говорим, что набор отношений $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ (на множестве A, бинарных, иррефлексивных) образует *декомпозицию* отношения r, если для каждого $X \subseteq A$ справедливо равенство

$$C_{r_k}(\dots C_{r_2}(C_{r_1}(X))\dots) = C_r(X), \tag{1}$$

и *слабую декомпозицию*, если (1) справедливо для всех конечных $X \subseteq A$.

Следующий пример показывает различие этих понятий. Пусть $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, а отношение r представляет собой линейный порядок $a_{i+1} r a_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Введем отношения r_1 и r_2, положив $a_{i+1} r_1 a_i$ и $a_i r_2 a_0$, $i = 1, 2, \dots$ Пара (r_1, r_2) не является декомпозицией отношения r, ибо $C_r(A) = \varnothing$, а $C_{r_2}(C_{r_1}(A)) = \{a_0\}$. Вместе с тем эта пара образует слабую декомпозицию, поскольку $C_{r_2}(C_{r_1}(X)) = \{a_s\} = C_r(X)$ для любого конечного X, где a_s — элемент из X с наибольшим номером. Для приложений обычно бывает достаточно слабой декомпозиции. В частности, широко применяемая в задачах многокритериального выбора декомпозиция длины 2, в которой на первом шаге используется отношение Парето, является слабой.

Введем операцию $C_1 \circ C_2$ *суперпозиции* функций выбора C_1 и C_2, положив $(C_1 \circ C_2)(X) = C_2(C_1(X))$, $X \subseteq A$. Операция суперпозиции ассоциативна [10], т. е. удовлетворяет условию $C_1\circ(C_2\circ C_3)=(C_1\circ C_2)\circ C_3$. Поэтому (1) может быть переписано в виде

$$C_r = C_{r_1} \circ C_{r_2} \circ \ldots \circ C_{r_k} \tag{2}$$

без расстановки скобок. В случае слабой декомпозиции будем применять запись $C_r \simeq C_{r_1} \circ C_{r_2} \circ \ldots \circ C_{r_k}$, обозначающую равенство $C_r(X) = (C_{r_1} \circ C_{r_2} \circ \ldots \circ C_{r_k})(X)$ для любого конечного X.

Введем операцию *лексикографии* $r_1 \otimes r_2$ отношений, положив

$$x(r_1 \otimes r_2)y \Longleftrightarrow xr_1y \vee x\bar{r}_1y \wedge y\bar{r}_1x \wedge xr_2y.$$

Легко видеть, что

$$r_1 \otimes r_2 = r_1 \cup (r_1^* \cap r_2), \tag{3}$$

где через r^* обозначено отношение $A^2 \backslash r^{-1}$, *двойственное* к r. Поскольку операция лексикографии ассоциативна [1], можно рассматривать многоместную операцию $r_1 \otimes r_2 \otimes \ldots \otimes r_k$. Известно, что если $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ — (слабая) декомпозиция отношения r, то

$$r = r_1 \otimes r_2 \otimes \ldots \otimes r_k. \tag{4}$$

В [10] доказано, что для любых $r_1, \ldots, r_k$ имеет место включение

$$C_{r_1} \circ \ldots \circ C_{r_k} \supseteq C_{r_1 \otimes \ldots \otimes r_k} \tag{5}$$

(эта запись означает, что включение справедливо при каждом $X \subseteq A$).

Будем рассматривать задачу многокритериального (n-критериального) выбора. Каждый вариант описывается набором $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ чисел (оценок по n критериям), и под вариантами дальше будем понимать эти наборы, т. е. будем считать, что A совпадает с R^n — n-мерным действительным пространством. Отношения на R^n будем обозначать символами $\rho, \sigma, \ldots$

Положив $I = \{1, \ldots, n\}$, наряду с R^n будем использовать запись R^I. Для $I' \subseteq I$ обозначим через $\mathrm{R}^{I'}$ соответствующее подпространство пространства R^I. Будем говорить, что отношение ρ *существенно зависит* от критерия $i \in I$, если найдутся наборы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathrm{R}^I$ такие, что $\mathbf{x}'$ отличается от $\mathbf{x}$, а $\mathbf{y}'$ — от $\mathbf{y}$ не более чем в одной i-й компоненте и при этом $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}'\bar{\rho}\mathbf{y}'$. В противном случае будем говорить о несущественной (фиктивной) зависимости отношения ρ от критерия i. Исходное отношение ρ будем полагать существенно зависящим от всех своих критериев, ибо несущественные критерии можно исключить из рассмотрения.

Декомпозицию $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ отношения ρ назовем *разделительной*, если существует такое разбиение $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$ ($I_i \cap I_j = \varnothing$ при $i \neq j$) множества критериев I, что отношение ρ_s, $1 \leqslant s \leqslant k$, существенно зависит лишь от критериев множества I_s. Упорядоченное разбиение $(I_1, I_2, \ldots, I_k)$ будем называть *базой* разделительной декомпозиции

$\mathbf{R} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ и обозначать через $B(\mathbf{R})$. Дальше, говоря о декомпозициях, будем иметь в виду разделительные декомпозиции заданного отношения ρ. Декомпозиции длины $k \geqslant 2$ будем называть *нетривиальными.* Отношение, для которого существует нетривиальная декомпозиция, назовем *разделимым*, а в противном случае — *неразделимым.* Для слабых декомпозиций могут быть введены аналогичные понятия: слабая разделительная декомпозиция, слабая разделимость и так далее.

Опишем класс отношений на R^n, для которых будем решать задачу декомпозиции. Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$ положим

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\operatorname{sgn}(x_1 - y_1), \ldots, \operatorname{sgn}(x_n - y_n)),$$

где $\operatorname{sgn} z$ равен $+1$, 0 и -1 при $z > 0$, $z = 0$ и $z < 0$ соответственно. Отношение ρ назовем *порядковым* [2], если $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Longrightarrow \mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{u}\rho\mathbf{v}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{R}^n$. Порядковое отношение ρ называется *правильным* [2], если $\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \geqslant \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{z}\rho\mathbf{y}$, где $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{x} \Longleftrightarrow z_1 \geqslant x_1, \ldots, z_n \geqslant x_n$. Хорошо известными примерами правильных порядковых отношений являются *отношение Парето* $\mathbf{x}\pi\mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и *лексикография* $\mathbf{x}\lambda\mathbf{y} \Longleftrightarrow \exists t(x_t > y_t,\ x_s = y_s,\ s < t)$.

В настоящей работе исследуются алгоритмические проблемы, связанные с построением для порядковых отношений разделительных декомпозиций с заданной базой и лучших (определение будет дано ниже) разделительных декомпозиций.

2. Техника исследования порядковых отношений

В [9] были развиты методы исследования порядковых отношений средствами (3,2)-значной логики. Приведем без доказательства результаты, которые используются в настоящей работе (см. подробнее в [9]). Другие логические методы использовались в [2, 5].

Обозначим через $P_{3,2}$ класс двузначных функций $g(u_1, \ldots, u_n) = g(\tilde{u})$ от трехзначных аргументов; $g : \{-1, 0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. Порядковое отношение ρ однозначно задается своей *представляющей функцией* $g_\rho(\tilde{u}) \in P_{3,2}$, связанной с ρ соотношением $g_\rho(\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{x}\rho\mathbf{y}$. Порядковое отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда функция g_ρ *монотонна*, т. е. удовлетворяет условию $\tilde{u} \geqslant \tilde{v} \Longrightarrow g_\rho(\tilde{u}) \geqslant g_\rho(\tilde{v})$. Множество всех монотонных функций из $P_{3,2}$ обозначим через $M_{3,2}$.

Введем функции $p(u)$ и $p'(u) \in M_{3,2}$ одного аргумента, положив $p(u) = 1 \Leftrightarrow u = 1$, $p'(u) = 1 \Leftrightarrow u \in \{0, 1\}$. Любая функция $g \in P_{3,2}$ представима в виде

$$g(\tilde{u}) = \varphi(p(u_1), \ldots, p(u_n), p'(u_1), \ldots, p'(u_n)),$$

где $\varphi :\ \{0, 1\}^{2n} \to \{0, 1\}$ — булева функция (для $g \in M_{3,2}$ функция φ может быть взята монотонной). Обозначив $p(u_i) = p_i$ и $p'(u_i) = p'_i$,

$1 \leqslant i \leqslant n$, $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ и $\tilde{p}' = (p'_1, \ldots, p'_n)$, это представление будем записывать в виде

$$g(\tilde{u}) = \varphi(\tilde{p}, \tilde{p}'). \tag{6}$$

В таких обозначениях представляющие функции отношений Парето и лексикографии имеют вид (символы конъюнкции опущены)

$$g_\pi = p'_1 p'_2 \ldots p'_n (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n), \tag{7}$$

$$g_\lambda = p_1 \vee p'_1 p_2 \vee \ldots \vee p'_1 p'_2 \ldots p'_{n-1} p_n. \tag{8}$$

Двойственной к $g(\tilde{u})$ называется функция $g^*(\tilde{u}) = \bar{g}(-u_1, \ldots, -u_n) = \bar{g}(-\tilde{u})$. Если $g(\tilde{u})$ представлена в виде (6), то $g^*(\tilde{u}) = \varphi(\tilde{p}', \tilde{p})$, где φ^* — булева функция, двойственная к φ ($\tilde{p}'$ и $\tilde{p}$ меняются местами).

Конъюнкция $K = q_1 q_2 \ldots q_n$, $q_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i\bar{p}_i, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называется *элементарной*. Множитель q_i называется *элементарным сомножителем* ($q_i = 1$ означает отсутствие i-го сомножителя). Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Всякая функция g из $P_{3,2}$ представима в виде ДНФ (ДНФ функции $g \equiv 0$ считается равной 0). Если $g \in M_{3,2}$ и $g \neq \text{const}$, то g может быть единственным образом представлена посредством ДНФ, в которой конъюнкции составлены из элементарных сомножителей вида p_i, p'_i и 1 и отсутствуют поглощения $K_1 \leqslant K_2$ конъюнкций. Такая ДНФ называется *приведенной*. Примером приведенной ДНФ является (8).

