ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2001. Серия 1. Том 8, № 3, 3–14

УДК 519.74

РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ И ВЕРШИН НЕОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг, Б. Тофт

Понятия p-раскраски инциденторов и тотальной p-раскраски, которые изучались ранее для ориентированных мультиграфов, распространяются на неориентированные мультиграфы. Изучается задача отыскания минимального числа цветов. Для раскраски инциденторов она решается точно; для тотальной раскраски в общем случае — приближенно с абсолютной погрешностью, не превышающей единицы, а в ряде частных случаев — точно.

1. Введение. Основные понятия

Не определяемые в статье понятия можно найти в [4–6].

Под мультиграфом $G = (V, E)$, если нет специальных оговорок, понимается конечный неориентированный мультиграф без петель с непустым множеством вершин $V = V(G)$ и непустым множеством ребер $E = E(G)$. Мультиграф называется графом, если он не имеет кратных ребер. Будем обозначать через $d(v) = d_G(v)$ степень вершины $v \in V(G)$, а через $\Delta(G)$ максимальную степень вершины мультиграфа G.

Введем понятие инцидентора. Если ребро e инцидентно вершине v, то пару (v, e) назовем *инцидентором* ребра e, примыкающим к вершине v. Таким образом, каждое ребро $e \in E(G)$ имеет два инцидентора $i_1(e)$ и $i_2(e)$. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначается через $I = I(G)$. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной и той же вершине.

Будем считать,что цветами являются натуральные числа; множество этих чисел обозначим через C. Пусть $a, b \in C$ и $a \leqslant b$. *Интервалом* $[a, b]$ называется подмножество всех цветов $c \in C$, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$.

Раскраска инциденторов мультиграфа G — это отображение какого-либо подмножества $I(G)$ в C. Под раскраской с помощью m цветов

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект INTAS–OPEN–97–1001).

понимается раскраска цветами из интервала $[1, m]$. Если раскрашиваются все инциденторы множества $I(G)$, то раскраска называется *полной*; в противном случае раскраска называется *частичной.* Раскраска инциденторов называется *правильной,* если смежные инциденторы окрашиваются в различные цвета.

Пусть p — целое неотрицательное число. Будем говорить, что при раскраске φ инциденторы ребра e являются *p-раскрашенными,* если $|\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e))| \geqslant p$. Правильная раскраска инциденторов, при которой инциденторы ребер p-раскрашены, называется *p-раскраской.*

Наименьшее число цветов, необходимое для полной p-раскраски инциденторов мультиграфа G, обозначается через $\chi I(p, G)$. Число $\chi I(p, G)$ называется *инциденторным p-хроматическим числом* мультиграфа G. Очевидно, что $\Delta(G) \leqslant \chi I(p, G)$.

Раскраску инциденторов и вершин мультиграфа будем называть *тотальной* раскраской. Очевидный смысл вкладывается в понятия *полной* и *частичной тотальной* раскрасок. Раскраска вершин называется *правильной,* если смежные вершины окрашены в различные цвета. Тотальная раскраска называется *правильной,* если правильно раскрашены вершины и инциденторы и цвет каждой окрашенной вершины отличен от цветов примыкающих к ней инциденторов. Правильная тотальная раскраска, при которой инциденторы p-раскрашены, называется *тотальной p-раскраской.* Наименьшее число цветов, необходимое для полной тотальной p-раскраски мультиграфа G, называется *тотальным p-хроматическим числом* мультиграфа G и обозначается через $\tau(p, G)$.

Ясно, что $\chi I(p, G) \leqslant \tau(p, G)$ и что раскраску инциденторов можно рассматривать как частичную тотальную раскраску, при которой ни одна из вершин не окрашена.

Пусть имеется тотальная раскраска мультиграфа с помощью цветов из множества $C_1 \subseteq C$. Будем называть *присутствующими* в вершине v те цвета из C_1, которыми окрашены либо сама вершина, либо примыкающие к ней инциденторы; остальные цвета из C_1 называются *отсутствующими* в вершине v.

