ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2001. Серия 1. Том 8, № 3, 46–72

УДК 519.174.23

ОБ УСЛОВНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ КОНТРОЛЯ СЕТЕЙ АВТОМАТОВ*)

В. Н. Носков

Рассматривается представление конечного автомата схемой в базисе, состоящем из сильно связных конечных автоматов Мили. Предлагается метод преобразования любой части произвольной схемы в подсхему, для которой возможна диагностика с помощью условных тестов с хорошей локализацией возникающих неисправностей из широкого класса. Описаны тестовые последовательности и получены оценки их длин. Даны верхние оценки сложности преобразованных схем.

Введение

В работе [3] мы предложили новый метод синтеза схем, реализующих автоматные функции. Схемы строятся из базисных элементов, реализующих логические и автоматные функции. Достоинством предложенного метода является то, что он позволяет строить схемы, в которых с помощью тестовых процедур можно добиться детальной локализации неисправностей, т. е. достаточно точно указывать места в схеме, где имеются неисправные элементы. Рассматриваемые в [3] схемы являются представлениями конечного автомата схемой S в базисе из сильно связных автоматов Мили и элементов, реализующих булевы функции. Входным алфавитом базисных автоматов служит множество r-разрядных булевых векторов. Входным алфавитом автомата, представленного схемой S, служит множество n-разрядных булевых векторов. Описано преобразование произвольной схемы S в схему S'. При этом преобразовании произвольная заданная часть B схемы S заменяется схемой C, а оставшаяся часть схемы S не меняется. Схема S' имеет больше входов и выходов, чем схема S (см. рис. 1; здесь и ниже $\widetilde{x}_s = (x_1, \dots, x_s)$; в схеме S', рассматриваемой в [3], имеется $n+3$ входов). Если на дополнительные входы исправной схемы S' подаются нули, то на ее выходах

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00593) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО–110).

$a_1, \dots, a_q$ реализуются те же функции от основных входов, что и на выходах $a_1, \dots, a_q$ схемы S. Выходы $b_1, \dots, b_p$ схемы S' используются при тестировании схемы.

Через k обозначим минимальное число такое, что каждый автомат базиса имеет не более k состояний, через $|\vec{Q}'|$ — длину слова $\vec{Q}'$. В [3] найдено такое слово $\vec{Q}'$, что, подав его на входы схемы S' и получив ее выходное слово, можно указать небольшие области в C, в которых находятся неисправные элементы. Слово $\vec{Q}'$ определяется по структуре исправной схемы S и не зависит от имеющихся в контролируемой схеме неисправностей. Такого рода процедуры контроля называются *безусловными тестами.* Слово $\vec{Q}'$ имеет длину $\lceil 6 \cdot 4^{rk+1} k^2 \ln(2k) \rceil$.

В настоящей статье схема S' строится по тем же правилам, что и в [3], но для контроля используется слово $\vec{Q}$, состоящее из нескольких последовательных подслов. В процессе построения слова $\vec{Q}$ каждое очередное подслово подбирается с использованием информации о реакции схемы S' на подслова, уже включенные в слово $\vec{Q}$. Такие процедуры контроля называются *условными тестами.* Схема S' допускает диагностику с помощью условных тестов с хорошей локализацией неисправностей. Длина используемого слова $\vec{Q}$ не превосходит $R_B 4^{r+1} k^4 \ln k$, где R_B — число автоматов в схеме B, каждый из которых имеет более одного внутреннего состояния.

Из сравнения $|\vec{Q}'|$ и $|\vec{Q}|$ видно, что предлагаемые условные тесты могут быть значительно более короткими, чем безусловные: с ростом k длина теста $\vec{Q}'$ растет как экспоненциальная функция от k, тогда как длина теста $\vec{Q}$ растет не быстрее, чем некоторая степенная функция от k.

При больших значениях R_B и малых k приведенная оценка для $|\vec{Q}'|$ может оказаться ниже верхней оценки для $|\vec{Q}|$. В этом случае следует отдать предпочтение безусловным тестам.

Точные формулировки основных утверждений настоящей статьи приведены в виде теоремы 1.

Предложенный подход можно применить и к схемам, полученным в [4] и [5], т. е. в них можно перейти от безусловных тестов к условным.

Перейдем к точной постановке задачи.

Базис схем. Пусть $\Phi = \{\varphi^i\}_{i=1,\dots,g}$ — семейство таких неинициальных приведенных сильно связных автоматов Мили, что входным алфавитом автомата φ^i, $1 \leqslant i \leqslant g$, является множество r-разрядных булевых векторов, а выходным алфавитом — множество $\{0, 1\}$. (Автомат без эквивалентных состояний называется *приведенным.* Автомат называется *сильно связным*, если для любой упорядоченной пары (σ', σ'') его внутренних состояний существует входное слово, которое переводит автомат из состояния σ' в состояние σ''.) Каждый автомат из Φ имеет

не более k внутренних состояний. Множество автоматов из Φ с одним внутренним состоянием назовем *простой частью* базиса Φ. Будем полагать, что набор функций, реализуемых автоматами из простой части базиса Φ, образует полный базис в классе всех булевых функций. Автоматы с одним внутренним состоянием будем называть *тривиальными автоматами*.

Пусть изображенная на рис. 1 схема S есть схема в базисе Φ, а B — произвольно выделенная ее часть (подсхема). Оставшуюся часть схемы S обозначим через A. Полагаем, что если в схеме S имеется d базисных элементов, занумерованных числами $1,\dots,d$, то в каждый момент времени ее внутреннее состояние можно задать d-разрядным вектором, i-й разряд которого есть внутреннее состояние i-го элемента схемы, $1 \leqslant i \leqslant d$. Таким образом, внутреннее состояние всей схемы S есть макросостояние, образованное внутренними состояниями ее базисных элементов. На рис. 1 справа изображена схема S', в которую преобразуется схема S после замены в ней подсхемы B на C. Схемы S и S' с выделенными в них частями A, B и C будем обозначать через $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$. (В настоящей работе преобразованная схема S' имеет два дополнительных входа x_{n+1} и x_{n+2}, а аналогичная схема из [3] — три дополнительных входа.)

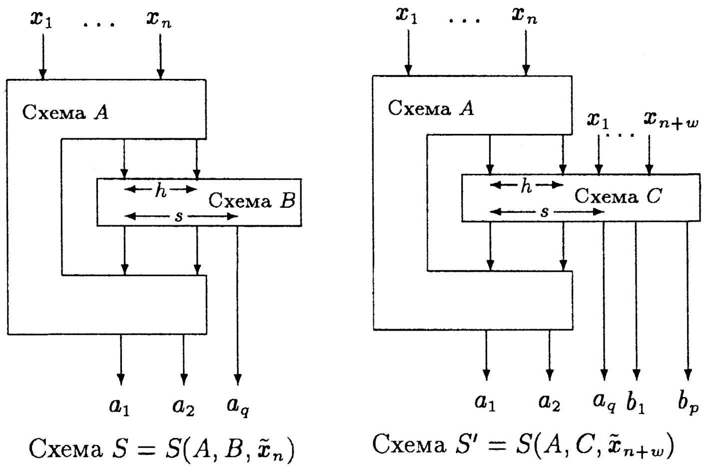

Рис. 1

Допустимые неисправности в схемах $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$, $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Обозначим через β произвольный элемент схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ или схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$.

(а) Пусть β — тривиальный автомат с r входами, а $v_1,\dots,v_r$ — его входные полюсы, на которые в схеме могут поступать 0 и 1. Полюсы

$v_1, \ldots, v_r$ будем отождествлять с одноименными булевыми переменными. На выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \ldots, v_r)$, а при появлении неисправностей в схеме элемент β может превратиться в элемент β^*, реализующий произвольную булеву функцию β^* от переменных $v_1, \ldots, v_r$.

(b) Пусть β — нетривиальный автомат с r входами и числом внутренних состояний $k(\beta)$. Тогда полагаем, что в неисправной схеме автомат β может превратиться в произвольный автомат Мили β^* с тем же входным алфавитом, что и у автомата β, и не более чем с $k(\beta)$ внутренними состояниями.

Полагаем, что *число неисправных элементов в схеме C не превосходит произвольно заданного числа m.*

Введем обозначения:

- A^* и C^* — схемы, в которые преобразуются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей; $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$, когда ее подсхемы A и C преобразуются в подсхемы A^* и C^*.
- $L(F)$ — сложность произвольной схемы F, т. е. число ее элементов.
- R_B — число нетривиальных базисных автоматов, содержащихся в схеме B.
- Пусть $\vec{P}$ — последовательность n-разрядных булевых векторов. Обозначим через $\vec{P}_{(00)}$ последовательность, полученную из $\vec{P}$ заменой каждого n-разрядного вектора на $(n+2)$-разрядный: значения первых n разрядов в каждом новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние два разряда равны 0.

$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{P})$ — последовательность, реализуемая на выходах $a_1, \ldots, a_q$ схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, если на ее входы подается последовательность $\vec{P}$ и в начальный момент подсхемы A и B находились в состояниях $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$.

Аналогично определяются последовательности $S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(00)})$, $S_b(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(00)})$, $S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(00)})$, $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(00)})$. Здесь $S_b(\ldots)$ обозначает последовательность векторов, появляющихся в соответствующей схеме на выходах $b_1, \ldots, b_p$ (p — число дополнительных выходов в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$).