Двойственным образом определяется понятие *конъюнктивной нормальной формы* (КНФ), представляющей собой конъюнкцию *элементарных дизъюнкций* $D = d_1 \vee \ldots \vee d_n$, где $d_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p_i \vee \bar{p}'_i, 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называется *элементарным слагаемым* ($d_i = 0$ означает отсутствие i-го слагаемого). Каждая функция $g \in P_{3,2}$ реализуется некоторой КНФ (в случае $g \equiv 1$ КНФ считается равной 1). Если $g \in M_{3,2}$ и $g \neq \text{const}$, то g единственным образом представима посредством КНФ, в которой каждая дизъюнкция может содержать лишь элементарные слагаемые вида p_i, p'_i и 0 и отсутствуют поглощения $D_1 \leqslant D_2$ дизъюнкций. Такая КНФ называется *приведенной* (примером может служить равенство (7)).

Введем операцию $\bullet$ *композиции* функций из $P_{3,2}$. Сначала определим ее для элементарных сомножителей, положив $p_i \bullet p'_i = p'_i \bullet p_i = p_i$; $\bar{p}_i \bullet \bar{p}'_i = \bar{p}'_i \bullet \bar{p}_i = \bar{p}'_i$; $\bar{p}_i \bullet p'_i = \bar{p}'_i \bullet p_i = p_i \bullet \bar{p}'_i = p' \bullet \bar{p}_i = 1$, $q_i \bullet q_i = q_i$, $q_i \bullet 1 = 1 \bullet q_i = 1$ и $q_i \bullet p'_i\bar{p}_i = p'_i\bar{p}_i \bullet q_i = q_i$ для всех q_i. Для элементарных конъюнкций $K = q_1 \ldots q_n$ и $\widehat{K} = \hat{q}_1 \ldots \hat{q}_n$ положим $K \bullet \widehat{K} = (q_1 \bullet \hat{q}_1) \wedge \ldots \wedge (q_n \bullet \hat{q}_n)$, а для функций $g = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ и $\hat{g} = \widehat{K}_1 \vee \ldots \vee \widehat{K}_t$ в форме ДНФ определим композицию формулой $g \bullet \hat{g} = \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant s,\, 1 \leqslant j \leqslant t} K_i \bullet \widehat{K}_j$. Операция композиции коммутативна, ассоциативна и монотонна: $g' \geqslant g \Longrightarrow g' \bullet \hat{g} \geqslant g \bullet \hat{g}$.

Операциям над отношениями соответствуют преобразования представляющих функций. Приведем те из них, которые используются ниже.

1°. Представляющая функция произведения отношений равна композиции представляющих функций: $g_{\rho\cdot\sigma} = g_\rho \bullet g_\sigma$.

2°. Представляющая функция объединения, пересечения и дополнения отношений равна дизъюнкции, конъюнкции и отрицанию представляющей функции: $g_{\rho\cup\sigma} = g_\rho \vee g_\sigma$, $g_{\rho\cap\sigma} = g_\rho g_\sigma$ и $g_{\bar\rho} = \bar g_\rho$.

3°. Представляющая функция двойственного отношения двойственна к представляющей функции исходного отношения: $g_{\rho^*} = g_\rho^*$.

Будем говорить, что порядковое отношение ρ' получено из ρ *инвертированием* оси i, если $g_{\rho'}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n) = g_\rho(u_1,\dots,-u_i,\dots,u_n)$. Порядковое отношение $\hat\rho$ будем называть *однотипным* с ρ, если $\hat\rho$ образовано из ρ инвертированием некоторых осей.

4°. Представляющая функция однотипного отношения получается из представления для представляющей функции (6) исходного отношения заменой p_i на $\bar p_i'$ и p_i' на $\bar p_i$ для всех инвертированных осей i.

В терминах представляющих функций могут быть описаны все основные свойства отношений. Приведем те из них, которые понадобятся ниже.

5°. Порядковое отношение ρ рефлексивно (иррефлексивно) тогда и только тогда, когда $g_\rho(\tilde 0) = 1$ ($g_\rho(\tilde 0) = 0$), где $\tilde 0 = (0,\dots,0)$.

6°. Порядковое отношение ρ связно (т. е. удовлетворяет условию $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{x}\rho\mathbf{y} \vee \mathbf{y}\rho\mathbf{x}$) тогда и только тогда, когда $g_\rho^* \geqslant g_\rho \vee K_0$, где $K_0 = p_1'\bar p_1 \dots p_n'\bar p_n$. Для правильного представляющего отношения вместо K_0 можно взять $K_0^+ = p_1' \dots p_n'$.

7°. Порядковое отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $g_\rho \bullet g_\rho \leqslant g_\rho$.

8°. Представляющая функция транзитивного (и только транзитивного) отношения ρ представима в форме $g_\rho = g_{\hat\lambda_1} \dots g_{\hat\lambda_s}$ или $g_\rho = g_{\hat\lambda_1^*} \dots g_{\hat\lambda_s^*}$, где $\hat\lambda$ — отношение, однотипное с лексикографией λ, а $*$ означает двойственность.

Укажем некоторые следствия этих фактов применительно к декомпозиции отношений. Если пара (ρ_1,ρ_2) образует (слабую) декомпозицию отношения ρ, то $\rho_1 \otimes \rho_2 = \rho$ (см. (4)), что с учетом (3), 2° и 3° может быть записано в виде

$$g_{\rho_1} \vee g_{\rho_1}^* g_{\rho_2} = g_\rho. \tag{9}$$

Кроме того, ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют соотношению $\rho_1\,(\bar\rho_1 \cap \rho_1^* \cap \rho_2) \subseteq \rho_1 \cup \rho_2$ [10], которое в соответствии с 2° и 3° принимает вид

$$g_{\rho_1} \bullet (\bar g_{\rho_1} g_{\rho_1}^* g_{\rho_2}) \leqslant g_{\rho_1} \vee g_{\rho_2}. \tag{10}$$

3. Условие существования разделительной декомпозиции

Исследование разделительных декомпозиций общего вида сводится к исследованию разделительных декомпозиций (ρ_1, ρ_2) длины 2 с использованием следующего утверждения.

Лемма 1. *Если $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ — (слабая) разделительная декомпозиция отношения ρ, то при любом s, $2 \leqslant s \leqslant k-1$, пара (ρ', ρ''), где $\rho' = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_s$ и $\rho'' = \rho_{s+1} \otimes \ldots \otimes \rho_k$, образует (слабую) разделительную декомпозицию отношения ρ, а наборы $(\rho_1, \ldots, \rho_s)$ и $(\rho_{s+1}, \ldots, \rho_k)$ являются (слабыми) разделительными декомпозициями отношений ρ' и ρ''.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай слабой декомпозиции. Пусть $B(\rho_1, \ldots, \rho_k) = (I_1, \ldots, I_k)$ — база декомпозиции, $I' = I_1 \cup \ldots \cup I_s$ и $I'' = I_{s+1} \cup \ldots \cup I_k$.

Сначала покажем, что $C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_s} \simeq C_{\rho'}$. Допустим, что это не так. Тогда в соответствии с (5) для некоторого конечного множества $X' \subseteq \mathrm{R}^{I'}$ выполняется строгое включение

$$Y' = (C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_s})(X') \supset C_{\rho'}(X') = Z'.$$

Взяв произвольное $\mathbf{a} \in \mathrm{R}^{I''}$, образуем множества $X = \{\mathbf{xa} \mid \mathbf{x} \in X'\}$, $Y = \{\mathbf{ya} \mid \mathbf{y} \in Y'\}$ и $Z = \{\mathbf{za} \mid \mathbf{z} \in Z'\}$, где $\mathbf{xa}$ — конкатенация наборов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$. Учитывая (5), иррефлексивность отношений $\rho_{s+1}, \ldots, \rho_k$ и ассоциативность суперпозиции, имеем

$$\begin{aligned} C_\rho(X) &= C_{\rho' \otimes \rho''}(X) \subseteq (C_{\rho'} \circ C_{\rho''})(X) = C_{\rho''}(Z) = Z \subset Y \\ &= (C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_s})(X) = ((C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_s}) \circ C_{\rho_{s+1}} \circ \ldots \circ C_{\rho_k})(X) \\ &= (C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_k})(X). \end{aligned}$$

Это противоречит тому, что $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ — слабая декомпозиция отношения ρ. Аналогично доказывается соотношение $C_{\rho_{s+1}} \circ \ldots \circ C_{\rho_k} \simeq C_{\rho''}$. Используя эти факты, получаем

$$C_\rho \simeq C_{\rho_1} \circ C_{\rho_2} \circ \ldots \circ C_{\rho_k} = (C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_s}) \circ (C_{\rho_{s+1}} \circ \ldots \circ C_{\rho_k}) \simeq C_{\rho'} \circ C_{\rho''}.$$

Лемма 1 доказана.

Поскольку ρ' и ρ'' заданы на $\mathrm{R}^{I'}$ и $\mathrm{R}^{I''}$, имеем

Следствие 1. *Если существует (слабая) разделительная декомпозиция с базой $(I_1, \ldots, I_k)$, $k \geqslant 2$, то существует (слабая) разделительная декомпозиция длины 2 с базой (I', I''), где $I' = I_1 \cup \ldots \cup I_s$, $I'' = I_{s+1} \cup \ldots \cup I_k$ и $1 \leqslant s \leqslant k$.*

Согласно лемме 1 при построении разделительной декомпозиции $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ сначала можно найти разделительную декомпозицию (ρ_1, ρ^1), где $\rho^1 = \rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_k$, затем — разделительную декомпозицию (ρ_2, ρ^2), где $\rho^2 = \rho_3 \otimes \ldots \otimes \rho_k$, отношения ρ^1 и т. д. То же верно для слабой разделительной декомпозиции.

С каждым отношением r, $r \subseteq A^2$, свяжем *отношение несравнимости* $\#_r$: $x \#_r y \iff x\bar{r}y \wedge y\bar{r}x$, $x, y \in A$. Очевидно, что $\#_r = \bar{r} \cap r^*$. Отношение r, удовлетворяющее условию $r \cdot \#_r \subseteq r$, где $\cdot$ означает произведение отношений, назовем *транзитивным относительно несравнимости* (ТОН-отношением).

