ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2001. Серия 1. Том 8, № 3, 15–25

УДК 519.8

К ОПИСАНИЮ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ, РАЗРЕШИМЫХ АЛГОРИТМОМ ПОКООРДИНАТНОГО ПОДЪЕМА*)

Н. И. Глебов

Достаточные условия разрешимости посредством алгоритма покоординатного подъема некоторых задач целочисленного программирования были получены в работе [1]. В случае задания множества допустимых решений задачи системами линейных неравенств с целочисленными неотрицательными коэффициентами эти условия выражаются в терминах свойств некоторых семейств множеств, теснейшим образом связанных со структурой системы линейных ограничений и целевой функцией задачи. В данной статье дается более полное описание (характеризация) указанных семейств множеств, основанное на специального вида представимости этих семейств параллельно-последовательными сетями.

В работе [1] рассматривалась задача целочисленного программирования, имеющая вид: найти

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} f_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \mid x \in P\right\}, \tag{1}$$

где $f_i(\cdot)$ — вогнутые функции;

$A = \{a_{ij}\}$ — матрица размера $m \times n$ с неотрицательными целочисленными элементами a_{ij};

P — конечное множество целочисленных точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, лежащее в положительном ортанте пространства R^n и содержащее начало координат.

Исследовалась разрешимость данной задачи посредством алгоритма покоординатного подъема (жадного алгоритма). Полученные достаточные условия разрешимости воспроизведем здесь в частном случае, когда

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00510) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

множество P определяется следующими условиями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = m+1, \dots, \overline{m}, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

$$x_j - \text{целое}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

а элементы a_{ij} расширенной матрицы $A = \{a_{ij}\}$ размера $\overline{m} \times n$ принимают значения из множества $\{0, 1\}$ и матрица A не имеет нулевых строк и столбцов. Для формулировки упомянутых условий рассмотрим семейство $\mathscr{A} = \{A_i \mid i = 1, \dots, \overline{m}\}$ подмножеств $A_i = \{j \mid a_{ij} = 1\}$ множества $\{1, \dots, n\}$. Его подсемейство $\mathscr{A}'$ называется *тупиковым покрытием*, если объединение множеств из $\mathscr{A}'$ покрывает $\{1, \dots, n\}$, а удаление любого множества из $\mathscr{A}'$ нарушает это свойство.

Тупиковое покрытие называется *разбиением*, если любые два множества покрытия имеют пустое пересечение. Из установленных в [1] условий разрешимости задачи (1) алгоритмом покоординатного подъема следует

Утверждение 1. *Задача (1)–(4) разрешима алгоритмом покоординатного подъема, если любое подсемейство $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$, являющееся тупиковым покрытием, есть разбиение и каждое множество A_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, входит в некоторое разбиение.*

Целью данной статьи является полное описание семейств множеств, обладающих указанными в утверждении 1 свойствами.

Введем некоторые определения.

Пусть S — конечное множество, $\mathscr{E} = \{E_i \mid i \in I\}$ — семейство его непустых подмножеств, покрывающих S, т. е. $\bigcup\{E_i \mid i \in I\} = S$.

Определение 1. Семейство $\mathscr{E}$ будем называть *α-семейством*, если любое его подсемейство $\mathscr{E}'$, являющееся тупиковым покрытием, есть разбиение множества S на попарно непересекающиеся подмножества.

Определение 2. α-семейство $\mathscr{E}$ будем называть *$\alpha\beta$-семейством*, если любое множество E_i этого семейства входит в некоторое подсемейство $\mathscr{E}'$, являющееся разбиением.

Для описания $\alpha\beta$-семейств будет использовано их представление посредством множеств путей в сетях. При объединении двух или более семейств считается, что индексное множество объединенного семейства равно объединению индексных множеств исходных семейств. Если исходные семейства не являются подсемействами одного и того же семейства, то дополнительно предполагается, что их индексные множества не имеют общих элементов. Операция удаления некоторого множества

семейства трактуется как удаление из индексного множества семейства индекса удаляемого множества. При этом ниже, вообще говоря, не предполагается, что используемые в обозначениях те или иные индексы рассматриваемых множеств совпадают с теми индексами, которые эти множества имеют в качестве членов содержащих их семейств.