Мультиграф $F = (V, E')$ называется *фактором* мультиграфа $G = (V, E)$, если $E' \subseteq E$ и $\Delta(F) \leqslant 2$ (требование $\Delta(F) \leqslant 2$ является отклонением от общепринятой терминологии). Теорема Петерсена [10] утверждает, что однородный мультиграф степени $2k$ представим в виде объединения k однородных факторов. Из этой теоремы легко следует, что (не обязательно однородный) мультиграф G с $\Delta(G) = 2k$ или $\Delta(G) = 2k - 1$ представим в виде объединения k факторов без общих ребер.

Введем понятие факторной ориентации. Пусть имеется неориентированный мультиграф G, представленный в виде объединения факторов

без общих ребер. Превратим G в ориентированный мультиграф, придав звеньям такую ориентацию, при которой каждая компонента связности каждого фактора превратится в путь (если она была простой цепью) или в контур (если она была циклом). Такую ориентацию мультиграфа G назовем *факторной.* В ориентированном мультиграфе инцидентор дуги, примыкающий к вершине, из которой эта дуга исходит, называется *начальным,* другой инцидентор называется *конечным.* Таким образом, в результате факторной ориентации множество инциденторов неориентированного мультиграфа разбивается на подмножество начальных и подмножество конечных инциденторов.

В дальнейшем важную роль будет играть функция $\eta(x, y)$, определяемая при целых $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$ следующим образом:

$$\eta(x, y) = \max\{y, \lceil y/2 \rceil + x\}.$$

Будет показано (теорема 1), что $\chi I(p, G) = \eta(p, \Delta(G))$. Таким образом, для любого мультиграфа точно вычисляется инциденторное p-хроматическое число при любом p.

Для тотального p-хроматического числа дела обстоят сложнее. Основной наш результат состоит в том, что $\chi I(p, G) \leqslant \tau(p, G) \leqslant \chi I(p, G) + 1$ (теорема 3). В ряде случаев (теоремы 2, 4–6) удалось точно вычислить тотальное p-хроматическое число, но в общем случае вопрос открыт.

В ряде работ, например [2, 3, 7, 9, 11], исследуются задачи, связанные с раскраской инциденторов ориентированных мультиграфов. В ориентированном мультиграфе инциденторы дуги e называются p-раскрашенными при раскраске φ, если $\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e)) \geqslant p$, где $i_1(e)$ — начальный, а $i_2(e)$ — конечный инциденторы дуги e. Понятия инциденторного и тотального p-хроматических чисел для ориентированных мультиграфов определяются аналогично. Очевидно, инциденторное (тотальное) p-хроматическое число неориентированного мультиграфа G равно наименьшему из инциденторных (тотальных) p-хроматических чисел всех тех ориентированных мультиграфов, которые можно получить из G ориентацией ребер. Это обстоятельство, по-видимому, обусловливает возможность относительно простого решения ряда задач для неориентированных графов, которые не решены до сих пор для ориентированных мультиграфов. В конце статьи мы приведем примеры таких задач.

2. Раскраска инциденторов

Точно вычислять $\chi I(p, G)$ позволяет следующая

Теорема 1. *Для любого мультиграфа $G = (V, E)$ справедливо равенство*

$$\chi I(p, G) = \eta(p, \Delta(G)). \tag{1}$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\chi I(p,G) \geqslant \eta(p,\Delta(G)). \tag{2}$$