Лемма 2. *Если (ρ_1, ρ_2) — слабая разделительная декомпозиция, то отношение ρ_1 транзитивно относительно несравнимости.*

Доказательство. Пусть для определенности ρ_1 задано на $I_1 = \{1, \ldots, s\}$ и ρ_2 — на $I_2 = \{s+1, \ldots, n\}$. Положим $\tilde{u}_1 = (u_1, \ldots, u_s)$ и $\tilde{u}_2 = (u_{s+1}, \ldots, u_n)$. Соотношение (10) для ρ_1 и ρ_2 имеет вид

$$g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet (\bar{g}_{\rho_1}(\tilde{u}_1) g^*_{\rho_1}(\tilde{u}_1) g_{\rho_2}(\tilde{u}_2)) \leqslant g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \vee g_{\rho_2}(\tilde{u}_2).$$

Введя обозначение $\bar{g}_{\rho_1} g^*_{\rho_1} = g_\#$ и воспользовавшись определением операции $\bullet$ и тем, что наборы $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ заданы на непересекающихся множествах I_1 и I_2, преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet (g_\#(\tilde{u}_1) g_{\rho_2}(\tilde{u}_2)) &= (g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet (g_\#(\tilde{u}_1))(g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet g_{\rho_2}(\tilde{u}_2)) \\ &= (g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet g_\#(\tilde{u}_1))1 = g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet g_\#(\tilde{u}_1). \end{aligned}$$

В результате получаем $g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet g_\#(\tilde{u}_1) \leqslant g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \vee g_{\rho_2}(\tilde{u}_2)$. Подставляя $\tilde{u}_2 = \tilde{0}$ и принимая во внимание, что по свойству 5° из иррефлексивности ρ_2 следует $g_{\rho_2}(\tilde{0}) = 0$, получаем $g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \bullet g_\#(\tilde{u}_1) \leqslant g_{\rho_1}(\tilde{u}_1)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Любая слабая разделительная декомпозиция $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ является декомпозицией.*

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай слабых декомпозиций (ρ_1, ρ_2) длины 2. В [11] доказано, что для каждого ТОН-отношения r_1 и произвольного отношения r_2 $(r_1, r_2 \subseteq A^2)$ при всяком X $(X \subseteq A)$ выполнено $C_{r_2}(C_{r_1}(X)) = C_{r_1 \otimes r_2}(X)$. (Этот факт установлен для функций выбора на конечных множествах вариантов A, но доказательство переносится на любые множества.) Используя лемму 2 и равенство $\rho_1 \otimes \rho_2 = \rho$, получаем нужное утверждение.

2. Для $k \geqslant 3$ применим индукцию по k. Пусть при $k-1$ теорема справедлива. Если $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ — слабая разделительная декомпозиция отношения ρ, то по лемме 1 декомпозиция $(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$ является слабой разделительной декомпозицией отношения $\rho' = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_{k-1}$, а (ρ', ρ_k) — слабой разделительной декомпозицией отношения ρ. По предположению каждая из них является декомпозицией. Поэтому

$$C_\rho = C_{\rho'} \circ C_{\rho_k} = C_{\rho_1} \circ \ldots \circ C_{\rho_{k-1}} \circ C_{\rho_k}.$$

Теорема 1 доказана.

В соответствии с теоремой 1 ниже будем говорить только о разделительных декомпозициях (не слабых). Нам понадобятся некоторые свойства ТОН-отношений.

Лемма 3. *Если r — иррефлексивное ТОН-отношение, то $\#_r$ — эквивалентность.*

Доказательство. Отношение $\#_r$ симметрично и в силу иррефлексивности r — рефлексивно. Докажем его транзитивность. Предположим, что это не так и для некоторых x, y и z имеет место $x\#_r y$, $y\#_r z$ и xrz (или zrx). Тогда по свойству ТОН-отношения выполнено xry (или yrx), что противоречит $x\#_r y$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Представляющая функция любого отношения эквивалентности ε на R^I имеет вид $g_\varepsilon = p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}\dots p'_{i_v}\bar{p}_{i_v}$, где $\{i_1,\dots,i_v\}\subseteq I$.*

Доказательство. Поскольку ε рефлексивно и транзитивно, в силу 5° и 8° имеем $g_\varepsilon = g_{\hat\lambda_1^*}\dots g_{\hat\lambda_s^*}$. Из симметрии ε следует, что $g_\varepsilon = g_{(\hat\lambda_1^*)^{-1}}\dots g_{(\hat\lambda_s^*)^{-1}}$. Перемножая, получаем

$$g_\varepsilon = g_{\hat\lambda_1^*}g_{(\hat\lambda_1^*)^{-1}}\dots g_{\hat\lambda_s^*}g_{(\hat\lambda_s^*)^{-1}}. \tag{11}$$

Отношение λ^*, двойственное лексикографии, согласно 3° имеет представляющую функцию $g_{\lambda^*} = (g_\lambda)^*$. Используя (8), нетрудно проверить, что $g_{\lambda^*} = p_1\vee p'_1p_2\vee\dots\vee p'_1p'_2\dots p'_{n-1}p'_n$. Кроме того, поскольку $(\lambda^*)^{-1}$ получается из λ^* инвертированием всех осей, из 4° следует, что $g_{(\lambda^*)^{-1}} = \bar{p}'_1\vee\bar{p}_1\bar{p}'_2\vee\dots\vee\bar{p}_1\bar{p}_2\dots\bar{p}_{n-1}\bar{p}_n$. С учетом этого получаем $g_{\lambda^*}g_{(\lambda^*)^{-1}} = p'_1\bar{p}_1\dots p'_n\bar{p}_n$. Из 4° следует, что при переходе от λ к любому однотипному отношению $\hat\lambda$ правая часть не изменится, т. е. $g_{\hat\lambda^*}g_{(\hat\lambda^*)^{-1}} = p'_1\bar{p}_1\dots p'_n\bar{p}_n$. Применив это соотношение к (11), получаем утверждение леммы 4.

Множество $\{i_1,\dots,i_v\}$, участвующее в формулировке леммы, обозначим через I_ε. Из вида функции g_ε следует, что $\mathbf{x}\varepsilon\mathbf{y} \Leftrightarrow (x_i = y_i,\ i\in I_\varepsilon)$.

Лемма 5. 1. *Если ρ — иррефлексивное ТОН-отношение и $\varepsilon = \#_\rho$ — соответствующая эквивалентность, то ρ можно считать заданным на I_ε, причем на I_ε оно иррефлексивно и связно.*

2. *Обратно, если ρ — иррефлексивное связное отношение на некотором $\mathrm{R}^{I'}$, $I'\subseteq I$, то, рассматриваемое на всем R^I, оно является иррефлексивным ТОН-отношением и $I' = I_\varepsilon$, где $\varepsilon = \#_\rho$.*

Доказательство. 1. Пусть для определенности $I_\varepsilon = \{1,\dots,s\}$. Покажем, что представляющая функция g_ρ может быть задана на $\{-1,0,1\}^s$. Для набора $\tilde{u}\in\{-1,0,1\}^n$ обозначим через $\tilde{u}'$ его начало длины s. Рассмотрим произвольные $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\in\{-1,0,1\}^n$ такие, что $\tilde{u}'_1 = \tilde{u}'_2$. Введем наборы $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{0}\in\mathrm{R}^n$, положив $\mathbf{x} = -\tilde{u}_1$, $\mathbf{y} = -\tilde{u}_2$

и $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Так как $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ совпадают на компонентах из I_ε, то выполнено $\mathbf{x}\varepsilon\mathbf{y}$ и, следовательно, $\mathbf{x}\#_\rho\mathbf{y}$. Отсюда по свойству транзитивности относительно несравнимости получаем $g_\rho(\Delta(\mathbf{0}, \mathbf{x})) = g_\rho(\Delta(\mathbf{0}, \mathbf{y}))$. С учетом равенств $\Delta(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \tilde{u}_1$ и $\Delta(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = \tilde{u}_2$ получаем, что $g_\rho(\tilde{u}_1) = g_\rho(\tilde{u}_2)$. Это доказывает, что значения $g_\rho(\tilde{u})$ однозначно определяются наборами $\tilde{u}'$ длины s.

Рассмотрим произвольные $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathrm{R}^s$. Если $\mathbf{x}' \neq \mathbf{y}'$, то $\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \neq \tilde{0}'$, а поэтому $g_\varepsilon(\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}')) = 0$. Это означает, что $\mathbf{x}'\rho\mathbf{y}'$ или $\mathbf{y}'\rho\mathbf{x}'$, и доказывает связность ρ на R^s. Если же $\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$, то $\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \tilde{0}'$ и $g_\varepsilon(\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}')) = 1$. Следовательно, $g_\rho(\tilde{0}') = g_\rho(\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}')) = 0$. В силу 5° отношение ρ иррефлексивно на R^s.

2. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — наборы из R^I, а $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ — их поднаборы, задаваемые множеством I'. Пусть $\mathbf{x}\#_\rho\mathbf{y}$. Из иррефлексивности и связности ρ на I' следует, что $\mathbf{x}\#_\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{y}'$. В этом случае $\Delta(\mathbf{z}', \mathbf{x}') = \Delta(\mathbf{z}', \mathbf{y}')$ и $g_\rho(\Delta(\mathbf{z}', \mathbf{x}')) = g_\rho(\Delta(\mathbf{z}', \mathbf{y}'))$. Поэтому $\mathbf{z}\rho\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{z}\rho\mathbf{y}$. Это доказывает, что ρ — ТОН-отношение. Оно, очевидно, иррефлексивно, а $\mathbf{x}\#_\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{y}'$ приводит к $I_\varepsilon = I'$. Лемма 5 доказана.

Замечание 1. С отношением r на произвольном A может быть связано естественное отношение эквивалентности ε_r на A:

$$x\varepsilon_r y \Longleftrightarrow (\forall z \in A)(xrz \Leftrightarrow yrz \wedge zrx \Leftrightarrow zry).$$

Из леммы 5 извлекается характеризация порядковых ТОН-отношений ρ. Только для них $\varepsilon_\rho = \#_\rho$ и факторотношение ρ/ε_ρ связно. В случае произвольных (не порядковых) ТОН-отношений каждое из этих свойств может быть нарушено. Примером служит ТОН-отношение $r = \{(z, x), (z, y), (y, z)\}$ на множестве $A = \{x, y, z\}$, для которого r/ε_r несвязно и $\varepsilon_r \neq \#_r$.