Теорема 1. *Предположим, что $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ — схема в автоматном базисе Φ, входными наборами для которой являются n-разрядные булевы векторы, и пусть $r < n$. Тогда существуют такая константа l, зависящая от простой части базиса, такая последовательность $\vec{Q}$ длины*

не более $R_B 4^{r+1} k^4 \ln k$, *состоящая из* $(n+2)$*-разрядных булевых векторов, и такая схема* $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ *над автоматным базисом* Φ *с выделенными в* C *частями* $D_1, D_2, \ldots, D_s$, $s < lmL(B)$, *что*

(a) *для любых состояний* $\sigma(A)$ *и* $\sigma(B)$ *подсхем* A *и* B *схемы* $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ *найдется такое состояние* $\sigma(C)$ *схемы* C, *что для любой последовательности* $\vec{P}$, *состоящей из* n*-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(00)});$$

(b) $L(D_i) \leqslant (r+2)$, $1 \leqslant i \leqslant s$; $p \leqslant L(C) < lmL(B)$;

(c) *при любых* $A^*, C^*, \sigma(A^*)$ *и* $\sigma(C^*)$ *по последовательности* $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{Q})$ *множество частей* $\{D_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$ *в схеме* C^* *можно разбить на два класса* $D(1, C^*)$ *и* $D(2, C^*)$ *такие, что*

— *если множество* $D(1, C^*)$ *непусто, то любая часть* D_i *из* $D(1, C^*)$ *содержит неисправный элемент из* C^*;

— *если множество* $D(1, C^*)$ *пусто, то для произвольных состояний* $\sigma(A^*)$ *и* $\sigma(B)$ *подсхем* A^* *и* B *схемы* $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ *найдется такое состояние* $\sigma(C^*)$ *схемы* C^*, *что для любой последовательности* $\vec{P}$, *состоящей из* n*-разрядных булевых векторов, справедливо равенство* $S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(00)})$.

Предложение (a) утверждает, что при $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$ схема C моделирует схему B, т. е. $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ превращается в схему, функционально эквивалентную схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$.

Неравенства из (b) ограничивают сложность схемы C и размеры частей D_i. Эти размеры характеризуют степень точности, с которой указывается место неисправного элемента в схеме.

Утверждение (c) дает представление о полноте диагностики: указываются места расположения неисправных элементов (с точностью до нескольких элементов, расположенных вместе с неисправным элементом в одной из частей D_i). Если во всех частях из $D(1, C^*)$ провести замену всех неисправных элементов на исправные, то схема C^* превратится в такую схему C^{**}, что класс $D(1, C^{**})$ окажется пустым. Согласно второму утверждению из (c) схема C^{**} может моделировать работу схемы B из $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$, если установить C^{**} в подходящее состояние.

Доказательство теоремы конструктивно:

— указывается последовательность преобразований, которые позволяют превратить схему $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$, обладающую свойствами (a), (b) и (c) из утверждения теоремы 1;

— указан способ построения последовательности $\vec{Q}$;

— приведен алгоритм, позволяющий с использованием лишь последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{Q})$ разбить множество частей схемы C^* на классы $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$.

В основе преобразований схемы B в схему C лежит установка в B на линиях между внутренними полюсами специальных подсхем, которые играют роль коммутаторов, работающих в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$, когда на ее основных выходах реализуется система функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться на выходах всех элементов схемы C слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме. Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений дополнительных переменных на их входы.

Основной целью оставшейся части статьи является доказательство теоремы 1.

§ 1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathscr{B}$ — конечный автомат и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$ — множество его внутренних состояний. Через $\mathscr{B}_{[\lambda_i]}$ будем обозначать автомат $\mathscr{B}$ с начальным состоянием λ_i. Через $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ будем обозначать любой инициальный автомат из множества $\{\mathscr{B}_{[\lambda_1]}, \ldots, \mathscr{B}_{[\lambda_t]}\}$ в случае, когда состояние автомата $\mathscr{B}$ неизвестно. Запись $\mathscr{B}_{[\lambda_i; \vec{a}]}$ обозначает автомат $\mathscr{B}$ в том состоянии, в котором окажется автомат $\mathscr{B}_{[\lambda_i]}$ после подачи на его вход слова $\vec{a}$. Если $\vec{u}$ и $\vec{w}$ — входные слова для автомата $\mathscr{B}$, то запись $\vec{u} * \vec{w}$ обозначает конкатенацию слов, т. е. слово, в котором $\vec{w}$ следует за $\vec{u}$.

Инициальные автоматы $\mathscr{B}_{[\lambda_i]}$ и $\mathscr{B}_{[\lambda_j]}$ называются эквивалентными (обозначение: $\mathscr{B}_{[\lambda_i]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda_j]}$), если они реализуют одно и то же отображение. В этом случае состояния λ_i и λ_j называются эквивалентными в $\mathscr{B}$. Говорят, что автоматы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ эквивалентны (обозначение: $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$), если для каждого состояния автомата $\mathscr{A}$ найдется эквивалентное состояние в автомате $\mathscr{B}$ и для каждого состояния автомата $\mathscr{B}$ найдется эквивалентное состояние в автомате $\mathscr{A}$. Автомат называется *t-автоматом*, если число его состояний не превосходит t.

Обозначим через $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{a})$ слово, которое появляется на выходе автомата $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ при подаче на его вход слова $\vec{a}$. Если на вход автомата $\mathscr{B}_{[\lambda]}$

подано слово $\vec{a}$ и на его выходе получено слово $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{a})$, то будем говорить, что автомат $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ *испытан словом* $\vec{a}$. Ниже всюду выходные слова автоматов будут обозначаться греческой буквой ξ со стрелкой, а входные — латинскими буквами со стрелкой.

Автоматы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_{[\sigma_i]}$ назовем *белыми* автоматами, если заданы их входной и выходной алфавиты, множества состояний, определены функции переходов и функции выходов. В остальных случаях автоматы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_{[\sigma_i]}$ будем называть *серыми*.

Соглашение о входном алфавите. Условимся, что у всех рассматриваемых ниже автоматов входной и выходной алфавиты те же, что и соответствующие алфавиты у автоматов из базиса Φ.

Теорема 2 [2, с. 169]. *Если $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ — белый приведенный автомат с t состояниями и с неизвестным начальным состоянием, то можно указать слово $\vec{x}(\mathscr{A})$ длины не более $(t-1)^2$, испытав которым автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ можно установить, в каком состоянии оказался автомат.*

Следствие. *Множество $\bigcup_{j=1}^{t} \vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ можно разбить на такие классы $\Delta_1(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})), \ldots, \Delta_t(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, что если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A})) \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, то $\mathscr{A}_{[\sigma_j \vec{x}(\mathscr{A})]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_i]}$.*

Это очевидное следствие теоремы 2.

Теорема 3 [2, с. 46]. *Пусть σ_i и σ_j — произвольные состояния сильно связного t-автомата $\mathscr{A}$. Тогда найдется входное слово $\vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma_j)$ длины меньшей чем t, которое переводит $\mathscr{A}$ из состояния σ_i в состояние σ_j.*

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{A}$ — приведенный сильно связный автомат с t состояниями, а $\mathscr{B}$ — произвольный t-автомат. Если $\mathscr{A}_{[\sigma]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda]}$ при некоторых σ и λ, то $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$.*

Доказательство. Пусть σ_j — произвольное состояние автомата $\mathscr{A}$ и $\vec{a}$ — входное слово такое, что

$$\mathscr{A}_{[\sigma\vec{a}]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_j]}. \tag{1.1}$$

Слово $\vec{a}$ существует, так как $\mathscr{A}$ — сильно связный автомат. Пусть λ' — такое состояние, что

$$\mathscr{B}_{[\lambda\vec{a}]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda']}. \tag{1.2}$$

Из $\mathscr{A}_{[\sigma]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda]}$ следует, что $\mathscr{A}_{[\sigma\vec{a}]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda\vec{a}]}$. Отсюда, из (1.1) и (1.2) получаем $\mathscr{A}_{[\sigma_j]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda']}$. Это означает, что для каждого состояния автомата $\mathscr{A}$ найдется эквивалентное состояние автомата $\mathscr{B}$. По условию теоремы 4 число состояний автомата $\mathscr{B}$ не превышает числа состояний автомата

$\mathscr{A}$. Следовательно, для каждого состояния автомата $\mathscr{B}$ найдется эквивалентное состояние неинициального автомата $\mathscr{A}$. Теорема 4 доказана.

Будем говорить, что слово $\vec{a}$ *остаточно отличает* автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ от автомата $\mathscr{B}_{[\sigma]}$, если выполняется одно из условий:

(i) $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{a}) \neq \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\sigma]}, \vec{a})$;

(ii) если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{a}) = \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\sigma]}, \vec{a})$, то $\mathscr{A}_{[\sigma\vec{a}]} \sim \mathscr{B}_{[\sigma\vec{a}]}$.