Неравенство $\chi I(p,G) \geqslant \Delta(G)$ очевидно. Так как $\eta(p,\Delta(G)) = \max\{\Delta(G), \lceil\Delta(G)/2\rceil + p\}$, то осталось показать, что $\chi I(p,G) \geqslant \lceil\Delta(G)/2\rceil + p$. Рассмотрим полную p-раскраску инциденторов мультиграфа G с помощью $\chi I(p,G)$ цветов. Пусть v — вершина максимальной степени, $d(v) = \Delta(G) = \Delta$. Обозначим через I_1 (через I_2) подмножество инциденторов, примыкающих к v, цвета которых не больше p (не меньше $p+1$). Так как $|I_1| + |I_2| = \Delta$, то по крайней мере одно из двух неравенств $|I_1| \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$ и $|I_2| \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$ справедливо. Если $|I_1| \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$, то в I_1 есть инцидентор, цвет которого не меньше $\lceil\Delta/2\rceil$. Пусть этот инцидентор является инцидентором дуги e_1; так как его цвет не больше p, то другой инцидентор дуги e_1 окрашен в цвет, не меньший $\lceil\Delta/2\rceil + p$. Если же $|I_2| \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$, то поскольку цвета всех инциденторов множества I_2 не меньше $p+1$, в I_2 есть инцидентор, цвет которого не меньше $\lceil\Delta/2\rceil + p$. Следовательно, $\chi I(p,G) \geqslant \lceil\Delta(G)/2\rceil + p$, и неравенство (2) доказано.

Осталось доказать обратное неравенство

$$\chi I(p,G) \leqslant \eta(p,\Delta(G)). \tag{3}$$

Сначала предположим, что $p \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$. Представим мультиграф G в виде объединения $k = \lceil\Delta/2\rceil$ факторов $F_j = (V, E_j)$ без общих ребер, $j = 1,\dots,k$. Произведем факторную ориентацию мультиграфа G; половина инциденторов мультиграфа станут начальными, другая половина — конечными. Построим полную p-раскраску инциденторов мультиграфа G следующим образом. Пусть e — произвольное ребро, $e \in F_j (1 \leqslant j \leqslant k)$. Начальный инцидентор ребра e окрашиваем в цвет j, а конечный — в цвет $j+p$. Инциденторы каждого ребра будут p-раскрашенными, а условие $p \geqslant k$ гарантирует правильность раскраски инциденторов. Таким образом, с помощью $k+p = \eta(p,\Delta)$ цветов построена полная p-раскраска инциденторов мультиграфа G. Отсюда следует справедливость неравенства (3) при $p \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$.

Пусть теперь $p < \lceil\Delta/2\rceil$. Тогда $\eta(p,\Delta) = \Delta$ и $\chi I(p,G) \leqslant \chi I(\lceil\Delta/2\rceil, G) \leqslant \eta(\lceil\Delta/2\rceil, \Delta)$. Если Δ — четное число, то $\eta(\lceil\Delta/2\rceil,\Delta) = \Delta = \eta(p,\Delta)$ и неравенство (3) доказано при $p < \lceil\Delta/2\rceil$. Предположим теперь, что Δ — нечетное число, т. е. $\Delta = 2k-1$. Тогда $\chi I(p,G) \leqslant \chi I(k-1,G) \leqslant \chi I(k,G) \leqslant \eta(k,\Delta) = 2k = \Delta + 1$. Построим полную k-раскраску инциденторов мультиграфа G с помощью $2k$ цветов. В каждой вершине будет отсутствовать по меньшей мере один цвет. Отметив один отсутствующий цвет в каждой вершине, уменьшим на 1 цвета всех примыкающих к этой вершине инциденторов с бо́льшим цветом. Получим

полную $(k-1)$-раскраску инциденторов с использованием $2k-1=\Delta$ цветов. Следовательно, $\chi I(p,G) \leqslant \chi I(k-1,G) \leqslant \Delta = \eta(p,\Delta)$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 1 легко доказывается с помощью формулы Пяткина для инциденторного p-хроматического числа ориентированного мультиграфа [3, 7]. Однако наше доказательство проще с алгоритмической точки зрения.

3. Тотальная раскраска

В этом параграфе устанавливается, что инциденторное и тотальное p-хроматическое числа мультиграфа либо совпадают, либо отличаются на единицу. Для некоторых классов мультиграфов указываются точные значения тотального p-хроматического числа.