Следующая теорема указывает условия на g_ρ , необходимые и достаточные для того, чтобы порядковое отношение ρ обладало декомпозицией (ρ_1, ρ_2) с заданной базой (I_1, I_2). Обозначив через $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ поднаборы набора $\tilde{u} \in \{-1, 0, 1\}^n$, относящиеся к множествам I_1 и I_2, будем использовать запись $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. В частности, $\tilde{0} = (\tilde{0}_1, \tilde{0}_2)$. Положим $K_0(\tilde{u}_1) = \bigwedge_{i \in I_1} p_i' \bar{p}_i$.

Теорема 2. *Порядковое отношение ρ обладает разделительной декомпозицией с базой (I_1, I_2) тогда и только тогда, когда*

$$g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{0}_2) \vee K_0(\tilde{u}_1) g_\rho(\tilde{0}_1, \tilde{u}_2) \tag{12}$$

и выполнено условие

$$g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{0}_2) \vee K_0(\tilde{u}_1) \geqslant (g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{0}_2))^*. \tag{13}$$

Доказательство. 1. Пусть разделительная декомпозиция (ρ_1, ρ_2) с базой (I_1, I_2) существует. При этом порядковое отношение ρ_1 существенно зависит от всех критериев множества I_1, ибо если ρ_1 не зависит от критерия $i \in I_1$, то g_{ρ_1} не зависит от u_i, и представляющая функция g_ρ, согласно (9) равная $g_{\rho_1} \vee g^*_{\rho_1} g_{\rho_2}$, не зависит от u_i. По лемме 2 отношение ρ_1 является ТОН-отношением и в соответствии с леммой 5 (с учетом существенной зависимости от критериев из I_1) является иррефлексивным связным отношением на I_1 . Согласно утверждению 6° имеем

$$g^*_{\rho_1} \leqslant g_{\rho_1} \vee K_0. \tag{14}$$

Из иррефлексивности ρ_1 следует рефлексивность отношения ρ^*_1, что в силу 5° эквивалентно условию $g^*_{\rho_1} \geqslant K_0$. Эти соотношения можно записать в виде $g^*_{\rho_1} = \alpha g_{\rho_1} \vee K_0$, где $\alpha = \alpha(\tilde{u}_1)$ — некоторая функция. Подставляя в (9), получаем $g_\rho = g_{\rho_1} \vee (\alpha g_{\rho_1} \vee K_0) g_{\rho_2} = g_{\rho_1} \vee K_0 g_{\rho_2}$, или в более полной записи —

$$g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) \vee K_0(\tilde{u}_1) g_{\rho_2}(\tilde{u}_2). \tag{15}$$

Положив $\tilde{u}_1 = \tilde{0}_1$, $\tilde{u}_2 = \tilde{0}_2$, и принимая во внимание, что $g_{\rho_1}(\tilde{0}_1) = 0$, $g_{\rho_2}(\tilde{0}_2) = 0$ (ρ_1, ρ_2 иррефлексивны) и $K_0(\tilde{0}_1) = 1$, получаем $g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) = g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{0}_2)$, $g_{\rho_2}(\tilde{u}_2) = g_\rho(\tilde{0}_1, \tilde{u}_2)$. С учетом этих равенств соотношения (15) и (14) превращаются в (12) и (13).

2. Обратно, пусть g_ρ удовлетворяет условию (12) и выполнено (14). Введем отношения ρ_1 и ρ_2, положив $g_{\rho_1}(\tilde{u}_1) = g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{0}_2)$, $g_{\rho_2}(\tilde{u}_2) = g_\rho(\tilde{0}_1, \tilde{u}_2)$. Учитывая иррефлексивность ρ, в силу 5° получаем $g_{\rho_1}(\tilde{0}_1) = g_{\rho_2}(\tilde{0}_2) = g_\rho(\tilde{0}_1, \tilde{0}_2) = 0$. Отсюда вытекает иррефлексивность ρ_1 и ρ_2. Из (13) и 6° следует, что ρ_1 связно на I_1, поэтому по лемме 5 ρ_1 является ТОН-отношением. Чтобы доказать, что (ρ_1, ρ_2) является разделительной декомпозицией отношения ρ, достаточно убедиться (см. доказательство теоремы 1), что $\rho_1 \otimes \rho_2 = \rho$, т. е. $g_{\rho_1} \vee g^*_{\rho_1} g_{\rho_2} = g_\rho$. Этот факт устанавливается так же, как при завершении доказательства п. 1 теоремы. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Если для отношения ρ существует разделительная декомпозиция $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ с базой $(I_1, \ldots, I_k)$, то функция g_{ρ_s}, $1 \leqslant s \leqslant k$, получается из g_ρ подстановкой $u_i = 0$ при всех $i \notin I_s$.*

Действительно, в силу леммы 1 имеем $\rho = \rho' \circ \rho''$, $\rho' = \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_{s-1}$, $\rho'' = \rho_s \circ \hat{\rho}$, $\hat{\rho} = \rho_{s+1} \circ \ldots \circ \rho_k$. Отсюда и из доказательства теоремы 2 следует, что $g_{\rho''}(\tilde{u}'') = g_\rho(\tilde{0}', \tilde{u}'') = g(\tilde{0}_1, \ldots, \tilde{0}_{s-1}, \tilde{u}'')$ и $g_{\rho_s}(\tilde{u}_s) = g_{\rho''}(\tilde{u}_s, \tilde{0}_{s+1}, \ldots, \tilde{0}_k) = g_\rho(\tilde{0}_1, \ldots, \tilde{0}_{s-1}, \tilde{u}_s, \tilde{0}_{s+1}, \ldots, \tilde{0}_k)$.

Из следствия 2 вытекает

Следствие 3. *Если для отношения ρ существует разделительная декомпозиция $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ с заданной базой $(I_1, \ldots, I_k)$, то такая разделительная декомпозиция единственна.*

Из следствия 2 и того факта, что подстановки констант сохраняют монотонность функций, вытекает

Следствие 4. *Если* $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ — *разделительная декомпозиция правильного отношения* ρ, *то отношения* $\rho_1, \dots, \rho_k$ *правильны.*

Замечание 2. Если ρ — правильное порядковое отношение, то в условиях (12) и (13) конъюнкция $K_0(\tilde{u}_1)$ допускает замену на $K_0^+(\tilde{u}_1) = \bigwedge\limits_{i \in I_1} p_i'$. Для условия (13) этот факт следует из 6°, а для (12) может быть установлен подобно тому, как обычно доказывается отсутствие отрицаний в минимальных ДНФ монотонных булевых функций.

Теорема 2 и следствие 2 позволяют находить разделительную декомпозицию с заданной базой либо доказывать отсутствие такой декомпозиции.

4. Лучшая разделительная декомпозиция

По следствию 3 каждая разделительная декомпозиция $\mathbf{R} = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ однозначно определяется своей базой $B(\mathbf{R})$. Качество декомпозиций будем связывать со свойствами их баз.

Пусть $\mathbf{I} = \{I_1, \dots, I_k\}$ и $\mathbf{J} = \{J_1, \dots, J_l\}$ — два разбиения множества I. Будем говорить, что разбиение $\mathbf{J}$ *не крупнее* $\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ *не мельче* $\mathbf{J}$), если каждое I_s, $1 \leqslant s \leqslant k$, представимо в виде объединения некоторых множеств из $\mathbf{J}$.

Скажем, что декомпозиция $\mathbf{R}$ *не хуже* декомпозиции $\mathbf{R}'$, и запишем $\mathbf{R} \succeq \mathbf{R}'$, если $\{B(\mathbf{R})\}$ не крупнее $\{B(\mathbf{R}')\}$, где через $\{B(\mathbf{R})\}$ обозначено неупорядоченное разбиение, соответствующее базе $B(\mathbf{R})$. Декомпозиции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ назовем *равноценными* (обозначение $\mathbf{R} \asymp \mathbf{R}'$), если $\mathbf{R} \succeq \mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}' \succeq \mathbf{R}$. Очевидно, что базы равноценных декомпозиций совпадают с точностью до перестановки множеств. Скажем, что разделительная декомпозиция $\mathbf{R}$ *строго лучше* $\mathbf{R}'$ (обозначение $\mathbf{R} \succ \mathbf{R}'$), если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ не равноценны и $\mathbf{R} \succeq \mathbf{R}'$. Разделительную декомпозицию $\mathbf{R}$ назовем *максимальной*, если для любой разделительной декомпозиции $\mathbf{R}'$ из $\mathbf{R}' \succeq \mathbf{R}$ следует $\mathbf{R}' \asymp \mathbf{R}$. В максимальной разделительной декомпозиции $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ все отношения ρ_i неразделимы. Если бы некоторое ρ_i обладало декомпозицией $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$, то из $C_\rho = C_{\rho_1} \circ \dots \circ C_{\rho_k}$ и $C_{\rho_i} = C_{\sigma_1} \circ \dots \circ C_{\sigma_l}$ вытекало бы разложение

$$C_\rho = C_{\rho_1} \circ \dots \circ C_{\rho_{i-1}} \circ C_{\sigma_1} \circ \dots \circ C_{\sigma_l} \circ C_{\rho_{i+1}} \circ \dots \circ C_{\rho_k},$$

приводящее к декомпозиции, которая строго лучше $(\rho_1, \dots, \rho_k)$.

Декомпозицию $\mathbf{R}$ назовем *лучшей*, если $\mathbf{R} \succeq \mathbf{R}'$ для любой разделительной декомпозиции $\mathbf{R}'$. Очевидно, что все лучшие декомпозиции заданного отношения (если существуют) максимальны и равноценны. Исследуем вопрос существования лучших декомпозиций.