Если для автоматов $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ и $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ выполняется условие (ii), то будем говорить, что эти автоматы *$\vec{a}$-эквивалентны.*

Теорема 5 [1]. *Пусть $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ — произвольный приведенный сильно связный автомат с t состояниями. Тогда существует входное слово длины не большей чем $2 \cdot 4^r t^4 \ln(2t)$, остаточно отличающее $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ от любого инициального t-автомата.*

Теорема 6. *Любое слово, остаточно отличающее нетривиальный приведенный сильно связный автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ с t состояниями от любого инициального t-автомата, содержит все символы входного алфавита.*

Доказательство от противного. Предположим, что $\vec{a}$ является словом, остаточно отличающим $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ от любого t-автомата, и символ u входного алфавита не содержится в слове $\vec{a}$. Пусть t-автомат $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ и автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ являются $\vec{a}$-эквивалентными. Обозначим через $f_{\mathscr{B}}(x, y)$ функцию выходов автомата $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{B}'$ — автомат, у которого функция выходов $f_{\mathscr{B}'}(x, y)$ отличается от $f_{\mathscr{B}}(x, y)$ только при значениях аргументов $x = u$, $y = \lambda\vec{a}$, а функции переходов в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ совпадают. Тогда, очевидно, $\mathscr{A}_{[\sigma\vec{a}]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda\vec{a}]}$ и $\mathscr{A}_{[\sigma\vec{a}]} \sim B'_{[\lambda\vec{a}]}$. Отсюда следует, что $\mathscr{B}_{[\lambda\vec{a}]} \sim \mathscr{B}'_{[\lambda\vec{a}]}$. Вместе с тем должно выполняться соотношение $\mathscr{B}_{[\sigma\vec{a}]} \not\sim \mathscr{B}'_{[\sigma\vec{a}]}$, так как если на входы автоматов $B_{[\lambda\vec{a}]}$ и $B'_{[\lambda\vec{a}]}$ подать u, то на их выходах появятся разные значения. Полученное противоречие доказывает теорему 6.

Слово $\vec{x}(\mathscr{A})$. Пусть $\mathscr{A}$ — приведенный сильно связный автомат с t состояниями. Обозначим через $\vec{x}(\mathscr{A})$ такое слово, что, подав его на автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$, находящийся в неизвестном состоянии σ, можно установить, в какое состояние перейдет автомат $\mathscr{A}$. По теореме 2 в качестве такого слова можно взять слово длины не большей $(t-1)^2$.

Слово $\vec{q}(\mathscr{A})$ — это слово длины не большей $2 \cdot 4^r t^4 \ln(2t)$, остаточно отличающее $\mathscr{A}_{[\sigma_1]}$ от любого инициального t-автомата. По теореме 5 такое слово существует.

Слово $\vec{W}(\mathscr{A}, \mathscr{B}_{[\lambda]})$. Пусть $\mathscr{A}$ — приведенный белый сильно связный автомат с t, $t > 1$, состояниями, а $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ — серый t-автомат. Тогда

полагаем

$$\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]}) = \begin{cases} \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A},\sigma_i,\sigma_1) * \vec{q}(\mathscr{A}), \\ \qquad \text{если } \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{x}(\mathscr{A})) \in \Delta_i(\mathscr{A},\vec{x}(\mathscr{A})); \\ \vec{x}(\mathscr{A}), \quad \text{если } \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{x}(\mathscr{A})) \notin \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Delta_j(\mathscr{A},\vec{x}(\mathscr{A})). \end{cases} \tag{1.3}$$

Из определения слова $\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})$ и теорем 2, 3, 5 следует, что найдется такое слово $\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})$, что

$$|\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})| \leqslant 2\cdot 4^r t^4 \ln(2t) + t^2 + t. \tag{1.4}$$

Из определений слов $\vec{x}(\mathscr{A})$ и $\vec{y}(\mathscr{A},\sigma_i,\sigma_1)$ следует, что если слово $\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})$ определяется первой строкой в (1.3) и его подслово $\vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A},\sigma_i,\sigma_1)$ подается на автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$, то этот автомат переходит в состояние σ_1, т. е. выполняется соотношение

$$\mathscr{A}_{[\sigma(\vec{x}(\mathscr{A})*\vec{y}(\mathscr{A},\sigma_i,\sigma_1)))]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_1]}. \tag{1.5}$$

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{A}$ является белым нетривиальным приведенным сильно связным автоматом с t состояниями, а $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ — серым t-автоматом. Испытав $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ словом $\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})$, можно установить, эквивалентны ли автоматы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.*

Доказательство. Обозначим через $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]}))$ слово, состоящее из последних $|\vec{q}(\mathscr{A})|$ символов слова $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]}))$. Очевидно, что выполняется одно из условий:

(a) $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{x}(\mathscr{A})) \notin \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Delta_j(\mathscr{A},\vec{x}(\mathscr{A}))$;

(b) $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{x}(\mathscr{A})) \in \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Delta_j(\mathscr{A},\vec{x}(\mathscr{A}))$
и $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})) \neq \vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma_1]},\vec{q}(\mathscr{A}))$;

(c) $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{x}(\mathscr{A})) \in \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Delta_j(\mathscr{A},\vec{x}(\mathscr{A}))$
и $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}_{[\lambda]},\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})) = \vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma_1]},\vec{q}(\mathscr{A}))$.

Для того чтобы установить, эквивалентны ли автоматы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, достаточно выяснить, какое из условий (a)–(c) выполняется. Покажем это.

1. При условии (a) очевидно, что $\mathscr{A} \not\sim \mathscr{B}$.

2. Пусть выполняется условие (b). Предположим, что найдется такое σ_j, что

$$\mathscr{B}_{[\lambda]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_j]}. \tag{1.6}$$

Из условия (b) и из (1.6) следует, что $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma_j]}, \vec{x}(\mathscr{A})) = \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{x}(\mathscr{A})) \in \bigcup_{j=1}^{t} \Delta_j(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$. Отсюда, из (1.5) и (1.6) получаем $\mathscr{B}_{[\lambda(\vec{x}(\mathscr{A})*vy(\mathscr{A},\sigma_i,\sigma_1))]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_j(\vec{x}(\mathscr{A})*\vec{y}(\mathscr{A},\sigma_i,\sigma_1))]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_1]}$. Следовательно,

$$\vec{\xi}_q(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{W}(\mathscr{A}, \mathscr{B}_{[\lambda]})) = \vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma_1]}, \vec{q}(\mathscr{A})). \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) противоречит условию (b). Поэтому среди состояний автомата $\mathscr{A}$ нет состояния σ_j, при котором выполняется (1.6). Это означает, что если выполняется условие (b), то $\mathscr{A} \not\sim \mathscr{B}$.

3. Пусть выполнено условие (c). Тогда $\mathscr{A}_{[\sigma_1\vec{q}(\mathscr{A})]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda\vec{W}(\mathscr{A},\mathscr{B}_{[\lambda]})]}$, так как слово $\vec{q}(\mathscr{A})$ остаточно отличает автомат $\mathscr{A}_{[\sigma_1]}$ от автомата $\mathscr{B}_{[\lambda(\vec{x}(\mathscr{A})*\vec{y}_i(\mathscr{A}))]}$. Отсюда следует, что найдутся такие состояния σ' и λ' автоматов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, что $\mathscr{A}_{[\sigma']} \sim \mathscr{B}_{[\lambda']}$. По условию теоремы 7 автомат $\mathscr{A}$ является приведенным сильно связным автоматом с t состояниями, а $\mathscr{B}$ является t-автоматом. Для таких двух автоматов справедливо утверждение теоремы 4. Следовательно, при условии (c) имеем $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$. Теорема 7 доказана.

Слово $\vec{U}(\mathscr{A})$. Пусть σ^1, σ^0 — состояния автомата $\mathscr{A}$ и $\widetilde{a}^1$ и $\widetilde{a}^0$ — такие r-разрядные векторы, что

$$\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma^1]}, \widetilde{a}^1) = 1, \quad \vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma^0]}, \widetilde{a}^0) = 0. \tag{1.8}$$

Обозначим через $\vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$ слово, состоящее из $|\vec{x}(\mathscr{A})|$ единиц, а через $\vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$ слово, состоящее из $|\vec{x}(\mathscr{A})|$ нулей. Положим

$$\vec{U}(\mathscr{A}) = \begin{cases} \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0 * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma^*, \sigma^1) * \widetilde{a}^1, \sigma^* = \sigma_j \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0, \\ \qquad \text{если } \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})),\ \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_j(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})); \\[2ex] \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0, \\ \qquad \text{если } \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})) \text{ и } \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \notin \bigcup_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})); \\[2ex] \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_j, \sigma^1) * \widetilde{a}^1, \\ \qquad \text{если } \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_j(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})) \text{ и } \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \notin \bigcup_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})); \\[2ex] \vec{x}(\mathscr{A}), \text{ если } \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \text{ и } \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \text{ не содержатся в } \bigcup_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})). \end{cases} \tag{1.9}$$

Из (1.9) и теорем 2, 3 следует, что в качестве слова $\vec{U}(\mathscr{A})$ можно взять такое слово $\vec{U}(\mathscr{A})$, что

$$|\vec{U}(\mathscr{A})| < t^2 + 2t. \tag{1.10}$$

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{A}$ является нетривиальным приведенным сильно связным t-автоматом, σ — его произвольное состояние и $\vec{U}(\mathscr{A})$ — слово, полученное по формулам (1.9). Тогда в слове $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ содержатся и 0, и 1.*

Доказательство. Рассмотрим варианты (1)–(4), зависящие от того, содержатся ли векторы $\vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$ и $\vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$ в $\bigcup\limits_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$.

(1) Предположим, что $\vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ и $\vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_j(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$. Тогда из (1.9) следует, что $\vec{U}(\mathscr{A}) = \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0 * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma^*, \sigma^1) * \widetilde{a}^1$, где $\sigma^* = \sigma_j \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0$. Возможны следующие три случая:

(1.a) $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ содержит оба элемента из $\{0, 1\}$;

(1.b) $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A})) = \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$;

(1.c) $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A})) = \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$.

В случае (1.a) утверждение теоремы выполняется.