Лемма 1. *Пусть $G=(V,E)$ — мультиграф с $\Delta(G)=2k$, где $k \geqslant 1$. Тогда при любом p, $0 \leqslant p \leqslant k$, справедливо равенство $\tau(p,G)=2k+1$.*

Доказательство. Так как при любом p, $0 \leqslant p \leqslant k$, справедливы неравенства $\Delta(G)+1 \leqslant \tau(p,G) \leqslant \tau(k,G)$, то нужно доказать, что $\tau(k,G) \leqslant 2k+1$. Для этого построим полную тотальную k-раскраску φ мультиграфа G с помощью $2k+1$ цветов. Сначала с помощью этих цветов правильно раскрасим все вершины мультиграфа. Эта раскраска будет значением φ на множестве V. Затем приступим к k-раскраске инциденторов. Представим G в виде объединения k факторов $F_j=(V,E_j)$ без общих ребер, $j=1,\dots,k$. Посредством факторной ориентации разобьем инциденторы мультиграфа G на начальные и конечные. Построим k-раскраску всех инциденторов ребер множества $\bigcup\limits_{j=2}^{k} F_j$, руководствуясь следующим правилом. Пусть i — инцидентор произвольного ребра $e \in E_r$, где $2 \leqslant r \leqslant k$. Если i — начальный инцидентор ребра e, то полагаем

$$\varphi(i)=\begin{cases} r, & \text{если } \varphi(v) \neq r; \\ 1, & \text{если } \varphi(v)=r. \end{cases}$$

Если же i — конечный инцидентор ребра e, то полагаем

$$\varphi(i)=\begin{cases} r+k, & \text{если } \varphi(v) \neq r+k; \\ 2k+1, & \text{если } \varphi(v)=r+k. \end{cases}$$

После раскраски всех инциденторов ребер из множества $\bigcup\limits_{j=2}^{k} F_j$ в каждой вершине мультиграфа G будут отсутствовать по меньшей мере два цвета из множества $M=\{1,k+1,2k+1\}$. Приступим к k-раскраске

инциденторов фактора F_1 в цвета из множества M. Каждому инциденту фактора F_1 предпишем цвета из M, отсутствующие в вершине, к которой этот инцидентор примыкает; эти цвета будем называть *допустимыми* для инцидентора. Тогда правильная раскраска инциденторов фактора F_1 в допустимые цвета, при которой оба инцидентора каждого ребра окрашиваются различно, будет k-раскраской. Покажем, что такая раскраска всех инциденторов фактора F_1 существует. Для этого достаточно доказать существование полной k-раскраски инциденторов произвольной компоненты связности L фактора F_1. Ограничимся рассмотрением наиболее сложного случая, когда L является циклом и каждому инцидентору предписаны ровно два цвета из M. Придадим ребрам L такую ориентацию, при которой компонента L становится ориентированным циклом (контуром). Если всем инциденторам предписано одно и то же 2-элементное подмножество из M, то начальные инциденторы окрасим в один цвет из этого подмножества, а конечные — в другой, получив таким образом требуемую k-раскраску. В противном случае найдутся два инцидентора одной и той же дуги, начальный i_1 и конечный i_2, предписания которых различны. Окрасив i_2 в допустимый цвет, который не является допустимым для i_1, мы сможем, двигаясь по контуру, последовательно правильно окрасить в допустимые цвета остальные инциденторы компоненты L, включая i_1.

После раскраски всех инциденторов фактора F_1 получим полную тотальную k-раскраску мультиграфа G цветами из интервала $[1, 2k+1]$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — полный граф с $n = 2k$ вершинами ($k \geqslant 1$). Тогда при любом p, $0 \leqslant p \leqslant k$, выполняется равенство $\tau(p, G) = \Delta(G) + 1 = 2k$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\tau(k, G) \leqslant 2k$.