Под двухполюсной сетью мы понимаем ориентированный мультиграф $H = (VH,\ EH)$ с множеством вершин VH, множеством дуг EH и двумя выделенными вершинами-полюсами s (вход) и t (выход).

Ниже особую роль будут играть параллельно-последовательные сети (π-сети). Для определения класса параллельно-последовательных сетей рассмотрим две операции над сетями [2]. Пусть H_1 — сеть с входом s_1 и выходом t_1, H_2 — сеть с входом s_2 и выходом t_2 и при этом H_1 и H_2 не имеют общих элементов. Сеть $H_1 \cdot H_2$ с входом s_1 и выходом t_2, полученная отождествлением вершин s_2 и t_1, называется *последовательным соединением* сетей H_1 и H_2. Сеть $H_1 \vee H_2$ с входом s_1 и выходом t_1, полученная отождествлением входов s_1 и s_2 и выходов t_1 и t_2, называется *параллельным соединением* сетей H_1 и H_2. Тогда класс параллельно-последовательных сетей (π-сетей) определяется индуктивно:

1) сеть $H = (VH, EH)$ с множеством вершин $VH = \{s, t\}$, где s — вход и t — выход, и множеством дуг $EH = \{(s, t)\}$ является π-сетью;

2) если $H_i = (VH_i, EH_i)$ — π-сети без общих элементов с входами s_i и выходами t_i $(i = 1, 2)$, то $H_1 \cdot H_2$ и $H_1 \vee H_2$ — тоже π-сети.

Будет использоваться также другое (эквивалентное) определение класса π-сетей, отличающееся от приведенного выше п. 2:

2′) если H — π-сеть, e — ее дуга, то π-сетями являются также сети H' и H'', получаемые из H дублированием дуги e и заменой дуги e двумя дугами (u, w) и (w, v), где u, v — начальная и конечная вершины дуги e, а w — новая вершина.

Пусть $\mathscr{E} = \{E_i \mid i \in I\}$ — семейство подмножеств множества S и $H = (VH, EH)$ — сеть с входом s и выходом t. *Представимость* семейства $\mathscr{E}$ сетью H будем понимать в следующем смысле:

существуют биективное отображение $\varphi : I \to EH$ и отображение ψ множества S *на* множество всех простых путей в H, ведущих из s в t, такие, что при любом $i \in I$ справедливо равенство

$$E_i = \bigcup_{\eta} \psi^{-1}(\eta),$$

где объединение ведется по множеству всех простых (s, t)-путей η, проходящих по дуге $\varphi(i)$.

Другими словами, представимость семейства $\mathscr{E}$ двухполюсной сетью H означает, что между множествами из $\mathscr{E}$ и дугами сети H может быть установлено взаимно однозначное соответствие, а каждому элементу из

S может быть поставлен в соответствие некоторый простой (s,t)-путь в H, так что каждому (s,t)-пути соответствует хотя бы один элемент, и если множеству $E \in \mathscr{E}$ поставлена в соответствие дуга e, то E состоит из всех элементов множества S, которым поставлены в соответствие (s,t)-пути, содержащие дугу e.

С использованием данного определения может быть сформулировано и обосновано описание $\alpha\beta$-семейств.

Теорема 1. *Семейство $\mathscr{E}$ является $\alpha\beta$-семейством тогда и только тогда, когда оно представимо некоторой π-сетью.*

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть семейство $\mathscr{E}$ представимо π-сетью $H = (VH, EH)$ при отображениях $\varphi : I \to EH$ и $\psi : S \to \varrho$, где ϱ — множество всех (s,t)-путей в H.