Рассмотрим случай (1.b). Имеем $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A})) = \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ и

$$\mathscr{A}_{[\sigma \vec{x}(\mathscr{A})]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_i]}. \tag{1.11}$$

Пусть $\vec{U}' = \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0$. Покажем, что $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}')$ содержит оба элемента из $\{0, 1\}$. Из (1.11) и определения слова $\vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0)$ следует

$$\mathscr{A}_{[\sigma \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0)]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma^0]}. \tag{1.12}$$

Отсюда и из (1.8) следует, что последний символ в слове $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}')$ равен 0, т. е. слово $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}')$ содержит оба элемента из $\{0, 1\}$. Слово $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ обладает тем же свойством, поскольку в нем содержится подслово $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}')$.

Рассмотрим случай (1.c). Имеем $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A})) = \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_j(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$. Из (1.9) и (1.12) следует, что $\mathscr{A}_{[\vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0 * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma^*, \sigma^1)]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma^1]}$. Отсюда, из (1.8) и (1.9) следует, что последний символ в слове $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ равен 1. Поэтому слово $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ содержит оба элемента из $\{0, 1\}$.

(2) Предположим, что $\vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, $\vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \notin \bigcup\limits_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$. Из (1.9) следует, что $\vec{U}(\mathscr{A}) = \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma^0) * \widetilde{a}^0$, т. е. $\vec{U}' = \vec{U}(\mathscr{A})$. Если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ содержит оба элемента из $\{0, 1\}$, то утверждение теоремы выполняется. Если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A})) = \vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$, то, рассуждая как в предыдущем случае, получаем, что $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}')$ содержит оба элемента из $\{0, 1\}$.

(3) Предположим, что $\vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \notin \bigcup\limits_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, $\vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \in \Delta_j(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$. Согласно (1.9) имеем $\vec{U}(\mathscr{A}) = \vec{x}(\mathscr{A}) * \vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_j, \sigma^1) * \widetilde{a}^1$. Если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ содержит оба элемента из $\{0,1\}$, то утверждение теоремы выполняется. Если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A})) = \vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|}$, то рассуждениями, подобными приведенным выше, получаем $\mathscr{A}_{[\sigma\vec{x}(\mathscr{A})*\vec{y}(\mathscr{A},\sigma_j,\sigma^1)]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma^1]}$. Отсюда и из (1.8) следует, что последний символ в слове $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ равен 1. Поэтому слово $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ содержит оба элемента из $\{0,1\}$.

(4) Если $\vec{1}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \notin \bigcup\limits_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ и $\vec{0}_{|\vec{x}(\mathscr{A})|} \notin \bigcup\limits_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, то это означает, что $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ содержит оба элемента из $\{0,1\}$. Отсюда следует, что в слове $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$ содержатся оба элемента из $\{0,1\}$, так как $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ является подсловом в $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{U}(\mathscr{A}))$. Теорема 8 доказана.

§ 2. Схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$

2.1. Первое преобразование. Опишем подсхемы Q и D схемы R, изображенной на рис. 2.

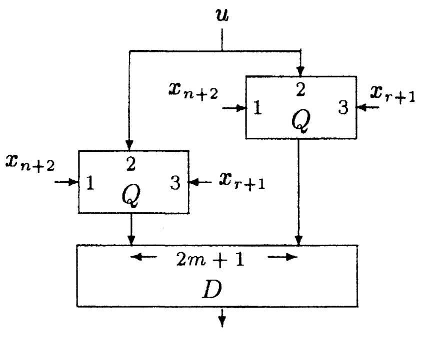

Рис. 2. Схема R

Схема Q. Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются k, v и w, то на ее выходе реализуется функция $\overline{k}v \vee kw$.

Схема D. Эта схема осуществляет отображение

$$(a_1, \ldots, a_{2m+1}) \to b(a_1, \ldots, a_{2m+1}),$$

где

$$b(a_1, \ldots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что если схема D исправна, а в R содержится не более m неисправных схем Q, то R — самокорректирующаяся схема.

Функция $b(a_1, \ldots, a_{2m+1})$ является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно [6, с. 369], что такую функцию можно реализовать схемой в базисе $\{\wedge, \vee, {}^{-}\}$, содержащей не более $c_1 m$ элементов. Отсюда следует, что в произвольном базисе можно построить такую схему R, что

$$L(R) \leqslant c_1 m, \tag{2.1}$$

где c_1 — константа, зависящая лишь от простой части базиса Ф.

Пусть $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$ — узлы схемы A, не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, и пусть к узлам $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$ схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ подключены входные полюсы схемы B. Выполним следующие преобразования. Вход схемы B, подключенный к полюсу w_{i_1}, переключим на выход схемы R, а к полюсу w_{i_1} подключим вход схемы R. Аналогичные переключения выполним для полюсов $w_{i_2}, \dots, w_{i_s}$, каждый раз используя новый экземпляр схемы R. В результате между полюсами $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$ и входными полюсами схемы B появится s одинаковых схем R.

На этом первое преобразование схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ заканчивается. Схему, в которую превратилась схема B после первого преобразования, обозначим через B_1. Схема состоит из схемы B и h схем R. Отсюда и из (2.1) следует, что

$$L(B_1) \leqslant c_2 m r L(B), \tag{2.2}$$

где c_2 — константа, зависящая лишь от простой части базиса Ф.

2.2. Второе преобразование. Это преобразование схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ связано с размещением схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в подсхеме B_1. При этом схема B_1 преобразуется в схему C. Эти преобразования изображены на рис. 3. Пусть φ^i, φ^q — базисные элементы. На рисунке справа приведены фрагменты схемы C, в которые преобразуются соответствующие фрагменты схемы B_1, изображенные слева. При этом во всех фрагментах схемы B_1, указанных в левых частях рис. 3, и схемах, полученных из B_1 после таких преобразований, проводятся аналогичные преобразования до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, изображенные в левых частях. Преобразования проводятся при условии, что базисные элементы φ^i и φ^q, изображенные в левых частях рис. 3, находятся вне схем Q и K.

Схема K. Эта схема имеет три входа и один выход. Если на ее входы с номерами 1, 2, 3 подаются x, y, z, то на выходе схемы K реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

Блоки в схеме C. Обозначим через C схему, полученную после указанных преобразований. Элементы схемы C, находящиеся вне схем K и Q, будем называть *основными блоками* схемы C, а схемы K и Q — *вспомогательными блоками*. Отметим, что все вспомогательные блоки являются тривиальными автоматами.

Выходы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$. Будем считать, что выход каждого блока в C является выходом схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$. Таким образом, схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ имеет выходы, которых нет в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ (на рис. 1 они обозначены через $b_1, \dots, b_p$).

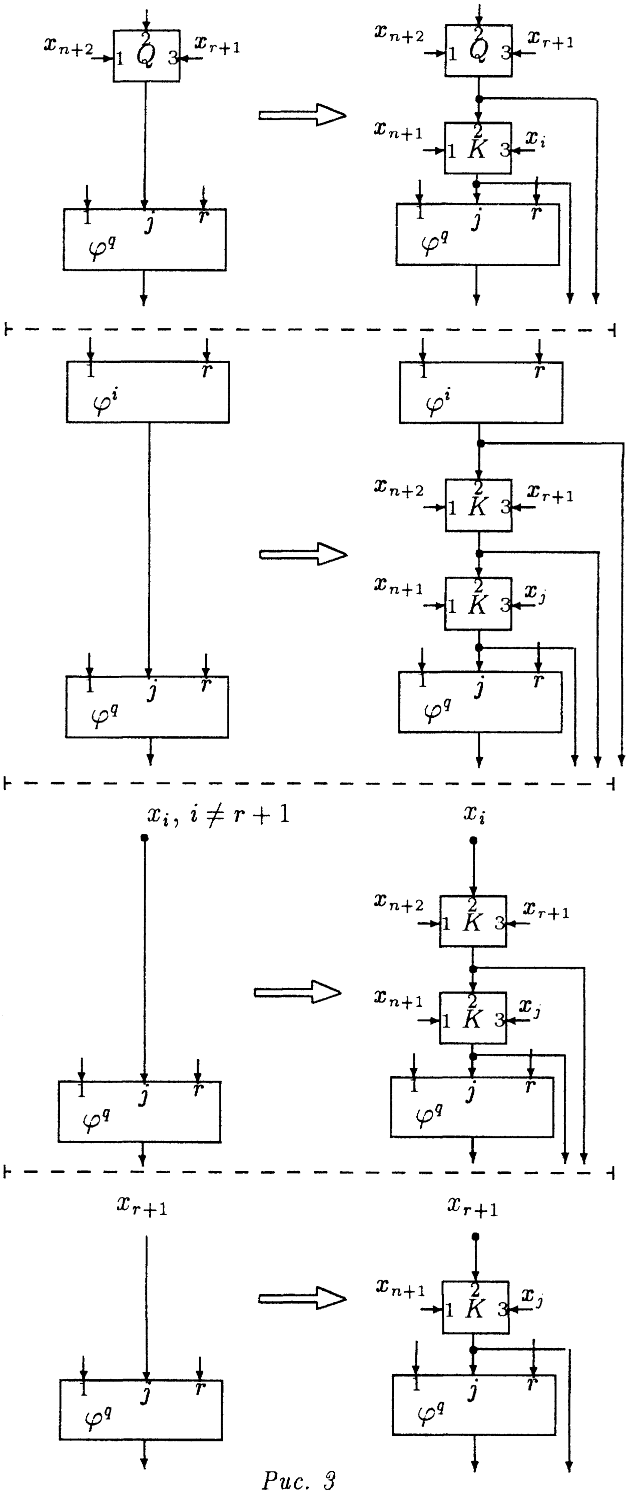

Рис. 3

Поскольку C может быть получена из B_1 добавлением не более $2rL(B_1)$ схем K сложности 4 в базисе $\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$, то из (2.2) следует, что

$$p \leqslant L(C) < c_3 m L(B), \tag{2.3}$$

где c_3 — константа, зависящая лишь от простой части базиса Φ.