Лемма 6. *Если для разбиения $(I_1, I \setminus I_1)$ выполнено соотношение (13), то (13) справедливо для каждого разбиения $(I_1', I \setminus I_1')$, в котором $I_1' \subseteq I_1$.*

Доказательство. Предположим, что это не так и на множестве I_1' существует ненулевой набор $\tilde{u}_1'$ такой, что $g_\rho(\tilde{u}_1', \tilde{0}_2') = 0$ и $(g_\rho(\tilde{u}_1', \tilde{0}_2'))^* = 1$, т. е. $g_\rho(-\tilde{u}_1', \tilde{0}_2') = 0$ (здесь $\tilde{0}_2'$ — нулевой набор длины $|I \setminus I_1'|$, где $|\cdot|$ означает мощность множества). Обозначим через $\tilde{u}_1$ набор на I_1, который на I_1' совпадает с $\tilde{u}_1'$ и остальные компоненты которого равны 0, а через $\tilde{0}_2$ — нулевой набор длины $|I \setminus I_1|$. Тогда $g_\rho(\tilde{u}_1, \tilde{0}_2) = g_\rho(\tilde{u}_1', \tilde{0}_2') = 0$ и $g_\rho(-\tilde{u}_1, \tilde{0}_2) = g_\rho(-\tilde{u}_1', \tilde{0}_2') = 0$. Это противоречит условию (13) для $(I_1, I \setminus I_1)$. Лемма 6 доказана.

Для подмножества $I' \subseteq I$ и функции $g : \{-1, 0, 1\}^I \to \{0, 1\}$ обозначим через $g(I' \to 0)$ функцию, полученную из $g(\tilde{u})$ подстановкой $u_i = 0$ при всех $i \in I'$. Запись $h(I')$ будем применять для обозначения того, что функция h зависит от переменных с индексами из I', т. е. осуществляет отображение $\{-1, 0, 1\}^{I'} \to \{0, 1\}$. Множество I', $I' \subseteq I$, назовем *допустимым*, если существует разделительная декомпозиция с базой $(I', I \setminus I')$.

Лемма 7. *Если множества I_1 и J_1 допустимы и $I_1 \cap J_1 \neq \varnothing$, то множество $I_1 \cap J_1$ также допустимо.*

Доказательство. Введем обозначения $I_2 = I \setminus I_1$ и $J_2 = I \setminus J_1$. Тогда условие (12) для I_1 и J_1 приобретает вид

$$g_\rho = g_\rho(I_2 \to 0) \vee K_0(I_1) g_\rho(I_1 \to 0), \tag{16}$$

$$g_\rho = g_\rho(J_2 \to 0) \vee K_0(J_1) g_\rho(J_1 \to 0). \tag{17}$$

Из (16) получаем

$$\begin{aligned} g_\rho(J_2 \to 0) &= g_\rho(I_2 \cup J_2 \to 0) \vee K_0(I_1 \setminus J_2) g_\rho(I_1 \cup J_2 \to 0), \\ g_\rho(J_1 \to 0) &= g_\rho(I_2 \cup J_1 \to 0) \vee K_0(I_1 \setminus J_1) g_\rho(I_1 \cup J_1 \to 0). \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя эти выражения в (17) и группируя с учетом равенств $I_1 \setminus J_2 = I_1 \cap J_1$, $\overline{I_2 \cup J_2} = I_1 \cap J_1$, находим

$$g_\rho = h_1(I_1 \cap J_1) \vee K_0(I_1 \cap J_1) h_2, \tag{19}$$

где введены обозначения

$$h_1(I_1 \cap J_1) = g_\rho(I_2 \cup J_2 \to 0),$$

$$h_2 = g_\rho(I_1 \cup J_2 \to 0) \vee g_\rho(I_2 \cup J_1 \to 0) \vee K_0(I_1 \cup J_1 \setminus (I_1 \cap J_1)) g_\rho(I_1 \cup J_1 \to 0).$$

Поскольку K_0 обращается в 1 лишь на нулевом наборе, равенство (19) можно переписать в виде

$$g_\rho = h_1(I_1 \cap J_1) \vee K_0(I_1 \cap J_1) h'(I_2 \cup J_2), \tag{20}$$

где $h'(I_2 \cup J_2) = h_2(I_1 \cap J_1 \to 0)$. Легко проверить, что $h_1(I_1 \cap J_1 \to 0) = g_\rho(\tilde{0})$ и $h'(I_2 \cup J_2 \to 0) = g_\rho(\tilde{0})$. Поскольку ρ иррефлексивно, эти значения равны 0. Отсюда и из (20) следует, что $g_\rho(I_2 \cup J_2 \to 0) = h_1(I_1 \cap J_1)$, $g_\rho(I_1 \cap J_1 \to 0) = h'(I_2 \cup J_2)$. Подставляя эти выражения в (20), приходим к представлению

$$g_\rho = g_\rho(I_2 \cup J_2 \to 0) \vee K_0(I_1 \cap J_1) g_\rho(I_1 \cap J_1 \to 0),$$

которое имеет вид (12) применительно к $I_1 \cap J_1$.

В силу леммы 6 соотношение (13) для $I_1 \cap J_1$ вытекает из включения $I_1 \cap J_1 \subseteq I_1$ и того, что по теореме 2 допустимое множество I_1 удовлетворяет условию (13). Лемма 7 доказана.

Будем говорить, что критерий i *поглощает* критерий j $(i, j \in I)$, если функции $g_\rho(u_i = 1)$ и $g_\rho(u_i = -1)$ не зависят существенно от переменной u_j, где через $g_\rho(u_i = \alpha)$ обозначена функция, полученная из g_ρ подстановкой $u_i = \alpha$. Скажем, что критерий i *поглощает* множество J, если критерий i поглощает каждый критерий из J.

Лемма 8. *Отношение поглощения критериев транзитивно.*

Доказательство. Убедимся, что если i поглощает j и j поглощает l, то i поглощает l. Возьмем $\alpha \in \{-1, 1\}$. Так как $g_\rho(u_i = \alpha)$ не зависит от u_j, то $g_\rho(u_i = \alpha) = g_\rho(u_i = \alpha, u_j = \alpha)$. Последнюю функцию также можно рассматривать как результат подстановки $u_i = \alpha$ в функцию $g_\rho(u_j = \alpha)$. Так как $g_\rho(u_j = \alpha)$ не зависит от u_l, то функция $g_\rho(u_i = \alpha)$ также не зависит от u_l. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если множества I_1 и J_1 допустимы и $I_1 \cap J_1 = \varnothing$, то функция g_ρ представима в виде*

$$g_\rho = \bigvee_{i \in I_1 \cup J_1} (p_i \vee \bar{p}'_i) \vee g, \tag{21}$$

где g не зависит от переменных u_i, $i \in I_1 \cup J_1$.

Доказательство. Рассмотрим некоторое i из $I_1 \cup J_1$ (пусть, например, $i \in I_1$). Возьмем $j \in J_1$. Из (12) следует, что i поглощает множество $I_2 = I \setminus I_1$, поскольку подстановки $u_i = 1$ и $u_j = -1$ обращают $K_0(I_1)$ в 0. В частности, i поглощает j. Аналогично j поглощает множество $J_2 = I \setminus J_1$. По лемме 8 критерий i также поглощает J_2 и поэтому i поглощает множество $I_2 \cup J_2 = I$. Нетрудно видеть, что справедливо разложение по переменной u_i:

$$g_\rho = p_i g_\rho(u_i = 1) \vee p'_i \bar{p}_i g_\rho(u_i = 0) \vee \bar{p}'_i g_\rho(u_i = -1).$$

Поскольку i поглощает множество I, это представление приобретает вид $g_\rho = \alpha p_i \vee p'_i \bar{p}_i h \vee \beta \bar{p}'_i$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, $h = h(I \setminus \{i\})$ — некоторая функция.

Покажем, что $\alpha \vee \beta = 1$. Если допустить, что $\alpha = \beta = 0$, получим представление $g_\rho = p'_i\bar{p}_i h$, из которого следует, что $g_\rho(I_2 \to 0) = p'_i\bar{p}_i h(I_2 \to 0)$ и $(g_\rho(I_2 \to 0))^* = p_1 \vee \bar{p}'_i \vee (h(I_2 \to 0))^*$. Соотношение (13) будет нарушено. Это противоречит допустимости I_1.

Убедимся теперь, что $\alpha = \beta = 1$. Если, например, $\alpha = 0$, то имеет место представление $g_\rho = p'_i\bar{p}_i h \vee \bar{p}'_i = \bar{p}_i h \vee \bar{p}'_i$. Подстановка $u_j = 1$ дает $g_\rho(u_j = 1) = \bar{p}_i h(u_j = 1) \vee \bar{p}'_i$, откуда $\bar{p}'_i \leqslant g_\rho(u_j = 1) \leqslant \bar{p}_i$. Это противоречит поглощению критерия i критерием j.

В итоге получаем $g_\rho = p_i \vee \bar{p}'_i \vee p'_i\bar{p}_i h = p_i \vee \bar{p}'_i \vee h$. Взяв любое $l \in I_1 \cup J_1 \setminus \{i\}$, аналогично можно записать $g_\rho = p_l \vee \bar{p}'_l \vee h'$. Приравняв правые части и подставив $u_i = 0$, получаем $h = p_l \vee \bar{p}'_l \vee h'(u_i = 0) = p_l \vee \bar{p}'_l \vee h_1$, что дает $g_\rho = p_i \vee \bar{p}'_i \vee p_l \vee \bar{p}'_l \vee h_1$. Продолжая эти рассуждения, придем к (21). Лемма 9 доказана.

Из леммы 7 и того факта, что для монотонной функции g_ρ представление (21) невозможно, вытекает

Следствие 5. *Для правильного отношения ρ все допустимые множества пересекаются.*

Лемма 10. *Если $g_\rho = p_i \vee \bar{p}'_i \vee g$ и g не зависит от u_i, то множество I_s базы максимальной декомпозиции, содержащее i, одноэлементно.*

Доказательство. Пусть $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ — максимальная декомпозиция, $(I_1, \ldots, I_k)$ — ее база, $i \in I_s$. По следствию 3 функция g_{ρ_s} может быть получена из g_ρ подстановками $u_j = 0$ при каждом $j \notin I_s$. Поэтому $g_{\rho_s} = p_i \vee \bar{p}'_i \vee h$ при некотором h. Это представление может быть преобразовано к виду $g_{\rho_s} = p_i \vee \bar{p}'_i \vee p'_i\bar{p}_i h$. Допустив, что в I_s имеются элементы, отличные от i, по теореме 2 можно заключить, что отношение ρ_s разделимо на отношения, заданные на множествах $\{i\}$ и $I_s \setminus \{i\}$, ибо условие (13), приобретающее вид $(p_i \vee \bar{p}'_i)^* = p'_i\bar{p}_i \leqslant (p_i \vee \bar{p}'_i) \vee p'_i\bar{p}_i$, выполнено. Это противоречит максимальности декомпозиции. Лемма 10 доказана.