Если сеть H содержит только одну дугу, то утверждение тривиально. Пусть $|EH| > 1$. Тогда сеть H получена из некоторых сетей $H_1 = (VH_1, EH_1)$ и $H_2 = (VH_2, EH_2)$ посредством либо операции параллельного соединения, либо операции последовательного соединения. Очевидно, что $|EH_1| < |EH|$ и $|EH_2| < |EH|$. Сначала рассмотрим случай $H = H_1 \vee H_2$. Тогда любой (s,t)-путь в сети H содержится либо в H_1, либо в H_2. Это приводит к тому, что любые два множества семейства $\mathscr{E}$ не пересекаются, если они соответствуют дугам из разных «подсетей» H_1 и H_2. Отсюда далее следует, что множество S разбивается на два подмножества S_1 и S_2 такие, что при $x \in S_1$ (соответственно $x \in S_2$) путь $\psi(x)$ содержится в H_1 (соответственно в H_2). В соответствии с этим и семейство $\mathscr{E}$ делится на два подсемейства $\mathscr{E}_1 = \{E_i \mid i \in I_1\}$ и $\mathscr{E}_2 = \{E_i \mid i \in I_2\}$ такие, что $E_i \subset S_1$ при $i \in I_1$ и $E_i \subset S_2$ при $i \in I_2$. Нетрудно видеть, что семейство $\mathscr{E}_1$ (соответственно $\mathscr{E}_2$) представимо сетью H_1 (соответственно H_2). (При этом используемые отображения $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ получаются из φ и ψ посредством их сужения на множества I_1, I_2, S_1 и S_2 соответственно.) Привлекая индукцию, можно считать, что $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ являются $\alpha\beta$-семействами. Отсюда следует, что $\mathscr{E}$ является также $\alpha\beta$-семейством.

Рассмотрим теперь случай $H = H_1 \cdot H_2$. Сети H_1 и H_2 можно рассматривать как подсети сети H с одной общей вершиной z, которая в H_1 является выходом, а в H_2 — входом. Каждый (s,t)-путь η в сети H проходит через z и делится ею на две части η_1 и η_2: на (s,z)-путь η_1 в H_1 и на (z,t)-путь η_2 в H_2.

Пусть φ и ψ — отображения, реализующие представление семейства $\mathscr{E}$ сетью H; $I_1 = \{i \in I \mid \varphi(i) \in EH_1\} = \varphi^{-1}(EH_1)$, $I_2 = \varphi^{-1}(EH_2)$, $\mathscr{E}_1 = \{E_i \mid i \in I_1\}$ и $\mathscr{E}_2 = \{E_i \mid i \in I_2\}$. Рассмотрим отображения φ_1 и ψ_1. В качестве φ_1 возьмем ограничение отображения φ на множество I_1, а ψ_1 — отображение множества S на множество (s,z)-путей в H_1 —

определяется так, что $\psi_1^{-1}(\eta_1) = \bigcup\limits_{\eta_2} \psi^{-1}(\eta_1\eta_2)$, где объединение берется по множеству всех (z,t)-путей η_2 в H_2. Тем самым получается представление семейства $\mathscr{E}_1$ π-сетью H_1. Аналогично показывается, что семейство $\mathscr{E}_2$ представимо π-сетью H_2. Тогда, используя предположение индукции, можно считать, что $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ являются $\alpha\beta$-семействами.

Пусть подсемейство $\mathscr{E}' = \{E_i \mid i \in I_1'\}$, $I' \subset I$, является тупиковым покрытием множества S. Оно распадается на два подсемейства $\mathscr{E}_1' = \{E_i \mid i \in I_1'\}$ и $\mathscr{E}_2' = \{E_i \mid i \in I_2'\}$, где $I_1' = I' \cap I_1$ и $I_2' = I' \cap I_2$.

Тот факт, что $\mathscr{E}'$ есть покрытие множества S, означает: для любого (s,t)-пути η в сети H существует индекс $i \in I'$ такой, что дуга $\varphi(i)$ принадлежит пути η, т. е. путь η содержит дугу из множества $\varphi(I')$.