2.3. Функции, реализуемые схемой $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$. При построении схемы C все добавляемые к B элементы являются тривиальными автоматами. Если на входы x_{n+1} и x_{n+2} подаются нулевые значения, то все элементы K и Q функционально эквивалентны проводникам, соединяющим их вторые входы с выходами этих элементов. При тех же условиях все схемы R, добавленные при первом преобразовании, тоже эквивалентны проводникам, соединяющим их входы u с их же выходами (см. рис. 2). Если в схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ не использовать дополнительные выходы, то при $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$ схема будет эквивалентна схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Точнее, справедлива

Теорема 9. *Для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{P}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(00)}).$$

§ 3. О контроле работы схемы C^* из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$

3.1. Слово $\vec{Q}(S^*)$. Пусть $\{\mathscr{A}^1, \mathscr{A}^2, \ldots, \mathscr{A}^N\}$ — совокупность основных блоков в схеме C. Если в C происходят допустимые неисправности, то схему C обозначаем через C^*, а совокупность ее основных блоков — через $\{\mathscr{B}^1, \mathscr{B}^2, \ldots, \mathscr{B}^N\}$. То есть блок $\mathscr{A}^j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, в схеме C^* заменяется блоком $\mathscr{B}^j$. Если $\mathscr{A}^j$ — автомат с t состояниями, то B^j должен быть t-автоматом. Будем говорить, что автомат $\mathscr{B}^j$ исправен, если $\mathscr{B}^j \sim A^j$. Если $\mathscr{B}^j \not\sim A^j$, то считаем, что автомат $\mathscr{B}^j$ неисправен. (Если $\mathscr{A}^j$ — тривиальный автомат, то выражение $\mathscr{A}^j \sim \mathscr{B}^j$ означает, что автоматы $\mathscr{A}^j$ и $\mathscr{B}^j$ реализуют одну и ту же булеву функцию.)

Пусть $\vec{b}$ — слово из $(n+2)$-разрядных булевых векторов, и пусть $\vec{b}$ подается на схему $S^* = S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$. Обозначим через $\vec{\xi}(\mathscr{B}^j_{[\lambda]}, S^*, \vec{b})$ слово, которое появляется при этом на выходе блока $\mathscr{B}^j_{[\lambda]}$. Пусть $\widetilde{a}$ является $(n+2)$-разрядным булевым вектором. Вектор $(a_1, \ldots, a_r)$, состоящий из первых r компонент вектора $\widetilde{a}$, обозначим через $\widetilde{a}_{(o)}$. Пусть

$\widetilde{u} = (u_1, \dots, u_r)$ — произвольный r-разрядный булевый вектор. Определим вектор $\widetilde{u}_{\langle e \rangle}$:

$$\widetilde{u}_{\langle e \rangle} = (\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_r}_{r}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-r+2}). \tag{3.1}$$

Пусть $\vec{x}(A)$, $\vec{y}(A, \sigma_i, \sigma_1)$ и $\vec{q}(A)$ — слова, определенные в § 2. Эти слова состоят из r-разрядных булевых векторов.

Слово $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}_{[\lambda]})$.

1. Если $\mathscr{A}^j$ — нетривиальный автомат и $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, S^*, \vec{x}_{\langle e \rangle}(\mathscr{A}^j)) \in \Delta_i(\mathscr{A}^j, \vec{x}(A^j))$, то полагаем

$$\vec{W}(S^*, \mathscr{B}_{[\lambda]}) = \vec{x}_{\langle e \rangle}(\mathscr{A}^j) * \vec{y}_{\langle e \rangle}(\mathscr{A}^j, \sigma_i, \sigma_1) * \vec{q}_{\langle e \rangle}(\mathscr{A}^j)).$$

2. Если $\mathscr{A}^j$ — тривиальный автомат или $\mathscr{A}^j$ — нетривиальный автомат и $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, S^*, \vec{x}_{\langle e \rangle}(\mathscr{A}^j)) \notin \bigcup\limits_{s=1}^{t} \Delta_s(\mathscr{A}^j, \vec{x}(\mathscr{A}^j))$, то полагаем

$$\vec{W}(S^*, \mathscr{B}_{[\lambda]}) = \vec{x}_{\langle e \rangle}(\mathscr{A}^j).$$

Слово $\vec{W}^j(S^*)$ определим так:

$$\vec{W}^j(S^*) = \vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\gamma^1]})1 * \vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\gamma^1]})2 * \dots * \vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\gamma^1]})j,$$

где $\mathscr{B}_{[\gamma^i]} = \mathscr{B}_{[\lambda^i \vec{W}^{i-1}_{\langle o \rangle}(S^*)]}$, $2 \leqslant i \leqslant j$. Положим

$$\vec{W}(S^*) = \vec{W}^N(S^*).$$

Из определения слова $\vec{W}(S^*)$ и оценки (1.4) получаем

$$|\vec{W}(S^*)| < R_B(2 \cdot 4^r k^4 \ln(2k) + k^2 + k). \tag{3.2}$$

Таблица D^i_{sd}

1	u_1^{i1}	u_1^{i2}	$\dots$	$u_1^{is_i}$
2	u_2^{i1}	u_2^{i2}	$\dots$	$u_2^{is_i}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
r	u_r^{i1}	u_r^{i2}	$\dots$	$u_r^{is_i}$
$r+1$	c	c	$\dots$	c
$r+2$	1	1	$\dots$	1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	1	1	$\dots$	1
$n+1$	1	1	$\dots$	1
$n+2$	d	d	$\dots$	d

Пусть $s_0 = 2^r$. Обозначим через $\vec{u}^{01}, \vec{u}^{02} \dots \vec{u}^{0s_0}$ слово длины s_0, образованное всеми r-разрядными булевыми векторами, взятыми в произвольном порядке. Пусть $\Phi' = \{\varphi^1, \dots, \varphi^{g'}\}$ — множество, состоящее из всех нетривиальных автоматов базиса Φ. Пусть $\vec{U}(\varphi^i) = \vec{u}^{i1}, \dots, \vec{u}^{is_i}$ — слово, определенное формулами (1.9), в которых символ $\mathscr{A}$ заменен на выражение φ^i. Используя векторы $(u_1^{ij}, \dots, u_r^{ij})$, $1 \leqslant j \leqslant s_i$, как части столбцов, образуем таблицу D^i_{cd}. Эта таблица определяет слово $\vec{D}^i_{cd}$, образованное ее $(n+2)$-разрядными вектор-столбцами, записанными подряд, начиная с первого. Придавая параметрам c и d значения 0 и 1, образуем слова $\vec{D}^i$ и $\vec{D}$:

$$\vec{D}^i = \vec{D}^i_{00} * \vec{D}^i_{01} * \vec{D}^i_{10} * \vec{D}^i_{11}, \quad \vec{D} = \vec{D}^0 * \vec{D}^1 * \dots * \vec{D}^{g'}.$$

Отсюда и из (1.10) получаем

$$|\vec{D}| < 4g'(k^2 + 2k) + 2^{r+2}. \tag{3.3}$$

Слово $\vec{E}$. Рассмотрим $(n+2)$-разрядный вектор

$$\widetilde{E}_{cdef} = (\overbrace{\underbrace{c\,c\dots c}_{r}\,d\,c\,c\dots c}^{n}\;e\,f\,).$$

Придавая параметрам c, d, e и f значения 0 и 1, получим 16 различных булевых векторов. Произвольно упорядочив их, образуем слово $\vec{E}$. Имеем

$$|\vec{E}| = 16. \tag{3.4}$$

Слово $\vec{Q}(S^*)$. Положим

$$\vec{Q}(S^*) = \vec{W}(S^*) * \vec{D} * \vec{E}. \tag{3.5}$$

Из (3.2)–(3.5) с учетом неравенств $k \geqslant 2$, $r \geqslant 2$ $R_B \geqslant g'$ имеем

$$|\vec{Q}(S^*)| < R_B(2{\cdot}4^r k^4 \ln(2k) + k^2 + k) + 4g'(k^2+k) + 2^{r+2} + 16 < R_B 4^{r+1} k^4 \ln k.$$

Отсюда следует, что

$$|\vec{Q}(S^*)| < R_B 4^{r+1} k^4 \ln k. \tag{3.6}$$

3.2. О контроле работы основных блоков в C^*. Фрагмент схемы C^*, содержащий основной блок — автомат $\mathscr{B}^j$ (здесь j — номер элемента схемы), изображен на рис. 4.

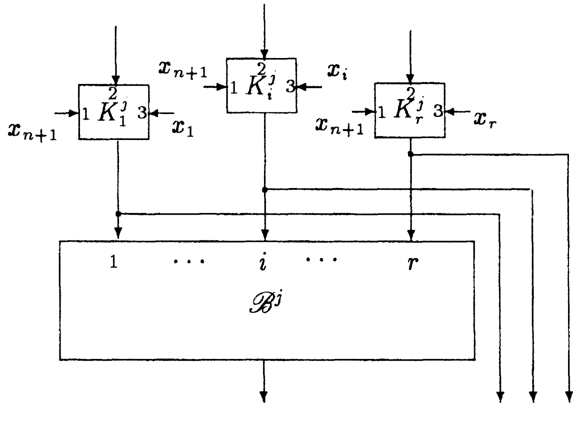

Рис. 4

Окрестность блока $\mathscr{B}^j$. Блок $\mathscr{B}^j$ и r блоков K назовем *окрестностью* блока $\mathscr{B}^j$ и обозначим через $O(\mathscr{B}^j)$.