Теорема 3. *Всякое отношение ρ имеет лучшую декомпозицию.**)

Доказательство. Достаточно убедиться, что базы $(I_1, \ldots, I_k)$ и $(J_1, \ldots, J_l)$ любых максимальных декомпозиций $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$ отношения ρ могут отличаются лишь расположением множеств. Для этого докажем, что из обеих баз можно удалить одно и то же множество так, что оставшиеся базы будут соответствовать максимальным декомпозициям некоторого отношения ρ' на меньшем множестве критериев. Доказательство разобьем на ряд случаев.

---

*) Если отношение ρ неразделимо, его лучшая декомпозиция тривиальна, т. е. совпадает с ρ.

Случай 1 ($I_1 = J_1$). По лемме 1 имеем $C_\rho = C_{\rho_1} \circ C_{\rho'}$ и $C_{\rho'} = C_{\rho_2} \circ \ldots \circ C_{\rho_k}$. Разделительная декомпозиция $(\rho_2, \ldots, \rho_k)$ отношения ρ' максимальна. Если бы это было не так, то, взяв декомпозицию $(\tau_2, \ldots, \tau_m)$, строго лучшую ее, можно было бы образовать декомпозицию $(\rho_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, которая строго лучше максимальной декомпозиции $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$.

Аналогично $(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$ образует максимальную декомпозицию отношения σ' такого, что (σ_1, σ') — декомпозиция отношения ρ. Отношения ρ' и σ' совпадают, ибо ρ_1 и σ_1 заданы на множестве I_1, и по следствию 2 выполнено $g_{\rho'} = g_{\sigma'} = g_\rho(I_1 \to 0)$.

Случай 2 ($I_1 \neq J_1$, $I_1 \cap J_1 \neq \varnothing$). Хотя бы одно из множеств I_1 и J_1 (пусть I_1) отлично от $I_1 \cap J_1$. Поскольку множества I_1 и J_1 допустимы, по лемме 7 множество $I_1 \cap J_1$ также допустимо. В этом случае представление (18) имеет вид

$$g_\rho(\hat{I} \to 0) = g_\rho(\hat{I} \cup \hat{J} \to 0) \vee K_0(I_1 \cap J_1) g_\rho(\hat{I} \cup J_1 \to 0), \tag{22}$$

где $\hat{I} = I_2 \cup \ldots \cup I_k$ и $\hat{J} = J_2 \cup \ldots \cup J_l$. Согласно следствию 2 имеем $g_{\rho_1}(I_1) = g_\rho(\hat{I} \to 0)$. На множествах критериев $I_1 \cap J_1$ и $I_1 \setminus J_1$ введем отношения τ_1 и τ_2, положив $g_{\tau_1}(I_1 \cap J_1) = g_\rho(\hat{I} \cup \hat{J} \to 0)$, $g_{\tau_2}(I_1 \setminus J_1) = g_\rho(\hat{I} \cup J_1 \to 0)$, и перепишем (22):

$$g_{\rho_1}(I_1) = g_{\tau_1}(I_1 \cap J_1) \vee K_0(I_1 \cap J_1) g_{\tau_2}(I_1 \setminus J_1). \tag{23}$$

Из условия (13) для множества $I_1 \cap J_1$ вытекает, что τ_1 является ТОН-отношением. Как было установлено при доказательстве теоремы 2, в этом случае (23) эквивалентно равенству $\rho_1 = \tau_1 \otimes \tau_2$. Отсюда следует, что (τ_1, τ_2) — декомпозиция отношения ρ_1. Это противоречит максимальности $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$. Поэтому случай 2 невозможен.

Случай 3 ($I_1 \cap J_1 = \varnothing$). По лемме 9 элементы множества I_1 удовлетворяют условиям леммы 10, в соответствии с которой $I_1 = \{i\}$ при некотором i и найдется s такое, что $J_s = \{i\}$. Согласно лемме 1 существует декомпозиция отношения ρ с базой (J', J''), где $J' = J_1 \cup \ldots \cup J_{s-1}$, $J'' = J_s \cup \ldots \cup J_l$. Поскольку $i \notin J'$, допустимые множества I_1 и J' не пересекаются. Воспользовавшись леммой 9, заключаем, что все элементы множества J' удовлетворяют лемме 10. По этой лемме множества $J_1, \ldots, J_{s-1}$ одноэлементны. Пусть $J_1 = \{j_1\}, \ldots, J_{s-1} = \{j_{s-1}\}$. Применив лемму 1, образуем декомпозицию (τ', τ'') отношения ρ, где τ' задано на $J_1 \cup \ldots \cup J_s$ и имеет декомпозицию $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$. Из леммы 9 следует, что $g_{\tau'} = p_{j_1} \vee \bar{p}'_{j_1} \vee \ldots \vee p_{j_{s-1}} \vee \bar{p}'_{j_{s-1}} \vee p_i \vee \bar{p}'_i$. В силу симметрии этой функции отношение τ' может быть представлено декомпозицией $(\sigma_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1})$, а отношение ρ — декомпозицией $(\sigma_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-1}, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_l)$, база которой начинается с множества $J_s = I_1$. Мы оказываемся в условиях уже рассмотренного случая 1.

В результате показано, что в базах максимальных декомпозиций можно устранить равные множества и получить максимальные декомпозиции одного и того же отношения. Продолжая эту процедуру до тех пор, пока не исчерпаются все множества, получим утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Из доказательства видно, что лучшие декомпозиции совпадают с точностью до перестановки некоторых подряд идущих отношений, заданных на одноэлементных множествах.

Замечание 4. Правильные порядковые отношения обладают единственной лучшей декомпозицией. Это следует из того, что разные лучшие декомпозиции отношения ρ могут возникнуть лишь при наличии у функции g_ρ представления (21), что для монотонных функций невозможно.

5. Алгоритмические проблемы построения разделительных декомпозиций

Исследуем проблемы, связанные со сложностью нахождения разделительных декомпозиций. Будем рассматривать две задачи.

Задача о разделительной декомпозиции с данной базой состоит в том, чтобы по отношению ρ и разбиению $(I_1, \dots, I_k)$ множества I узнать, существует ли разделительная декомпозиция $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ отношения ρ с базой $B(\rho_1, \dots, \rho_k) = (I_1, \dots, I_k)$, и, если существует, найти ее. Согласно следствию 1 можно ограничиться разбиениями (I_1, I_2) на два множества.

Задача о лучшей разделительной декомпозиции состоит в том, чтобы по отношению ρ построить его лучшую разделительную декомпозицию, которая существует по теореме 3.

Будем считать, что порядковое отношение ρ представлено функцией g_ρ в форме ДНФ либо КНФ. Отдельно будем исследовать случай правильных порядковых отношений. Для задания порядкового отношения общего вида будем использовать произвольные ДНФ и КНФ, а для правильных порядковых отношений — приведенные ДНФ и КНФ, которые единственны в силу монотонности функций g_ρ. Далее для краткости будем говорить о задании отношений в виде ДНФ и КНФ, подразумевая под этим форму их представляющих функций.

Сформулируем результаты о сложности задач, связанных с разделительной декомпозицией отношений.

Теорема 4. *Задачи о разделительной декомпозиции с данной базой и о лучшей разделительной декомпозиции*

• NP-*трудны для произвольных порядковых отношений в форме* ДНФ *или* КНФ,

• NP-*трудны для правильных порядковых отношений в форме* ДНФ,

• *полиномиально решаемы для правильных порядковых отношений в форме* КНФ.

Понятия NP-трудности и полиномиальной решаемости задач предполагаются известными (см., например, [3]). Доказательство теоремы 4 разбивается на на несколько этапов (леммы 11–18).

Лемма 11. *При представлении отношений в форме* КНФ *задачи о разделительной декомпозиции с данной базой и о лучшей разделительной декомпозиции* NP-*трудны.*

Доказательство. Укажем сведение к ним задачи выполнимость [3]. Пусть $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s$ — КНФ булевой функции $f(p_1, \ldots, p_n)$. Если $f(0, \ldots, 0) = 1$, КНФ выполнима. Будем считать, что $f(0, \ldots, 0) = 0$. На множестве $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ введем порядковое отношение ρ посредством КНФ

$$g_\rho = (p_0' \vee \widehat{D}_1) \ldots (p_0' \vee \widehat{D}_s)(p_0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_n),$$

где $\widehat{D}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ означает дизъюнкцию из $P_{3,2}$, графически совпадающую с дизъюнкцией D_j из КНФ функции f. Отношение ρ иррефлексивно, ибо $g_\rho(0, \ldots, 0) = 0$. Легко видеть, что представляющая функция g_ρ может быть записана в виде

$$g_\rho = p_0 \vee (p_0' \vee \widehat{D}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{D}_s)(p_1 \vee \ldots \vee p_n). \tag{24}$$

Эта функция существенно зависит от всех аргументов (а отношение ρ — от всех критериев), поскольку $g_\rho(0, \ldots, 0) = 0$, а на всех наборах с одной единицей она обращается в единицу.

Убедимся, что для отношения ρ, определенного равенством (24), декомпозиция с базой $(\{0\}, \{1, \ldots, n\})$ существует тогда и только тогда, когда лучшая разделительная декомпозиция нетривиальна. Согласно лемме 1 это эквивалентно тому, что существует разделительная декомпозиция длины 2. Подставив $u_i = -1$ $(i \neq 0)$ в (24), получаем

$$g_\rho(u_i = -1) = p_0 \vee (p_0' \vee D_1' \wedge \ldots \wedge D_s')(p_1 \vee \ldots \vee p_{i-1} \vee p_{i+1} \vee \ldots \vee p_n),$$

где $D_j' = \widehat{D}_j(u_i = -1)$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Легко видеть, что это выражение существенно зависит от всех переменных u_l, $l \neq i$. Поэтому i не поглощает ни одного критерия. Следовательно, если декомпозиция длины 2 существует, то ее базой является $(\{0\}, \{1, \ldots, n\})$. Покажем, что ρ обладает декомпозицией с этой базой тогда и только тогда, когда КНФ $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s$ невыполнима.