Добавив одну вершину y, смежную со всеми вершинами множества V, получим полный $(n+1)$-вершинный граф H такой, что $\Delta(H) = 2k$, $\chi I(k, H) = 2k$. Построим полную k-раскраску φ инциденторов графа H с использованием $2k$ цветов. Обозначим через $I_1(H)$ (через $I_2(H)$) подмножество инциденторов графа H, цвета которых не больше k (не меньше $k+1$). Так как $\Delta(H) = 2k$, то к каждой вершине графа H примыкает ровно k инциденторов из $I_1(H)$ и ровно k инциденторов из $I_2(H)$. Значит, каждым цветом окрашено одно и то же число инциденторов и для каждого ребра e графа H выполняется равенство $|\varphi(i_2(e) - \varphi(i_1(e)| = k$. Рассмотрим ребра, инцидентные вершине y. Инциденторы этих ребер, не примыкающие к вершине y, окрашены в различные цвета. Поэтому если удалить из H вершину y вместе с инцидентными ребрами, то получится граф G с k-раскрашенными инциденторами,

в различных вершинах которого отсутствуют различные цвета. Окрасив каждую вершину в тот цвет, который в ней отсутствует, получим полную тотальную k-раскраску графа G с помощью $2k$ цветов. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $G = (V, E)$ — *мультиграф с* $\Delta(G) = 2k - 1$, *где* $k \geqslant 1$. *Тогда при любом* p, $0 \leqslant p \leqslant k - 1$, *справедливо равенство* $\tau(p, G) = 2k$.

Доказательство. При $k = 1$ утверждение следует из леммы 2. Будем предполагать, что $k \geqslant 2$. Так как $\tau(p, G) \geqslant \Delta(G) + 1 = 2k$, то достаточно построить полную тотальную $(k-1)$-раскраску φ мультиграфа G с помощью $2k$ цветов. Построим правильную раскраску φ всех вершин мультиграфа G цветами из интервала $C_1 = [1, 2k]$. Раскрасив вершины, представим G в виде объединения факторов $F_1, F_2, \ldots, F_k$ без общих ребер. С помощью факторной ориентации разобьем инциденторы мультиграфа G на начальные и конечные. Построим раскраску ψ инциденторов мультиграфа G так. Пусть e — произвольное ребро, $e \in F_j$, где $1 \leqslant j \leqslant k$; окрасим начальный инцидентор ребра e в цвет j, а конечный — в цвет $j + k$. Подобным образом окрасив инциденторы всех ребер, получим полную k-раскраску ψ инциденторов мультиграфа G с использованием цветов из C_1. Теперь, не добавляя новых цветов, перекраской инциденторов добьемся того, чтобы получилась полная тотальная $(k-1)$-раскраска φ мультиграфа G.

Пусть v — произвольная вершина мультиграфа G и $\varphi(v) = r$ $(1 \leqslant r \leqslant 2k)$. Если в цвет r не окрашен ни один инцидентор, примыкающий к v, то для всех инциденторов, примыкающих к v, полагаем $\varphi = \psi$. Предположим, что к вершине v примыкает инцидентор i цвета r. Тогда в вершине v отсутствует некоторый цвет c из C_1. Перекрасим инциденторы, примыкающие к вершине v. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $c < r$. Уменьшим на 1 цвета инциденторов, которые при раскраске ψ были больше c, но не больше r.

Случай 2. $r < c$. Тогда $r < 2k$. Уменьшим на 1 цвета инциденторов, которые при раскраске ψ были больше c, начальный инцидентор фактора F_1 перекрасим в цвет $2k$ и уменьшим на 1 цвета инциденторов, которые при раскраске ψ были больше 1, но не больше r.