Если (s,z)-путь η_1 в H_1 не содержит дуг из множества $\varphi_1(I_1')$, а (z,t)-путь η_2 в H_2 не содержит дуг из множества $\varphi_2(I_2')$, то (s,t)-путь $\eta = \eta_1\eta_2$ в сети H не содержит дуг из множества $\varphi(I')$. Последнее противоречит тому, что семейство $\mathscr{E}'$ является покрытием. Следовательно, либо в любом (s,z)-пути в сети H_1 имеется дуга из множества $\varphi_1(I_1')$, либо в любом (z,t)-пути в сети H_2 имеется дуга из множества $\varphi_2(I_2')$. В первом случае семейство $\mathscr{E}_1'$, а во втором случае семейство $\mathscr{E}_2'$ является покрытием множества S. Далее из тупиковости покрытия $\mathscr{E}'$ следует, что либо $\mathscr{E}_1' = \mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}_2' = \varnothing$, либо $\mathscr{E}_1' = \varnothing$ и $\mathscr{E}_2' = \mathscr{E}'$. Отсюда, привлекая предположение индукции, в любом случае получаем, что тупиковое покрытие $\mathscr{E}'$ является разбиением. Наконец, вхождение каждого множества семейства $\mathscr{E}$ в некоторое разбиение следует из того, что $\mathscr{E}$ является объединением $\alpha\beta$-семейств $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\mathscr{E} = \{E_i \mid i \in I\}$ является $\alpha\beta$-семейством. Чтобы доказать представимость семейства $\mathscr{E}$ некоторой π-сетью, сформулируем и докажем ряд лемм. В их формулировке под разбиениями $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ и т. д. понимаются подсемейства семейства $\mathscr{E}$.

Определение 3. Непустое множество C, $C \subset S$, будем называть *компонентой связности* семейства $\mathscr{F}$, если

1) для любого множества $E \in \mathscr{F}$ либо $E \cap C = \varnothing$, либо $E \cap C = E$;

2) никакое собственное подмножество C не обладает свойством 1.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ — разбиения, $E_1 \in \mathscr{R}_1$. Тогда компонента связности семейства $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$, содержащая множество E_1, является объединением всех множеств из $\mathscr{R}_2$, имеющих непустое пересечение с E_1.*

Доказательство. Достаточно показать, что любое множество из $\mathscr{R}_2$, содержащееся в той же самой компоненте связности, что и E_1, имеет с E_1 непустое пересечение. Предположим противное. Пусть для множества $E_2 \in \mathscr{R}_2$ из рассматриваемой компоненты связности имеем $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Тогда по определению компоненты связности $E_1 \notin \mathscr{R}_2$,

$E_2 \notin \mathscr{R}_1$ и существует последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_k, k \geqslant 2$, множеств из $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$ такая, что $F_1 = E_1$, $F_k = E_2$ и $F_i \cap F_{i+1} \neq \varnothing$ при $i = 1, \ldots, k-1$. Кроме того, семейство $(\mathscr{R}_1 \setminus \{E_1\}) \cup (\mathscr{R}_2 \setminus \{E_2\})$, являясь покрытием, должно содержать некоторое разбиение $\mathscr{R}$. Нетрудно видеть, что последовательность $F_1, \ldots, F_k$ является «чередующейся» относительно $\mathscr{R}_1$, т. е. при любом $i = 1, \ldots, k-1$ из двух множеств F_i и F_{i+1} одно принадлежит $\mathscr{R}_1$, а другое не принадлежит $\mathscr{R}_1$. Из $F_1 \in \mathscr{R}_1$ и $F_k \notin \mathscr{R}_1$ следует, что k четно. С другой стороны, та же последовательность является чередующейся и относительно $\mathscr{R}$. При этом $F_1, F_k \notin \mathscr{R}$, так что k должно быть нечетным. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ — разбиения, $E_1 \in \mathscr{R}_1$, $E_2 \in \mathscr{R}_2$ и C — компонента связности семейства $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$, содержащая $E_1 \cup E_2$. Тогда C не зависит от выбора $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$.*

Доказательство. Наряду с $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_2$ рассмотрим разбиения $\mathscr{R}'_1$ и $\mathscr{R}'_2$ такие, что $E_1 \in \mathscr{R}'_1$ и $E_2 \in \mathscr{R}'_2$. Тогда C есть компонента связности семейства $\mathscr{R}'_1 \cup \mathscr{R}_2$, поскольку согласно лемме 1 компонента связности, содержащая E_1, является объединением всех множеств из $\mathscr{R}_2$, имеющих непустое пересечение с E_1. Аналогично доказывается, что C есть компонента связности семейства $\mathscr{R}'_1 \cup \mathscr{R}'_2$ (так как C есть объединение всех множеств из $\mathscr{R}'_1$, имеющих непустое пересечение с E_2). Лемма 2 доказана.