Теорема 10. *Испытав схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ словом $\vec{Q}(S^*)$, при любом $j \in \{1, \dots, N\}$ можно установить, какое из из следующих утверждений справедливо:*

(1) $\mathscr{B}^j \sim \mathscr{A}^j$;

(2) *в* $O(\mathscr{B}^j)$ *найдется неисправный блок.*

Доказательство. Рассмотрим варианты (a) и (b).

(a) $\mathscr{A}^j$ — тривиальный автомат, реализующий функцию $f^j(a_1, ..., a_r)$. На схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подается слово $\vec{Q}(S^*)$.

(b) $\mathscr{A}^j$ — нетривиальный автомат. На схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подается слово $\vec{Q}(S^*)$.

Рассмотрим случаи, связанные с вариантами (a) и (b).

(a.1)$^\diamond$ Выполняется (a). При поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подслова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\lambda^1]})$ из $\vec{Q}(S^*)$ на блок $\mathscr{B}^j$ поступают все r-разрядные булевы векторы.

(a.1.a)$^\diamond$ Выполняется (a.1). При поступлении любого булева вектора $(a_1, \dots, a_r)$ на блок $\mathscr{B}^j$ на его выходе реализуется $f^j(a_1, \dots, a_r)$.

(a.1.b)$^\diamond$ Выполняется (a.1). При поступлении некоторого булева вектора $(a_1, \dots, a_r)$ на блок $\mathscr{B}^j$ на его выходе реализуется $\overline{f}^j(a_1, \dots, a_r)$.

(a.2)$^\diamond$ Выполняется (a). При подаче на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подслова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda_j]})$ из $\vec{Q}(S^*)$ на блок $\mathscr{B}^j_{[\lambda_j]}$ поступают не все r-разрядные булевы векторы.

(b.1)$^\diamond$ Выполняется (b). При поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подслова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$ из $\vec{Q}(S^*)$ на $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ поступает слово $\vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$. Найдется такое состояние σ_i автомата $\mathscr{A}^j$, что

$$\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma_i]}, \vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})) = \vec{\xi}(\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}, \vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})). \tag{3.7}$$

(b.2)$^\diamond$ Выполняется (b). При поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подслова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$ из $\vec{Q}(S^*)$ на $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ поступает слово $\vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$. При любом состоянии σ_i автомата $\mathscr{A}^j$ справедливо неравенство

$$\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma_i]}, \vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})) \neq \vec{\xi}(\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}, \vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})). \tag{3.8}$$

(b.3)$^\diamond$ Выполняется (b). При поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подслова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$ из $\vec{Q}(S^*)$ на $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ поступает слово, отличное от слова $\vec{W}_{\langle o\rangle}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$.

В случае (a.1.a)$^\diamond$ блок $\mathscr{B}^j$ из C^* реализует ту же булеву функцию, что и блок $\mathscr{A}^j$ из C. Следовательно, блок $\mathscr{B}^j$ исправен.

В случае (a.1.b)° блоки $\mathscr{B}^j$ и $\mathscr{A}^j$ реализуют разные булевы функции, что означает, что $\mathscr{B}^j$ — неисправный блок.

Рассмотрим случай (a.2)°. Если все блоки K_i^j из $O(\mathscr{B}^j)$ являются исправными, то при поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ слова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\lambda^1]})$ на входы блока $\mathscr{B}^j$ должно поступить слово, содержащее подслово $q(\mathscr{A}^1)$, остаточно отличающее нетривиальный автомат $\mathscr{A}^1$ от любого t-автомата. По теореме 6 в таком слове должны содержаться все r-разрядные булевы векторы. В рассматриваемом случае на входы $\mathscr{B}^j$ поступило не такое слово. Пусть $\widetilde{c} = (c_1 \dots, c_{n+2})$ — такой вектор из $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\lambda^1]})$, что при поступлении $\widetilde{c}$ на схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на входе автомата $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ появляется вектор $(b_1, \dots, b_r)$, отличный от $(c_1, \dots, c_r)$. Пусть $b_i \neq c_i$ при некотором i. Рассмотрим работу блока K_i^j при поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ слова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$. В этих условиях на первый вход блока K_i^j поступает единичное значение. При правильной работе блока K_i^j на его выходе должны появляться значения x_i, т. е. значения i-х компонент векторов из $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^1_{[\lambda^1]})$. Нарушение равенства $b_i = c_i$ означает, что блок K_i^j неисправен.

В случае (b.1)° на автомат $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ поступает слово $\vec{W}_{(o)}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}) = \vec{W}(\mathscr{A}^j, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$. Для автоматов $\mathscr{A}^j$ и $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ условия теоремы 7 выполнены. Следовательно, испытав автомат $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ словом $\vec{W}(\mathscr{A}^j, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$, можно установить, эквивалентны ли автоматы $\mathscr{A}^j$ и $\mathscr{B}^j$. Отсюда и из равенства (3.7) следует, что $\mathscr{A}^j \sim \mathscr{B}^j$.

В случае (b.2)°, как и в случае (b.1)°, испытанием автомата $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ словом $\vec{W}(\mathscr{A}^j, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$ можно установить, эквивалентны ли автоматы $\mathscr{A}^j$ и $\mathscr{B}^j$. Отсюда и из неравенства (3.8) следует, что $\mathscr{A}^j \not\sim \mathscr{B}^j$.

Рассмотрим случай (b.3)°. Обозначим через $(c_1 \dots, c_{n+2})$ вектор из слова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$, при поступлении которого на схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на входе автомата $\mathscr{B}^j_{[\lambda^j]}$ появляется вектор $(b_1, \dots, b_r)$, отличный от $(c_1, \dots, c_r)$. Пусть $b_i \neq c_i$ при некотором i. Рассмотрим работу блока K_i^j при поступлении на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ слова $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$. В этих условиях на первый вход блока K_i^j поступает единичное значение. При правильной работе блока K_i^j на выходе этого блока должны появляться те значения, которые поступают на полюс x_i схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$, т. е. значения i-х компонент векторов из $\vec{W}(S^*, \mathscr{B}^j_{[\lambda^j]})$. Нарушение равенства $b_i = c_i$ означает, что блок K_i^j неисправен.

Пусть U — совокупность условий, формулировки которых в доказательстве теоремы 10 отмечены метками со значком $\diamond$ (например, так:

(a.1.a)°). Нетрудно убедиться, что

— условия из U являются взаимно исключающими (т. е. в C^* нет такого блока $\mathscr{B}^j$, который удовлетворял бы двум условиям из U);

— для любого $\mathscr{B}^j$ из C^* в U найдется условие, которому удовлетворяет $\mathscr{B}^j$.

Отсюда следует, что для любого $\mathscr{B}^j$ из C^* можно установить, какое из двух утверждений теоремы 10 справедливо, если использовать следующее правило.

Правило R1. Пусть β является основным блоком в C^* и схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ испытана словом $\vec{Q}(S^*)$. Тогда

— если выполняется условие (a.1.a)° или условие (b.1)°, то блок β исправен;

— если выполняется какое-нибудь из условий (a.1.b)°, (a.2)°, (b.2)° или (b.3)°, то в $O(\beta)$ имеется неисправный блок.

Теорема 10 доказана.

3.3. О контроле работы вспомогательных блоков в C^*. Схемы 1–5 на рис. 5 являются фрагментами схемы C. Здесь входы блоков K^* подключены всеми способами, которыми они могут быть подключены к узлам схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ по правилам, определенным в § 2 (см. рис. 3).

Окрестность блока K^*. Пусть K^* — произвольный блок типа K из C^*. Окрестность блока K^* — это некоторое множество блоков, тесно связанных с K^* в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$. Окрестность обозначается через $O(K^*)$ и определяется так:

$$O(K^*) = \begin{cases} \{K^*, \mathscr{B}^j, K_1^j,\ K_2^j, \dots, K_r^j\}, & \text{если } K^* \text{ принадлежит схеме 1;} \\ \{K^*, K'\}, & \text{если } K^* \text{ принадлежит схеме 2;} \\ \{K^*, Q\}, & \text{если } K^* \text{ принадлежит схеме 3;} \\ \{K^*\}, & \text{если } K^* \text{ принадлежит схеме 4 или 5.} \end{cases} \tag{3.9}$$

α-связка в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$. Пусть K^* является частью схемы 1 и автомат $\mathscr{A}^j$ в C, соответствующий автомату $\mathscr{B}^j$ в C^*, реализует константу α, $\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда будем говорить, что блоки $\mathscr{B}^j$ и K^* входят в *α-связку* в схеме C^*.

α-правильный блок K^* в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$. Пусть K^* — произвольный блок типа K в C^*. Блок K^* называется *α-правильным* , если K^* входит в α-связку и при поступлении на входы блока K^* вектора (c, α, d), где c, d — произвольные константы из $\{0, 1\}$, на его выходе реализуется функция $\bar{c}\alpha \vee cd$.

Замечание. Работа α-правильного блока K^* может отличаться от работы исправного блока K^* лишь на входных наборах вида $(c, \overline{\alpha}, d)$.