Проделав указанным способом перекраску инциденторов, примыкающих к каждой вершине мультиграфа G, получим полную тотальную раскраску φ мультиграфа G с использованием $2k$ цветов. То, что φ является правильной тотальной раскраской, очевидно. Осталось показать, что при раскраске φ инциденторы любого ребра $(k-1)$-раскрашены. Действительно, пусть e — произвольное ребро, $i_1(e)$ — его начальный

инцидентор, а $i_2(e)$ — конечный. Тогда $\psi(i_2(e)) - \psi(i_1(e)) \geqslant k$. Если $e \in F_s$, где $2 \leqslant s \leqslant k$, то для любого инцидентора i ребра e справедливы неравенства $\psi(i) - 1 \leqslant \varphi(i) \leqslant \psi(i)$. Поэтому $\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e)) \geqslant k - 1$. Если же $e \in F_1$, то $k \leqslant \varphi(i_2(e)) \leqslant k + 1$, а $\varphi(i_1(e))$ равно либо 1, либо $2k$. В обоих случаях $|\varphi(i_2(e)) - \varphi(i_1(e))| \geqslant k - 1$. Лемма 3 доказана.

Так как $\chi I(p, G) = \Delta(G)$ при $p \leqslant \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$, то из лемм 1 и 3 следует

Теорема 2. *Пусть G — мультиграф. Если $p \leqslant \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$, то $\tau(p, G) = \chi I(p, G) + 1 = \Delta(G) + 1$.*

Теперь обратимся к исследованию тотального p-хроматического числа при «больших» p. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Для любого мультиграфа $G = (V, E)$ справедливо неравенство*

$$\tau(p + 1, G) \leqslant \tau(p, G) + 1. \tag{4}$$

Доказательство. При $p = 0$ неравенство (4) справедливо, так как в силу теоремы 2 и леммы 2 выполняются равенства $\tau(0, G) = \tau(1, G) = \Delta(G) + 1$. Пусть теперь $p \geqslant 1$. Построим полную тотальную p-раскраску мультиграфа G с использованием $\tau(p, G)$ цветов. Среди двух инциденторов каждого ребра назовем старшим тот, который имеет больший цвет. Для каждой вершины расположим в порядке возрастания цветов множество примыкающих к ней старших инциденторов. Затем последний инцидентор перекрасим в цвет $\tau(p, G) + 1$, а каждый из остальных — в цвет следующего за ним. После перекраски получим полную тотальную $(p+1)$-раскраску мультиграфа G с использованием $\tau(p, G) + 1$ цветов. Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *Для любого мультиграфа G справедливы неравенства*

$$\chi I(p, G) \leqslant \tau(p, G) \leqslant \chi I(p, G) + 1. \tag{5}$$

Доказательство. Нужно только доказать справедливость правого неравенства в (5). При $p \leqslant \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ утверждение следует из теоремы 2. Пусть теперь $p \geqslant \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor + 1$. Тогда $\eta(p, \Delta(G)) = \lceil \Delta(G)/2 \rceil + p$ и в силу леммы 4, теорем 2 и 1 имеем

$$\begin{aligned} \tau(p, G) &\leqslant \tau(\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor, G) + p - \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor = \Delta(G) + 1 + p - \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor \\ &= \lceil \Delta(G)/2 \rceil + p + 1 = \eta(p, \Delta(G)) + 1 = \chi I(p, G) + 1. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Авторы не располагают алгоритмом полиномиальной сложности, позволяющим для любого мультиграфа точно вычислять тотальное p-хроматическое число при любом p. Приведем некоторые частные результаты в этом направлении.

Лемма 5. *Если при некотором p выполняется равенство $\tau(p, G) = \chi I(p, G)$, то при любом $p' \geqslant p$ справедливо равенство $\tau(p', G) = \chi I(p', G)$.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $p \geqslant \lfloor\Delta(G)/2\rfloor + 1$. Поэтому

$$\chi I(p', G) \leqslant \tau(p', G) \leqslant \tau(p, G) + p' - p = \chi I(p, G) + p' - p = \eta(p, \Delta(G)) + p' - p$$
$$= \lceil\Delta(G)/2\rceil + p + p' - p = \lceil\Delta(G)/2\rceil + p' = \eta(p', \Delta(G)) = \chi I(p', G).$$

Следовательно, $\tau(p', G) = \chi I(p', G)$. Лемма 5 доказана.