Если $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s \equiv 0$, то (12) и (13) будут иметь место, ибо тогда

$$g_\rho = p_0 \vee p_0'(p_1 \vee \ldots \vee p_n) = p_0 \vee p_0'\bar{p}_0(p_1 \vee \ldots \vee p_n),$$

а (13) приобретает вид $p_0 \vee p_0' \geqslant p_0'$. По теореме 2 разделительная декомпозиция существует.

Пусть теперь $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s \not\equiv 0$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор, обращающий $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s$ в 1. Имеем $g_\rho(u_0 = -1) = \widehat{D}_1 \& \ldots \& \widehat{D}_s(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$, что приводит к $g_\rho(-1, 0, \ldots, 0) = 0$, $g_\rho(-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ и означает, что критерий 0 не поглощает остальные. Декомпозиция с базой $(\{0\}, \{1, \ldots, n\})$ невозможна.

Полученные сведения задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ к задачам о разделительной декомпозиции с данной базой и о лучшей разделительной декомпозиции доказывают NP-трудность последних. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Задача выяснения по монотонной булевой функции f в форме* ДНФ *(приведенной) справедливости неравенства $f \geqslant f^*$ является* NP-*трудной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Укажем сведение к этой задаче NP-трудной задачи МОНОТОННАЯ ВЫПОЛНИМОСТЬ [3, комментарий к задаче ЛОГ 2]. Последняя состоит в том, чтобы по КНФ, каждая дизъюнкция которой содержит либо только сами переменные, либо только их отрицания, узнать, выполнима ли она.

Представим КНФ в виде $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s \wedge D_{s+1} \wedge \ldots \wedge D_t$, где первые s дизъюнкций содержат переменные без отрицаний, а последние $t-s$ дизъюнкций — с отрицаниями. Введем монотонные функции f_1 и f_2 в форме ДНФ, положив $f_1 = \overline{D}_1 \vee \ldots \vee \overline{D}_s$, $f_2 = (D_{s+1} \wedge \ldots \wedge D_t)^*$. Тогда исходная КНФ может быть представлена как $\bar{f}_1 f_2^*$. Она невыполнима тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $f_1 \geqslant f_2^*$. Отсюда вытекает NP-трудность проверки этого неравенства для монотонных функций f_1 и f_2 в форме ДНФ.

Рассмотрим функцию $h(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$. Введя новые переменные u и v, определим монотонную функцию

$$g = h(u, vf_1, v \vee f_2) = uv \vee v_1 f \vee uf_2$$

в форме ДНФ. Пользуясь самодвойственностью и симметрией функции h, находим

$$g^* = h(u, v \vee f_1^*, vf_2^*) = h(u, vf_2^*, v \vee f_1^*).$$

Покажем, что $f_1 \geqslant f_2^*$ справедливо тогда и только тогда, когда $g \geqslant g^*$. Если выполнено неравенство $f_1 \geqslant f_2^*$, то $f_2 \geqslant f_1^*$, и, используя монотонность h, из представлений функций g и g^* получаем $g \geqslant g^*$. Обратно, если $g \geqslant g^*$, то $f_1 = g(u = 0, v = 1) \geqslant g^*(u = 0, v = 1) = f_2^*$. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Для правильных отношений в форме* ДНФ *задача о разделительной декомпозиции с данной базой является* NP-*трудной.*

Доказательство. Укажем сведение к этой задаче NP-трудной задачи из леммы 12.

Пусть для монотонной булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ в форме ДНФ требуется проверить соотношение $f \geqslant f^*$. Введем правильное отношение ρ представляющей функцией

$$g_\rho(u_1,\dots,u_{n+1}) = (p_1 \vee \ldots \vee p_n) f(p'_1,\dots,p'_n) \vee p'_1 \ldots p'_n p_{n+1}.$$

Это представление с полиномиальной сложностью может быть преобразовано в ДНФ. Отношение ρ иррефлексивно, поскольку $g_\rho(0,\dots,0)=0$. Легко видеть, что отношение ρ существенно зависит от всех критериев. Покажем, что задача о неравенстве $f \geqslant f^*$ сводится к задаче существования декомпозиции с базой $(\{1,\dots,n\},\{n+1\})$ отношения ρ. В силу замечания 2 последняя задача эквивалентна задаче проверки соотношения

$$(p_1 \vee \ldots \vee p_n) f(p'_1,\dots,p'_n) \vee p'_1 \ldots p'_n \geqslant f^*(p_1,\dots,p_n) \vee p'_1 \ldots p'_n. \qquad (25)$$

Отметим, что если среди значений переменных имеются положительное и отрицательное, то (25) приобретает вид

$$f(p'_1,\dots,p'_n) \geqslant f^*(p_1,\dots,p_n). \qquad (26)$$

Убедимся, что из $f \geqslant f^*$ следует (25). Если все переменные u_i принимают только неотрицательные либо только неположительные значения и имеется хотя бы одно отрицательное, то (25) выполнено независимо от вида f, ибо в первом случае $p'_1 \ldots p'_n = 1$, а во втором обе части (25) обращаются в 0. Поэтому достаточно проверить (26) для набора, включающего компоненты 1 и -1. Пользуясь монотонностью f и соотношениями $p'_i = p'(u_i) \geqslant p(u_i) = p_i$, получаем

$$f(p'_1,\dots,p'_n) \geqslant f(p_1,\dots,p_n) \geqslant f^*(p_1,\dots,p_n).$$

Обратно, убедимся, что из (25) следует $f \geqslant f^*$. Пусть $\tilde\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — произвольный булев набор. Если $\tilde\alpha$ составлен из одинаковых символов (0 или 1), то $f(\tilde\alpha) = f^*(\tilde\alpha)$. Пусть в $\tilde\alpha$ содержатся разные символы. Рассмотрим набор $(u_1,\dots,u_n)$, где $u_i = 2\alpha_i - 1$. Для него $(p'_1,\dots,p'_n) = (p_1,\dots,p_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Поскольку набор $(u_1,\dots,u_n)$ содержит положительные и отрицательные компоненты, вместо (25) можно воспользоваться соотношением (26), из которого следует, что $f(\tilde\alpha) \geqslant f^*(\tilde\alpha)$. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Для правильных порядковых отношений отношение поглощения асимметрично.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют критерии (например, с номерами 1 и 2), поглощающие друг друга. Сгруппировав члены приведенной ДНФ, представим g_ρ в виде

$$g_\rho = p_1p_2f_1 \vee p_1'p_2f_2 \vee p_1p_2'f_3 \vee p_1'p_2'f_4 \vee p_1f_5 \vee p_1'f_6 \vee p_2f_7 \vee p_2'f_8 \vee f_9, \quad (27)$$

где функции f_1–f_9 не зависят от u_1 и u_2. Из условия, что $g_\rho(u_1 = -1)$ не зависит от u_2, получаем соотношение $p_2f_7 \vee p_2'f_8 \leqslant f_9$, из которого следует, что в (27) отсутствуют члены p_2f_7 и $p_2'f_8$. Аналогично при $u_2 = -1$ убеждаемся в отсутствии членов p_1f_5 и $p_1'f_6$. В результате представление (27) приобретает вид

$$g_\rho = p_1p_2f_1 \vee p_1'p_2f_2 \vee p_1p_2'f_3 \vee p_1'p_2'f_4 \vee f_9. \quad (28)$$

Из него и независимости $g_\rho(u_1 = 1)$ от u_2 следует, что $p_2f_1 \vee p_2f_2 \vee p_2'f_3 \vee p_2'f_4 \leqslant f_9$. Отсюда и из (28) получаем равенство $g_\rho = f_9$. Оно противоречит существенной зависимости отношения ρ от всех критериев. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Для правильных отношений в форме* ДНФ *задача о лучшей разделительной декомпозиции является* NP*-трудной.*

Доказательство. Укажем сведение для правильных отношений задачи о разделительной декомпозиции с данной базой к задаче о лучшей разделительной декомпозиции. Пусть известна лучшая разделительная декомпозиция (по замечанию 4 она единственна) и ее базой является $(J_1, \dots, J_l)$. Покажем, что разделительная декомпозиция с данной базой (I_1, I_2) существует тогда и только тогда, когда

$$I_1 = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} J_i, \quad (29)$$

где $s = \max\{t \mid I_1 \cap J_t \neq \varnothing\}$.

Пусть разделительная декомпозиция с базой (I_1, I_2) существует. По определению лучшей декомпозиции разбиение $\{J_1, \dots, J_l\}$ мельче $\{I_1, I_2\}$, и, следовательно, I_1 является объединением некоторых J_i. Предположим, что (29) нарушено и в этом объединении не участвует множество J_t, $t < s$. Рассмотрим некоторые $a \in J_t$ и $b \in J_s$. Из $a \in I_1$, $b \notin I_1$ и существования декомпозиции с базой (I_1, I_2) вытекает, что a поглощает b. С другой стороны, по лемме 1 существует разделительная декомпозиция с базой (J', J''), $J' = J_1 \cup \ldots \cup J_t$, и из $a \notin J'$, $b \in J'$ следует, что b поглощает a. Это противоречит лемме 14. Потому (29) выполнено. Обратно, из (29) в силу леммы 1 вытекает существование декомпозиции с базой (I_1, I_2). Лемма 15 доказана.

Замечание 5. Из лемм 13 и 15 очевидно следует NP-трудность рассматриваемых задач для произвольных порядковых отношений в форме ДНФ.

Скажем, что *множество критериев* I_1 *поглощают* I_2, если каждый критерий из I_1 поглощает I_2.