Множества $C \subset S$, типа рассматриваемых в лемме 2, в дальнейшем будем называть *инвариантными*. Каждое такое множество однозначным образом определяется некоторыми множествами E_1 и E_2 из $\mathscr{E}$, имеющими непустое пересечение.

Лемма 3. *Любая совокупность попарно непересекающихся множеств семейства $\mathscr{E}$ входит в некоторое разбиение.*

Доказательство (по индукции). Если совокупность состоит из одного множества, то утверждение верно в силу определения $\alpha\beta$-семейства.

Пусть утверждение справедливо для всех совокупностей, мощность которых не превышает $k-1$ и $\mathscr{P} = \{E_1, \ldots, E_k\}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Тогда для семейства $\mathscr{P}_1 = \{E_1, \ldots, E_{k-1}\}$ существует разбиение $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_1 \supset \mathscr{P}_1$, для множества E_k — разбиение $\mathscr{R}_2$, $E_k \in \mathscr{R}_2$.

Обозначим через C компоненту связности семейства $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$, содержащую E_k. В силу леммы 1 имеем $E_i \cap C = \varnothing$, $i = 1, \ldots k-1$. Если теперь рассмотреть разбиение $\mathscr{R}$, получающееся из $\mathscr{R}_1$ посредством замены в нем всех множеств, входящих в C, на аналогичные множества из $\mathscr{R}_2$, то полученное разбиение будет содержать $\mathscr{P}$. Лемма 3 доказана.

Определение 4. Будем говорить, что множества E_1, E_2 семейства $\mathscr{E}$ образуют *сцепленную пару*, если в любое разбиение $\mathscr{R}$, $\mathscr{R} \subset \mathscr{E}$, множества E_1 и E_2 входят или не входят одновременно.

Лемма 4. *Если $|\mathscr{E}| \geqslant 2$ и все множества семейства $\mathscr{E}$ попарно различны, то в $\mathscr{E}$ существуют по крайней мере два множества, образующие сцепленную пару.*

Доказательство. Если семейство $\mathscr{E}$ является разбиением, то утверждение леммы тривиально. В противном случае в совокупности инвариантных множеств C, порождаемых всевозможными парами множеств E и F из $\mathscr{E}$ такими, что $E \cap F \neq \varnothing$ и $E \neq F$, выберем минимальное по включению множество C_0, соответствующее множествам E_0 и F_0. Можно считать, что $F_0 \setminus E_0 \neq \varnothing$. Пусть E_0 содержится в разбиении $\mathscr{R}_1$, а F_0 — в $\mathscr{R}_2$. Тогда в C_0 содержится не менее двух множеств из $\mathscr{R}_1$: $E_0, E^1, \ldots, E^k$, $k \geqslant 1$. Покажем, что любые два из этих множеств могут быть взяты в качестве E_1 и E_2, образующих сцепленную пару. Если это не так, то существует разбиение $\mathscr{R}$, которое содержит по меньшей мере одно из перечисленных множеств, но не все. Для определенности пусть $E_0 \in \mathscr{R}$ и $E^1 \notin \mathscr{R}$. Тогда в $\mathscr{R}$ должно входить некоторое множество F^1 такое, что $F^1 \cap E^1 \neq \varnothing$ и $F^1 \neq E^1$. Порождаемое множествами F^1 и E^1 инвариантное множество C_0' по лемме 3 является компонентой связности семейства $\mathscr{R} \cup \mathscr{R}_1$. По этой же лемме множество C_0 является компонентой связности семейства $\mathscr{R} \cup \mathscr{R}_2$, так что из $E \cap C_0 \neq \varnothing$ следует $E \subset C_0$ для любого множества $E \in \mathscr{R}$. Так как компонента связности C_0' семейства $\mathscr{R} \cup \mathscr{R}_1$ является объединением всех множеств разбиения $\mathscr{R}$, имеющих с E^1 непустое пересечение, и $E^1 \subset C_0$, то $C_0' \subset C_0$. При этом $E_0 \cap C_0' = \varnothing$, т. е. $C_0' \subset C_0 \setminus E_0$, поскольку $E_0 \cap E^1 = \varnothing$. Последнее противоречит выбору C_0. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если множества E^1 и E^2 образуют сцепленную пару, то из $F \cap E^1 \neq \varnothing$ следует $F \cap E^2 \neq \varnothing$ для любого множества F семейства $\mathscr{E}$.*