Теорема 4. *Пусть G — полный граф с четным числом n вершин. Тогда $\tau(p, G) = \max\{n, n/2 + p\}$.*

Доказательство. При $p \leqslant n/2$ по лемме 2 имеем $\tau(p, G) = n = \max\{n, n/2 + p\}$. Но $n = \chi I(n/2, G) = \tau(n/2, G)$. По лемме 5 равенство $\tau(p, G) = \chi I(p, G)$ справедливо при любом $p \geqslant n/2$. По теореме 1 $\chi I(p, G) = \max\{n - 1, n/2 + p\}$. В свою очередь, $\max\{n - 1, n/2 + p\} = \max\{n, n/2 + p\}$ при $p \geqslant n/2$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф. Если $p \geqslant 3\lfloor\Delta(G)/2\rfloor + 1$, то $\tau(p, G) = \chi I(p, G)$.*

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать только при $p = 3\lfloor\Delta(G)/2\rfloor + 1$. При таком p имеем

$$\chi I(p, G) = \lceil\Delta(G)/2\rceil + p = \Delta(G) + 2\lfloor\Delta(G)/2\rfloor + 1. \tag{6}$$

Построим полную p-раскраску инциденторов мультиграфа G с использованием $\chi I(p, G)$ цветов. Для каждой вершины $v \in V$ обозначим через $A(v)$ множество отсутствующих в ней цветов; каждый цвет из $A(v)$ назовем *допустимым* для вершины v. Покажем, что все вершины мультиграфа G можно правильно раскрасить в допустимые цвета; это завершит доказательство теоремы 5.

Так как $d(v) \leqslant \Delta(G)$, то из (6) следует, что $|A(v)| \geqslant 2\lfloor\Delta(G)/2\rfloor + 1$ для любого $v \in V$. При четном $\Delta(G)$ это означает, что $|A(v)| \geqslant \Delta(G) + 1$ для любого $v \in V$. Отсюда следует существование требуемой правильной раскраски вершин. Предположим, что $\Delta(G)$ — нечетное число. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что G — связный мультиграф. Если G является полным $(\Delta(G) + 1)$-вершинным графом, то равенство $\tau(p, G) = \chi I(p, G)$ справедливо по теореме 4. Пусть теперь G отличен от полного $(\Delta(G) + 1)$-вершинного графа. Так как $|A(v)| \geqslant 2\lfloor\Delta(G)/2\rfloor + 1 = \Delta(G) \geqslant 3$ для любой вершины $v \in V$, то существование правильной раскраски всех вершин в допустимые цвета следует из аналога теоремы Брукса, справедливой при раскраске вершин в предписанные цвета [1, 8]. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть G — полный граф с нечетным числом $n \geqslant 3$ вершин. Тогда*

$$\tau(p,G) = \begin{cases} n, & \text{если } p \leqslant (n-1)/2; \\ (n+1)/2 + p, & \text{если } (n+1)/2 \leqslant p \leqslant 3(n-1)/2; \\ (n-1)/2 + p, & \text{если } p \geqslant 3(n-1)/2 + 1. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что (7) эквивалентно выражению

$$\tau(p,G) = \begin{cases} \chi I(p,G) + 1, & \text{если } p \leqslant 3(n-1)/2; \\ \chi I(p,G), & \text{если } p \geqslant 3(n-1)/2 + 1. \end{cases}$$

В силу теорем 3, 5 и леммы 5 достаточно доказать, что $\tau(p,G) = \chi I(p,G) + 1$ при $p = 3(n-1)/2$. Пусть $n = 2k+1$, $\Delta(G) = 2k$ и $p = 3k$ ($k \geqslant 1$). Тогда $\chi I(p,G) = 4k$. Покажем, что $\tau(p,G) > 4k$, что завершит доказательство теоремы 6.