Лемма 16. *Если ρ — правильное отношение, то множество I_1 поглощает $I_2 = I \setminus I_1$ тогда и только тогда, когда функция g_ρ представима в виде*

$$g_\rho = g_\rho(I_2 \to 0) \vee K_0^+(I_1) g_\rho(I_1 \to 0), \tag{30}$$

где $K_0^+(I_1) = \bigwedge\limits_{i \in I_1} p_i'$.

Доказательство. Пусть множество I_1 поглощает I_2. Сгруппировав члены приведенной ДНФ функции g_ρ, представим g_ρ в виде

$$g_\rho = h(I_1) \vee \bigvee_{A,B} q_{A,B}(A \cup B \cup I_2), \tag{31}$$

где дизъюнкция берется по таким парам множеств (A, B), что $A \cup B \subseteq I_1$, $A \cap B = \varnothing$, а функции $q_{A,B}$ имеют вид

$$q_{A,B} = \bigwedge_{a \in A} p_a \bigwedge_{b \in B} p_b' f_{A,B}(I_2), \qquad f_{A,B}(I_2) \neq \mathrm{const}\,. \tag{32}$$

Покажем, что все множества A в (31) пусты. Предположим, что это не так и найдется пара (A_0, B_0), в которой $A_0 \neq \varnothing$. Подстановка $A_0 \to 1$ в (31) с учетом (32) дает

$$g_\rho(A_0 \to 1) = h(A_0 \to 1) \vee \bigvee_{(A,B) \neq (A_0,B_0)} q_{A,B}(A_0 \to 1) \vee \bigwedge_{b \in B_0} p_b' f_{A_0,B_0}(I_2).$$

Поскольку A_0 поглощает I_2 (ибо $A_0 \subseteq I_1$), выполнено неравенство

$$\bigwedge_{b \in B_0} p_b' f_{A_0,B_0}(I_2) \leqslant h(A_0 \to 1) \vee \bigvee_{(A,B) \neq (A_0,B_0)} q_{A,B}(A_0 \to 1).$$

Домножив обе части на $\bigwedge\limits_{a \in A_0} p_a$ и учитывая соотношения

$$q_{A_0,B_0} = \bigwedge_{a \in A_0} p_a \bigwedge_{b \in B_0} p_b' f_{A_0,B_0},$$

$$q_{A,B} \geqslant \bigwedge_{a \in A_0} p_a q_{A,B}(A_0 \to 1),$$

$$h \geqslant \bigwedge_{a \in A_0} p_a h(A_0 \to 1) \leqslant h,$$

получаем

$$q_{A_0,B_0} \leqslant h \vee \bigvee_{(A,B)\neq(A_0,B_0)} q_{A,B}.$$

Это означает, что член q_{A_0,B_0} в (31) поглощается остальными, что невозможно.

В результате доказано, что (31) имеет вид

$$g_\rho = h(I_1) \vee \bigvee_B \bigwedge_{b\in B} p'_b f_B(I_2), \quad f_B(I_2) \neq \mathrm{const}\,. \tag{33}$$

Дизъюнкция берется по некоторым $B \subseteq I_1$. Покажем, что в (33) имеется единственное множество B, причем $B = I_1$. Пусть это не так и в (33) входит некоторое $B \neq I_1$. Подстановка $I_1 \setminus B_0 \to -1$ дает

$$g_\rho(I_1 \setminus B_0 \to -1) = h(I_1 \setminus B_0 \to -1) \vee \bigvee_{B:\, B\cap(I_1\setminus B_0)=\varnothing} \; \bigwedge_{b\in B} p'_b f_B(I_2).$$

Поскольку множество $I_1 \setminus B_0$ поглощает I_2, функции $q_B = \bigwedge_{b\in B} p'_b f_B(I_2)$ в этом представлении удовлетворяют неравенству $q_B \leqslant h(I_1 \setminus B_0 \to -1)$. В частности, $q_{B_0} \leqslant h(I_1 \setminus B_0 \to -1)$. Из монотонности h следует, что $q_{B_0} \leqslant h$. Это противоречит тому, что B_0 присутствует в (33). Из (33) в силу доказанного следует, что $g_\rho = h(I_1) \vee K_0^+(I_1) f_{I_1}(I_2)$. Подстановками $I_2 \to 0$ и $I_1 \to 0$ отсюда получаем $h(I_1) = g_\rho(I_2 \to 0)$, $f_{I_1}(I_2) = g_\rho(I_1 \to 0)$, что приводит к (30).

Обратное утверждение о том, что I_1 поглощает I_2, очевидно следует из (30). Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Для правильных отношений в форме* КНФ *задача о разделительной декомпозиции с данной базой полиномиально разрешима.*

Доказательство. С учетом замечания 2 условия (12) и (13) существования декомпозиции с базой (I_1, I_2) для правильных отношений приобретают вид (30) и

$$g_\rho(I_2 \to 0) \vee K_0^+(I_1) \geqslant (g_\rho(I_2 \to 0))^*. \tag{34}$$

Достаточно убедиться, что для функции g_ρ, заданной в приведенной форме КНФ, соотношения (30) и (34) полиномиально проверяемы.

Согласно лемме 16 условие (30) эквивалентно тому, что каждый критерий i из I_1 поглощает I_2. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда обе КНФ, полученные подстановками $u_i = 1$ и $u_i = -1$ в КНФ g_ρ и приведением, не содержат переменных с индексами из I_2. Этот способ проверки условия (30) полиномиален.

Левая часть (34) может быть преобразована в КНФ с полиномиальной сложностью, а правая имеет вид ДНФ. В силу соотношений

$$(D_1 \wedge \ldots \wedge D_s \geqslant K_1 \vee \ldots \vee K_t) \Leftrightarrow (D_i \geqslant K_j,\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t)$$

неравенство (34) допускает полиномиальную проверку. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Для правильных отношений в форме* КНФ *задача о лучшей разделительной декомпозиции полиномиально разрешима.*

Доказательство. По замечанию 4 правильное порядковое отношение ρ имеет единственную лучшую разделительную декомпозицию $(\rho_1, \ldots, \rho_l)$. Предположим, что она нетривиальна, и обозначим через B_0 ее базу $(J_1, \ldots, J_l)$. Согласно лемме 7 и следствию 5 пересечение всех допустимых множеств для ρ непусто и допустимо. Оно является наименьшим допустимым множеством и, как нетрудно заключить из определения лучшей декомпозиции, совпадает с J_1.

Обозначим через $m(i)$, $i \in I$, номер m множества J_m базы B_0, который содержит i. С базой B_0 свяжем бинарное отношение s на I, положив $isj \Leftrightarrow m(i) < m(j)$. Это отношение является слабым порядком, т. е. асимметричным и негатранзитивным $(i\bar{s}j \wedge j\bar{s}k \Rightarrow i\bar{s}k)$ отношением. Множество J_1 образовано его максимальными элементами, т. е. такими i, что $j\bar{s}i$ при всех $j \in I$.

Поскольку объединение негатранзитивных отношений негатранзитивно, для любого бинарного отношения r на конечном множестве существует наибольшее по включению вложенное в него негатранзитивное отношение r_0. Если r асимметрично, то r_0 — слабый порядок. Обозначим через p отношение, которое поглощает ρ (по лемме 14 оно асимметрично), через p_0 наибольший слабый порядок, вложенный в p, а через J_0 множество максимальных элементов в p_0. Из $s \subseteq p_0$ следует, что $J_0 \subseteq J_1$.

Опишем полиномиальный алгоритм нахождения J_0. Отношение ipj выполнено тогда и только тогда, когда КНФ $g_\rho(u_i = 1)$ и $g_\rho(u_i = -1)$, полученные из КНФ g_ρ подстановками и приведением, не содержат переменной u_j. Поэтому p может быть построено с полиномиальной сложностью. Чтобы найти отношение p_0, достаточно взять дополнение $\bar{p} = I \setminus p$ отношения p, построить его транзитивное замыкание $\hat{p}$ и взять дополнение к $\hat{p}$. Множество J_0 является множеством максимальных элементов отношения p_0.

Поскольку J_0 поглощает $I \setminus J_0$, по лемме 16 множество J_0 удовлетворяет соотношению (30). Условие (34) для J_0 может быть полиномиально проверено методом из доказательства леммы 17. Если оно нарушено, то по лемме 6 условие (34) нарушено и для J_1. Это означает, что лучшая разделительная декомпозиция для ρ тривиальна. Если (34) для J_0 имеет место, то J_0 допустимо и совпадает с J_1 в силу минимальности J_1 и включения $J_0 \subseteq J_1$. Зная J_1, приведенную КНФ отношения ρ_1 лучшей разделительной декомпозиции $(\rho_1, \dots, \rho_l)$ найдем путем подстановки $I \backslash J_1 \to 0$ в КНФ g_ρ и приведения.

Далее подстановкой $J_1 \to 0$ в КНФ g_ρ и приведением найдем порождающую функцию отношения $\rho' = \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_l$. Используя отношение ρ' вместо ρ, с помощью тех же построений найдем отношение ρ_2. Эта процедура может быть продолжена вплоть до нахождения ρ_l. Лемма 18 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т.** Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.
2. **Березовский Б. А., Барышников Ю. М., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.** Многокритериальная оптимизация: математические аспекты. М.: Наука, 1989.
3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
4. **Иванин В. М.** Асимптотическая оценка математического ожидания числа элементов множества Парето // Кибернетика. 1975. № 1. С. 97–101.
5. **Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б.** Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
6. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.
7. **Саати Т.** Принятие решений: метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.
8. **Шоломов Л. А.** Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука, 1989.
9. **Шоломов Л. А.** Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Физматлит, 1994. С. 109–143.
10. **Шоломов Л. А.** О сложности задач минимизации и сжатия моделей последовательного выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 3. С. 87–109.
11. **Шоломов Л. А.** Анализ рациональности модели последовательного выбора // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 124–132.

12. **Юдин Д. Б.** Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989.

13. **Kung H. T., Luccio F., Preparata F. P.** On finding the maxima of a set of vectors // J. Assoc. Comput. Math. 1975. V. 22, N 4. P. 469–476.

Адрес автора:

Институт системного анализа
РАН,
пр. 60-летия Октября, 9,
117312 Москва, Россия.
E-mail: sholomov@cs.isa.ac.ru

Статья поступила
21 ноября 2000 г.