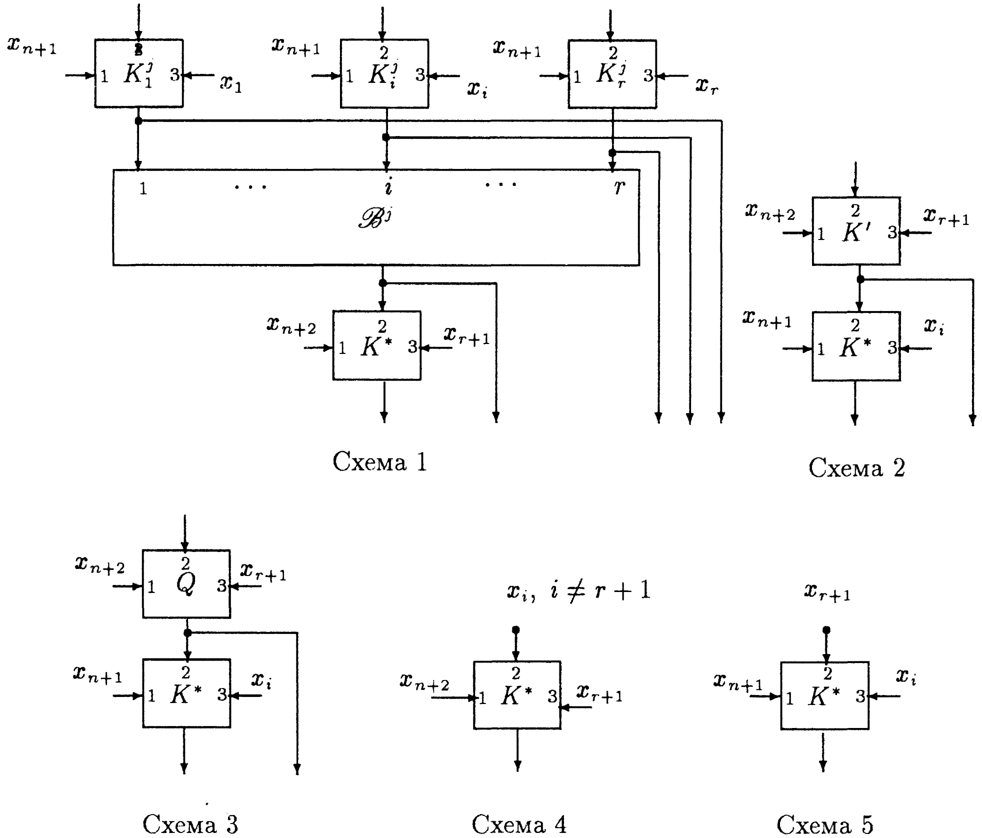

Рис. 5

Теорема 11. *Пусть K^* — блок типа K в схеме C^*. Испытав схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ словом $\vec{Q}(S^*)$, можно выяснить, какое из следующих утверждений справедливо:*

(1) *K^* является исправным блоком;*

(2) *K^* является α-правильным блоком;*

(3) *в $O(K^*)$ найдется неисправный блок.*

Доказательство. Пусть на схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подается слово $\vec{Q}(S^*)$. Возможны варианты (i), (j) и (k).

(i) K^* принадлежит схеме 1, и автомат $\mathscr{A}^j$, соответствующий в схеме C автомату $\mathscr{B}^j$ из C^*, эквивалентен автомату φ^t из базиса Φ. На схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ поступает подслово $\vec{D}$ из $\vec{Q}(S^*)$.

(j) Блок K^* принадлежит схеме 2 или схеме 3, и на схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подается слово $\vec{E}$.

(k) K^* принадлежит схеме 4 или схеме 5, и на схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ подается слово $\vec{E}$.

Рассмотрим возможные случаи, связанные с вариантами (i)–(k).

(i.1)° Выполняется условие (i), и при поступлении на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ слова $\vec{D}$ на входы схемы $\mathscr{B}^j$ поступает слово, отличное от слова $\vec{D}_{\langle o\rangle}$.

(i.2) Выполняется условие (i), и при поступлении на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ слова $\vec{D}$ на входы схемы $\mathscr{B}^j$ поступает слово $\vec{D}_{\langle o\rangle}$. При этом выполняется одно из условий:

φ^t — нетривиальный автомат; при поступлении на $\mathscr{B}^j$ каждого слова из $\{(\vec{D}^t_{00})_{\langle o\rangle},\ (\vec{D}^t_{01})_{\langle o\rangle},\ (\vec{D}^t_{10})_{\langle o\rangle},\ (\vec{D}^t_{11})_{\langle o\rangle}\}$ на выходе блока $\mathscr{B}^j$ появляются и 0, и 1;

φ^t — отличный от константы тривиальный автомат; при поступлении на $\mathscr{B}^j$ каждого слова из $\{(\vec{D}^0_{00})_{\langle o\rangle},\ (\vec{D}^0_{01})_{\langle o\rangle},\ (\vec{D}^0_{10})_{\langle o\rangle},\ (\vec{D}^t_{11})_{\langle o\rangle}\}$ на выходе блока $\mathscr{B}^j$ появляются и 0, и 1;

φ^t — автомат, реализующий константу α; при поступлении на $\mathscr{B}^j$ любого вектора $\widetilde{a}$ из $\vec{D}_{\langle o\rangle}$ на выходе блока $\mathscr{B}^j$ реализуется значение α.

(i.2.a)° Выполняется условие (i.2), и слово $\vec{D}$ поступает на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$. При этом выполняется одно из условий:

φ^t — отличный от константы автомат; когда на входы блока K^* поступают некоторые значения u, v, w, на выходе блока K^* появляется значение $\overline{u}v \vee uw$;

φ^t — автомат, эквивалентный константе α; когда на входы блока K^* поступают некоторые значения u, α, w, на выходе блока K^* появляется значение $\overline{u}\alpha \vee uw$.

(i.2.b)° Выполняется условие (i.2), и в $\vec{D}$ найдется такой вектор $\widetilde{a}$, что выполняется одно из условий:

φ^t — отличный от константы автомат; на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ поступает вектор $\widetilde{a}$, и при этом на входы блока K^* поступают некоторые значения u, v, w, а на выходе блока K^* появляется значение, отличное от $\overline{u}v \vee uw$;

φ^t — автомат, эквивалентный константе α; если на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ поступает вектор $\widetilde{a}$, то на первый и третий входы блока K^* поступают некоторые значения u и w, на второй вход поступает значение α и на выходе блока K^* появляется значение, отличное от $\overline{u}\alpha \vee uw$.

(i.3)° Выполняется условие (i), и при поступлении на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ слова $\vec{D}$ на входы схемы $\mathscr{B}^j$ поступает слово $\vec{D}_{\langle o\rangle}$.

При этом выполняется одно из условий:

φ^t — нетривиальный автомат; при поступлении на $\mathscr{B}^j$ некоторого слова из $\{(\vec{D}^t_{00})_{\langle o\rangle}, (\vec{D}^t_{01})_{\langle o\rangle}, (\vec{D}^t_{10})_{\langle o\rangle}, (\vec{D}^t_{11})_{\langle o\rangle}\}$ на выходе блока $\mathscr{B}^j$ появляется лишь одно значение из $\{0,1\}$.

φ^t — отличный от константы тривиальный автомат; при поступлении на $\mathscr{B}^j$ некоторого слова из $\{(\vec{D}^0_{00})_{\langle o\rangle}, (\vec{D}^0_{01})_{\langle o\rangle}, (\vec{D}^0_{10})_{\langle o\rangle}, (\vec{D}^t_{11})_{\langle o\rangle}\}$ на выходе блока $\mathscr{B}^j$ появляется лишь одно значение из $\{0,1\}$;

φ^t — автомат, реализующий константу α; при поступлении на $\mathscr{B}^j$ некоторого вектора $\widetilde{a}$ из $\vec{D}_{\langle o\rangle}$ на выходе блока $\mathscr{B}^j$ появляется значение $\overline{\alpha}$.

(j.1)° Выполняется условие (j), и найдется такая тройка значений параметров c, d, e, что при поступлении вектора $\widetilde{E}_{cde1}$ на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на второй вход блока K^* поступает значение, отличное от d.

(j.2) Выполняется условие (j), и при любой комбинации значений параметров c, d и e при поступлении вектора $\widetilde{E}_{cde1}$ на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на второй вход блока K^* поступает значение, равное d.

(j.2.a)° Выполняется условие (j.2), и для каждого вектора $\widetilde{a}$ из $\vec{E}$ и любых k, v и w выполняется условие: если при подаче вектора $\widetilde{a}$ на схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на первый, второй и третий входы блока K^* поступают значения k, v и w, то на выходе блока K^* реализуется функция $\overline{k}v \vee kw$.

(j.2.b)° Выполняется условие (j.2), и для некоторого вектора $\widetilde{a}$ из $\vec{E}$ выполняется условие: при поступлении вектора $\widetilde{a}$ на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на первый, второй и третий входы блока K^* поступают соответственно значения k, v и w, а на выходе блока K^* появляется значение, отличное от $\overline{k}v \vee kw$.

(k.a)° Выполняется условие (k), и для каждого вектора $\widetilde{a}$ из $\vec{E}$ и любой тройки чисел k, v и w выполняется условие: если при поступлении вектора $\widetilde{a}$ на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на первый, второй и третий входы блока K^* поступают значения k, v и w, то на выходе блока K^* появляется значение $\overline{k}v \vee kw$.