Пусть φ — полная $(3k)$-раскраска инциденторов графа G с использованием цветов из интервала $[1,4k]$. Обозначим через $I_1(G)$ (через $I_2(G)$) подмножество инциденторов графа G, цвета которых при раскраске φ не больше k (не меньше $3k+1$). Очевидно, что $I_1(G) \cap I_2(G) = \varnothing$ и $I_1(G) \cup I_2(G) = I(G)$. Так как степень каждой вершины графа G равна $2k$ и инциденторы раскрашены правильно, то к каждой вершине примыкают ровно k инциденторов из $I_1(G)$ и ровно k инциденторов из $I_2(G)$. Следовательно, отсутствующие в каждой вершине цвета (из $[1,4k]$) образуют интервал $[k+1,3k]$. Но в этом интервале имеется $2k$ цветов, с помощью которых нельзя правильно раскрасить все $2k+1$ вершин полного графа. Поэтому без привлечения новых цветов нельзя построить полную тотальную $(3k)$-раскраску графа G, т. е. $\tau(3k,G) > 4k$. Теорема 6 доказана.

4. Заключительные замечания

Некоторые открытые задачи, связанные с задачами раскраски инциденторов и вершин ориентированных мультиграфов, эффективно решаются для неориентированных мультиграфов. Приведем примеры.

1. В теореме 3 доказано неравенство $\tau(p,G) \leqslant \chi I(p,G) + 1$. Неизвестно, справедлива ли такая же оценка для $\tau(p,G)$ в случае ориентированных мультиграфов [3]?

2. В [2] рассматривалась задача p-раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа в предписанные цвета и высказывалась гипотеза, что $\chi I_L(p,G) \leqslant \Delta(G) + p$. Для неориентированного мультиграфа справедливость этого неравенства почти очевидна: если ребру e предписано $\Delta(G) + p$ цветов, то для раскраски каждого инцидентора этого

ребра есть по меньшей мере $p+1$ возможностей; поэтому инциденторы ребра e можно раскрасить так, чтобы их цвета отличались не меньше чем на p.

3. В [9] рассматривалась раскраска инциденторов смешанных мультиграфов, при которой оба инцидентора каждого звена окрашиваются одним цветом, а конечный инцидентор каждой дуги — в больший цвет, чем начальный инцидентор этой дуги. Была высказана гипотеза, что для такой раскраски достаточно m цветов, где m — число, большее максимальной степени вершины мультиграфа и достаточное для правильной раскраски всех его ребер. Эта гипотеза подтверждена, например, для мультиграфов с максимальной степенью 3 [11], однако в общем случае вопрос открыт. Если же смягчить условие, налагаемое на раскраску инциденторов каждой дуги, заменив его требованием такой раскраски, при которой оба инцидентора каждой дуги окрашиваются различно, то гипотеза справедлива всегда. Действительно, после правильной раскраски всех ребер с помощью m цветов мы можем, отметив по одному инцидентору каждой дуги, последовательно перекрасить каждый из отмеченных инциденторов в цвет, отсутствующий в момент перекраски в вершине, к которой этот инцидентор примыкает.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. Вып. 29. С. 3–10.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
3. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.
4. **Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, 1999.
5. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
6. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
7. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

8. **Erdos P., Rubin A. L., Taylor H.** Choosability in graphs // Proc. West-Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Acata: Congr. Num. 26, 1979. P. 125–157.

9. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.

10. **Petersen J.** Die Theorie der regularen Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

11. **Pyatkin A. V.** Proof of Melnikov–Vizing conjecture for multigraphs with maximum degree at most 3 // Discrete Math. 1998. V. 185, N 1–3. P. 275–278.

Адреса авторов:

В. Г. Визинг
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net
Б. Тофт
Оденсе, Дания.
E-mail: btoft@imada.sdu.dk

Статья поступила
10 мая 2001 г.