Доказательство (от противного). Пусть $F \cap E^1 \neq \varnothing$. Если $F \cap E^2 = \varnothing$, то по лемме 2 существует разбиение $\mathscr{R}$, содержащее F и E^2. В то же время разбиение $\mathscr{R}$ вместе с E^2 должно содержать и E^1, что невозможно. Лемма 5 доказана.

Лемма 6 (центрированность). *Если $\{E_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ — совокупность попарно пересекающихся множеств семейства $\mathscr{E}$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k} E_i \neq \varnothing$.*

Доказательство проведем методом индукции. Можно считать, что множества рассматриваемой совокупности попарно различны. При $k = 2$ утверждение леммы тривиально. Пусть $k > 2$ и при числе

множеств, равном $k-1$, утверждение справедливо. Предположим, что $\bigcap_{i=1}^{k} E_i = \varnothing$. Рассмотрим разбиения $\mathscr{R}_i$ такие, что $E_i \in \mathscr{R}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Из сделанного допущения следует, что семейство множеств $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{R}_i \setminus \{E_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ является покрытием. В самом деле, для любого элемента x из S существует номер i такой, что $x \notin E_i$. Тогда $x \in E_i'$ при некотором E_i' из $\mathscr{R}_i$. Так как $E_i' \cap E_i = \varnothing$ и $E_i \cap E_j \neq \varnothing$, то $E_i' \neq E_j$ при $j = 1, \ldots, k$ и, следовательно, E_i' содержится в рассматриваемом семействе $\mathscr{P}$. Из предположения индукции следует, что существуют элементы $e_1 \in \bigcap_{i=2}^{k} E_i$ и $e_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i$. Пусть E_1' и E_k' есть такие элементы разбиений $\mathscr{R}_1$ и $\mathscr{R}_k$ соответственно, что $e_1 \in E_1'$ и $e_k \in E_k'$. Очевидно, что $E_1' \neq E_1$, $E_k' \neq E_k$ и любое разбиение, получаемое из покрытия $\mathscr{P}$, будет содержать множества E_1' и E_k'. Следовательно, $E_1' \cap E_k' = \varnothing$. С другой стороны, эти множества входят в одну и ту же компоненту связности семейства $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_k$, так как $E_1' \cap E_k \neq \varnothing$, $E_k' \cap E_1 \neq \varnothing$ и $E_1 \cap E_k \neq \varnothing$. Тогда по лемме 1 имеем $E_1' \cap E_k' \neq \varnothing$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 6.

Далее для доказательства необходимости условий теоремы используем индукцию по числу множеств семейства $\mathscr{E}$.

База индукции ($|\mathscr{E}| = 1$). π-сеть, представляющая $\mathscr{E}$, будет состоять из входа s, выхода t и одной дуги (s,t), которая соответствует единственному множеству E_1 семейства $\mathscr{E}$. Каждому элементу множества $S (= E_1)$ поставлен в соответствие путь, состоящий из дуги (s,t).

Индуктивный шаг ($|\mathscr{E}| \geqslant 2$). В зависимости от наличия или отсутствия в $\mathscr{E}$ равных множеств достаточно рассмотреть два случая.

Случай 1. В семействе $\mathscr{E}$ есть равные множества E' и E'' (в $\mathscr{E}$ эти множества имеют разные индексы, которые мы опускаем). Преобразуем $\mathscr{E}$, заменяя E' и E'' одним равным им множеством E. Получаем семейство $\mathscr{E}'$ с меньшим числом членов, обладающее свойствами (α), (β). Согласно предположению индукции существует π-сеть H' (и отображения φ и ψ), представляющая семейство $\mathscr{E}'$.