(k.b)° Выполняется условие (k), и для некоторого вектора $\widetilde{a}$ из $\vec{E}$ выполняется условие: при поступлении вектора $\widetilde{a}$ на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на первый, второй и третий входы блока K^* поступают соответственно значения k, v и w, а на выходе блока K^* появляется значение, отличное от $\overline{k}v \vee kw$.

В случае (i.1)$^\diamond$, очевидно, неисправен по крайней мере один блок из множества $\{K_1^j, \dots, K_r^j\}$, где $\{K_1^j, \dots, K_r^j\} \subset O(K^*)$.

В случае (i.2.a)$^\diamond$, если K^* не принадлежит никакой α-связке, то он исправен, а если K^* принадлежит α-связке, то он является α-правильным.

В случае (i.3)$^\diamond$ как следствие теоремы 8 получаем, что неисправен блок $\mathscr{B}^j$ из $O(K^*)$.

В случае (j.1)$^\diamond$, очевидно, если K^* принадлежит схеме 2, то неисправен блок K', $K' \in O(K^*)$, а если K^* принадлежит схеме 3, то неисправен блок Q, $Q \in O(K^*)$.

В случае (j.2.a)$^\diamond$ при поступлении слова $\vec{E}$ на $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ на входы блока K^* поступают всевозможные тройки значений аргументов k, v и w, а блок K^* правильно реализует функцию $\overline{k}v \vee kw$. Это означает, что блок K^* исправен.

В случае (j.2.b)$^\diamond$ блок K^*, очевидно, неисправен.

В случаях (k.a)$^\diamond$ и (k.b)$^\diamond$ на входы блока K^* поступают 8 всевозможных комбинаций входных значений. По реакции, наблюдаемой на выходе блока K^*, можно сделать вывод о его работе. Очевидно, что в случае (k.a)$^\diamond$ блок K^* исправен, а в случае (k.b)$^\diamond$ блок K^* неисправен.

Итак, испытав схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ словом $\vec{Q}(S^*)$, для любого блока K^* из C^* во всех рассмотренных случаях удалось установить, какое из утверждений теоремы 11 справедливо.

Пусть W — совокупность условий, формулировки которых в доказательстве теоремы 11 отмечены метками со значком $\diamond$ (например, так: (i.2.a)$^\diamond$). Нетрудно убедиться, что

— условия из W являются взаимно исключающими (т. е. в C^* нет блока K^*, относительно которого выполнялись бы два условия из W);

— для любого K^* из C^* в W найдется условие, выполняющееся относительно K^*.

Отсюда следует, что можно установить, какое из двух утверждений теоремы 11 справедливо, если использовать следующее правило.

Правило R2. Пусть K^* — блок в схеме C^* и схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ испытана словом $\vec{Q}(S^*)$. Тогда

— если выполняется условие (j.2.a)$^\diamond$ или (k.a)$^\diamond$, то блок K^* исправен;

— если блок K^* не входит ни в какую α-связку и для него выполняется условие (i.2.a)$^\diamond$, то блок K^* исправен;

— если блок K^* входит в α-связку и для него выполняется условие (i.2.a)$^\diamond$, то блок K^* является α-правильным;

— если выполняется какое-либо из условий (i.1)$^\diamond$, (i.2.b)$^\diamond$, (i.3)$^\diamond$, (j.1)$^\diamond$, (j.2.b)$^\diamond$, (k.b)$^\diamond$, то в $O(K^*)$ найдется неисправный блок.

Теорема 11 доказана.

3.4. Множества D_i. Классы $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$. Обозначим через $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ множество блоков из C^*, не являющихся блоками Q. Положим $D_i = O(\beta_i)$, где $O(\beta_i)$ — окрестность блока β_i. Разобьем множество $\{D_1, \ldots, D_s\}$ на два класса $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$ согласно следующим правилам.

1. Пусть β_i — основной блок и при испытании схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ словом $\vec{Q}(S^*)$ установлено, что выполняется условие (b.1)$^\circ$ или (a.1.a)$^\circ$. Тогда полагаем $O(\beta_i) \in D(2, C^*)$. Если для блока β_i выполняется одно из условий (a.1.b)$^\circ$, (a.2)$^\circ$, (b.2)$^\circ$ или (b.3)$^\circ$, то полагаем $O(\beta_i) \in D(1, C^*)$.

2. Если β_i — блок K^* и при испытании схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ словом $\vec{Q}(S^*)$ установлено, что выполняется одно из условий (i.2.a)$^\circ$, (j.2.a)$^\circ$ или (k.a)$^\circ$, то полагаем $O(\beta_i) \in D(2, C^*)$. Если для K^* выполняется одно из условий (i.1)$^\circ$, (i.2.b)$^\circ$, (i.3)$^\circ$, (j.1)$^\circ$, (j.2.b)$^\circ$ или (k.b)$^\circ$, то полагаем $O(\beta_i) \in D(1, C^*)$.

Теорема 12. *Если множество $D(1, C^*)$ непусто, то любая часть D_i из $D(1, C^*)$ содержит неисправный элемент из C^*. Если множество $D(1, C^*)$ пусто, то для произвольных состояний $\sigma(A^*)$ и $\sigma(B)$ подсхем A^* и B схемы $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C^*)$ схемы C^*, что для любой последовательности $\vec{P}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(00)}).$$

Доказательство. Если $D_i \in D(1, C^*)$, то по правилам R1 и R2, доказанным в теоремах 10 и 11, в D_i имеется неисправный элемент (D_i есть окрестность некоторого блока из C^*, не являющегося блоком Q).

Предположим, что множество $D(1, C^*)$ пусто. Тогда по правилам R1 и R2 получаем, что в схеме C^*

— все основные блоки $\mathscr{B}^j$ исправны (эквивалентны блокам $\mathscr{A}^j$);

— при любом $\alpha \in \{0, 1\}$ все блоки типа K, входящие в α-связки, являются α-правильными;

— блоки типа K, не входящие в α-связки, исправны;

— среди блоков типа Q имеется не более m неисправных.

Из определения блоков K и Q следует, что если $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$, а переменные $x_1, \ldots, x_n$ принимают произвольные значения, то в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+2})$ блоки K и Q работают как проводники, соединяющие вторые входы блоков с выходами тех же блоков. При условиях теоремы 12 в схеме C^* любой блок K^*, не входящий в α-связку, исправен, а входящие в α-связки блоки K являются α-правильными. Так как схеме C^* исправны все основные блоки, то исправны и блоки, реализующие константы.

Пусть $\mathscr{B}$ — основной блок, входящий в α-связку с блоком K^*. Блок $\mathscr{B}$ исправен и реализует константу α, а блок K^* является α-правильным. Поэтому если $x_{n+2} = 0$ и остальные аргументы принимают произвольные значения, то на выходе блока K^* реализуется константа α. Это следует из того, что любой α-правильный блок K^* реализует значение $\overline{x}\alpha \vee xz$, если на его входы поступает вектор (x, α, z). Следовательно, при $x_{n+2} = 0$ можно считать, что блок K^* работает как проводник, соединяющий его второй вход с выходом блока K^*.

Таким образом, при условиях теоремы 12 при $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$ в схеме C^* *все блоки* K^* работают как проводники, соединяющие их вторые входы с выходами этих блоков. Так же работают и блоки Q, кроме, быть может, нескольких неисправных, причем число последних не превышает m. Если заменить все блоки K в C^* на проводники, то C^* превратится в схему B_1, полученную из схемы B первым преобразованием (см. § 2). В схеме B_1 правильно работающие схемы D корректируют работу неисправных блоков Q. Поэтому если каждый нетривиальный блок β из C^* привести в то состояние, в котором находится соответствующий ему элемент в B, то при $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$ вся схема C^* будет работать как исправная схема B. Отсюда следует второе утверждение теоремы 12.

Заключение

Убедимся, что определенная в § 2 схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+2})$ обладает свойствами, перечисленными в утверждении теоремы 1.

1. Пусть $\vec{Q} = \vec{Q}(S^*)$, где $\vec{Q}(S^*)$ — слово, определенное в § 3. Из (3.6) имеем $|\vec{Q}(S^*)| < R_B 4^{r+1} k^4 \ln k$.

2. Утверждение (a) теоремы 1 следует из теоремы 9.

3. Из (2.3) следует, что $p \leqslant L(C) < c_3 L(B)$. Пусть $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_s$ — окрестности всех основных блоков и блоков K из схемы C, и пусть $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$ — классы, определенные в п. 3.4 из § 3. Так как число блоков в C не превышает $L(C)$, то из (2.3) следует, что $s < c_3 m L(B)$. Пользуясь (3.9) и определением окрестности из пп. 3.2 и 3.3 в § 3, получаем, что $L(D_i) \leqslant r + 2$ при любом $i \in \{1 \ldots s\}$. Следовательно, справедливо утверждение (b) теоремы 1.

4. Классы $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$, определенные в п. 3.4 из § 3, обладают всеми свойствами, о которых говорится в утверждении (c) теоремы 1. Это следует из теоремы 12 и правил R1 и R2, сформулированных в доказательствах теорем 10 и 11.

Таким образом, все утверждения теоремы 1 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Василевский М. П.** О распознавании неисправности автоматов // Кибернетика. 1973. № 4. С. 98–108.
2. **Гилл А.** Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
3. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 1. С. 44–64.
4. **Носков В. Н.** О преобразованиях, повышающих надежность частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 3. С. 10–41.
5. **Носков В. Н.** О диагностических и установочных задачах для схем из ненадежных автоматов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 45–71.
6. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: noskov@math.nsc.ru

Статья поступила
11 апреля 2001 г.