Сеть H, представляющая семейство $\mathscr{E}$, получается из H' следующим образом: дуга e сети H', соответствующая множеству E, заменяется на путь из двух (новых) дуг e' и e'', сопоставляемых с множествами E' и E'' соответственно. При этом новые пути из s в t, проходящие по дугам e' и e'', заменяют старые пути из s в t, проходящие по дуге e, и им соответствуют те же самые элементы множества S. Очевидно, что сеть H представляет семейство $\mathscr{E}$ в принятом нами смысле.

Случай 2. В семействе $\mathscr{E}$ нет равных множеств. Тогда согласно лемме 4 в $\mathscr{E}$ имеются по меньшей мере два множества E' и E'', образующие сцепленную пару. Преобразуем $\mathscr{E}$, заменяя E' и E'' на множество $E = E' \cup E''$. Полученное семейство $\mathscr{E}'$ будет также обладать свойствами (α) и (β). По предположению индукции семейство $\mathscr{E}'$ представимо некоторой π-сетью H' (с отображениями φ и ψ), при этом множеству E соответствует некоторая дуга e. π-сеть H, представляющая семейство $\mathscr{E}$, получается из H' посредством замены дуги e на две параллельные дуги e' и e'', сопоставляемые с множествами E' и E'' соответственно.

Остается скорректировать отображение ψ, которое элементам множества S ставит в соответствие (s,t)-пути в H'. Для (s,t)-пути в H' (и в H также), не содержащего дуги e, множество поставленных ему в соответствие элементов множества S сохраняется. Пусть (s,t)-путь η в сети H' содержит дугу e. В сети H ему соответствуют два пути η' и η'', получаемые из η заменой дуги e на дуги e' и e'' соответственно. Корректируя отображение ψ, элементам множества $\psi^{-1}(\eta) \cap E'$ поставим в соответствие путь η', а элементам множества $\psi^{-1}(\eta) \cap E''$ — путь η''. Так как $E' \cap E'' = \varnothing$ и по определению представимости $\psi^{-1}(\eta) \subset E (= E' \cup E'')$, то указанные множества не пересекаются, а их объединение равно $\psi^{-1}(\eta)$. Остается лишь показать, что оба эти множества непусты. Для доказательства этого утверждения прежде всего заметим, что $\psi^{-1}(\eta)$ является пересечением всех множеств из $\mathscr{E}'$, соответствующих дугам пути η. (В самом деле, нарушение этого равенства означало бы, что в указанном пересечении имеются элементы, не принадлежащие множеству $\psi^{-1}(\eta)$. Отсюда следовало бы существование в H' некоторого (s,t)-пути $\widetilde{\eta}$, который отличен от η и содержит все дуги последнего, что для простых путей невозможно.)

Рассмотрим теперь произвольное множество F из $\mathscr{E}'$, соответствующее некоторой дуге пути η. Тогда $F \cap E \neq \varnothing$ и так как множества E' и E'' образуют сцепленную пару в $\mathscr{E}$, то согласно лемме 5 имеем $F \cap E' \neq \varnothing$ и $F \cap E'' \neq \varnothing$. Следовательно, любая пара множеств в $\mathscr{E}$, соответствующих дугам пути η', имеет непустое пересечение. Тогда по лемме 6 множество $\psi^{-1}(\eta) \cap E'$, являющееся пересечением всех множеств семейства $\mathscr{E}$, соответствующих дугам пути η', непусто. Аналогичным образом устанавливается, что $\psi^{-1}(\eta) \cap E'' \neq \varnothing$. После проведения описанных выше корректировок отображений φ и ψ получаем представление семейства $\mathscr{E}$ π-сетью H. Теорема 1 доказана.

Ниже, как и прежде, под $\mathscr{E}$ будем понимать некоторое семейство $\{E_i \mid i \in I\}$, элементами которого являются непустые подмножества S и $\bigcup\limits_i E_i = S$. Для x из S через $I(x)$ обозначим множество $\{i \in I \mid x \in E_i\}$.

Лемма 7. *Если $\mathscr{E}$ является $\alpha\beta$-семейством, то для любых $x, y \in S$ никакое из множеств $I(x)$ и $I(y)$ не может быть собственным подмножеством другого.*

Доказательство. В самом деле, в случае $I(x) \subset I(y)$ при $i \in I(y) \setminus I(x)$ множество E_i не входит в разбиения, так как элемент y будет покрываться некоторым множеством E_j, $j \in I(x)$. Лемма 7 доказана.

Для описания α-семейств введем одну операцию над семействами множеств, которая в случае $\alpha\beta$-семейств порождает α-семейства.

Пусть $\chi : S' \to S$, где S' — множество (возможно, пустое), не имеющее с S общих элементов. Рассмотрим семейство $\mathscr{E}' = \{E_i \cup E_i' \mid i \in I\}$, где $E_i' = \cup\{\chi^{-1}(x) \mid x \in E_i\}$, и некоторое семейство $\mathscr{E}''$ подмножеств множества S'. Семейство $\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$ будем называть *χ-расширением* $\mathscr{E}$. В случае $S' = \varnothing$ естественно считать, что $\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E}$.

Нетрудно показать, что χ-расширение семейства $\mathscr{E}$ будет α-семейством, если $\mathscr{E}$ есть $\alpha\beta$-семейство. Верно в некотором смысле и обратное утверждение. Следующая теорема дает полное описание α-семейств.

Теорема 2. *α-семействами являются χ-расширения $\alpha\beta$-семейств и только они.*

Доказательство. О том, что χ-расширения $\alpha\beta$-семейств являются α-семействами, было уже сказано выше. Докажем вторую часть утверждения.

Для этого представим α-семейство $\mathscr{E}$ в виде объединения $\mathscr{E}' \cup \mathscr{E}_1$ двух подсемейств, где $\mathscr{E}' = \{E_i \mid i \in I'\}$, $I' \subset I$, состоит из тех множеств семейства $\mathscr{E}$, которые не входят в разбиения, и $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}'$. Очевидно, что $\mathscr{E}_1$ является $\alpha\beta$-семейством и в случае $\mathscr{E}' = \varnothing$ α-семейство $\mathscr{E}$ есть тривиальное расширение $\alpha\beta$-семейства.

Пусть $I' \neq \varnothing$, $S' = \cup\{E_i \mid i \in I'\}$, $S_1 = S \setminus S'$ и $I_1 = I \setminus I'$. Заметим, что любое подсемейство $\mathscr{E}'' \subset \mathscr{E}_1$, являющееся покрытием множества S_1, будет также и покрытием множества S', так как в противном случае семейство $\mathscr{E}'' \cup \mathscr{E}'$, являясь покрытием множества S, должно содержать разбиения и в каждом из них будет содержаться некоторое множество семейства $\mathscr{E}'$, что невозможно в силу определения семейства $\mathscr{E}'$.

Положим $I_1(x) = \{i \in I_1 \mid x \in E_i\}$ для $x \in S$ и рассмотрим семейство $\overline{\mathscr{E}}_x = \{E_i \mid i \in I_1 \setminus I_1(x)\}$. Поскольку при $x \in S'$ это семейство не является покрытием множества S', оно не является также покрытием множества S_1. Следовательно, для любого элемента $x \in S'$ существует элемент $y \in S_1$ такой, что $I_1(y) \cap (I_1 \setminus I_1(x)) = \varnothing$ или $I_1(y) \subset I_1(x)$. В силу леммы 7 это влечет равенство $I_1(y) = I_1(x)$. Таким образом, мы имеем возможность определить такое отображение $\chi : S' \to S_1$, что для любого $x \in S'$ элемент $y = \chi(x)$ удовлетворяет условию $I_1(y) = I_1(x)$. Из

этого следует, что семейство $\mathscr{E}$ является χ-расширением $\alpha\beta$-семейства $\mathscr{E}_1$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. Вып. 17. С. 52–59.
2. **Дискретная** математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. Т. 1. С. 149–206.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: nigleb@math.nsc.ru

Статья поступила
9 июня 2001 г.