ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2001. Серия 1. Том 8, № 3, 73–80

УДК 519.176

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ВЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАФОВ В ГРАФЫ ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА, ОБЛАДАЮЩИЕ СВОЙСТВОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕТРИКИ*)

В. А. Ташкинов

Доказывается, что произвольный обыкновенный граф G можно вложить как порожденный подграф в граф H заданного диаметра $d(H) = d \geqslant 2$, в котором любые две вершины лежат на некоторой диаметральной цепи. При этом если диаметр $d(G)$ графа G не превосходит d, то вложение может быть осуществлено изометрически, т. е. с сохранением расстояний между вершинами в G.

Введение

Рассматриваются обыкновенные графы, т. е. конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и ребер графа G соответственно. Через $n(G) = |V(G)|$ обозначается число вершин графа G. Две вершины, соединенные ребром, называются *смежными*, а ребро, соединяющее данную вершину с какой-либо другой вершиной, называется *инцидентным* данной вершине. Вершина называется *изолированной*, если ей не инцидентно никакое ребро. Граф, в котором любые две различные вершины смежны, называется *полным*. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n. Граф P_n с n вершинами $a = v_1, v_2 \ldots, v_{n-1}, v_n = b$ и $n-1$ ребрами называется (простой) *цепью* длины $n-1$, соединяющей вершины a и b, если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, вершины v_i и v_{i+1} смежны. Граф C_n с $n \geqslant 3$ вершинами $v_1, v_2 \ldots, v_n$ и n ребрами называется (простым) *циклом* длины n, если смежны вершины v_1 и v_n, а также вершины v_i и v_{i+1} при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. В дальнейшем слова «простая» перед «цепь» или «простой» перед «цикл» будут опускаться. Граф H называется *частью* графа G (обозначается через $H \subseteq G$), если $V(H) \subseteq V(G)$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 97–1001) и голландско-российской программы NWO (проект 047–008–006).

и $E(H) \subseteq E(G)$. Часть H графа G называется *порожденным подграфом*, если в графе H смежны любые две вершины $x, y \in V(H)$, смежные в графе G. В этом случае соотношение $H \subseteq G$ между графами G и H называется *вложением* графа H в граф G.

Цепь минимальной длины, соединяющая две вершины $x, y \in V(G)$ графа G, называется *кратчайшей* цепью между x и y, а ее длина называется расстоянием между вершинами x и y в графе G, которое обозначается через $\rho_G(x, y)$. Если в графе G не существует цепи между вершинами x и y, то будем считать, что расстояние между этими вершинами не определено. Если в графе G между любыми двумя вершинами имеется цепь, то граф G называется *связным*. *Диаметром* связного графа G называется величина

$$d(G) = \max_{x,y \in V(G)} \rho_G(x, y).$$

Кратчайшая цепь в графе G длины $d(G)$ называется *диаметральной* цепью.

А. А. Евдокимов в [1] для дискретных метрических пространств ввел понятие свойства продолжения метрики, которое для обыкновенного графа выполняется тогда и только тогда, когда любые две его вершины лежат на некоторой диаметральной цепи. Ясно, что любой граф, обладающий свойством продолжения метрики, связен. Однако не каждый связный граф обладает свойством продолжения метрики. Например, если в связном графе G диаметра $d(G) \geqslant 2$ имеются такие смежные вершины $x, y \in V(G)$, что любая вершина $z \in V(G) \setminus \{x, y\}$ одновременно смежна или не смежна с обеими вершинами x и y, то через вершины x и y не проходит никакая кратчайшая цепь длины больше чем 1. В [2] доказано, что свойству продолжения метрики удовлетворяют почти все n-вершинные графы, а в [3, 4] получена характеризация графов со свойством продолжения метрики из некоторых известных классов. Вместе с тем оставались невыясненными следующие вопросы:

1) всегда ли данный граф G содержится как порожденный подграф в некотором графе H, обладающем свойством продолжения метрики?

2) можно ли для связного графа G такое вложение осуществить изометрически, т. е. с сохранением всех расстояний между вершинами графа G?

В настоящей работе дается утвердительный ответ на оба вопроса, причем вложение осуществляется достаточно «экономно» — граф H может иметь диаметр $d(H) = d(G)$.

1. Основной результат

Конструкции вложения произвольного графа в граф заданного диаметра, обладающий свойством продолжения метрики, базируются на

свойствах кратчайших цепей в декартовом произведении двух графов.

Определение 1. *Декартовым произведением* графов G_1 и G_2 называется такой граф $G = G_1 \times G_2$ с множеством вершин $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, что вершины $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$ из $V(G)$ смежны в G тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$ и вершины u_2 и v_2 смежны в G_2, либо $u_2 = v_2$ и вершины u_1 и v_1 смежны в G_1.

Рассмотрим цепь $P_{G\times H}$ длины t, соединяющую вершины (x_0, v_0) и (x_t, v_t) в декартовом произведении $G \times H$ произвольных графов G и H. Вершины цепи $P_{G\times H}$ можно выписать в виде последовательности $(x_0, v_0), (x_1, v_1), \ldots, (x_t, v_t)$ так, что при любом i, $1 \leqslant i \leqslant t$, вершины (x_{i-1}, v_{i-1}) и (x_i, v_i) смежны. Эта последовательность порождает две последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_t$ и $v_0, v_1, \ldots, v_t$ вершин в графах-сомножителях G и H соответственно. В этих последовательностях могут встречаться многократные (т. е. несколько раз подряд) вхождения одной и той же вершины. Заменим в них каждое многократное вхождение одной и той же вершины однократным. После такой замены получатся последовательности $z_0 = x_0, z_1, \ldots, z_{n_G} = x_t$ и $w_0 = v_0, w_1, \ldots, w_{n_H} = v_t$ вершин графов G и H соответственно, в которых любые две соседние вершины смежны. Таким образом, цепь $P_{G\times H}$ определяет две последовательности $P_G = \langle x_0, e_1, x_1, \ldots, e_{n_G}, x_{n_G}\rangle$ и $P_H = \langle v_0, f_1, v_1, \ldots, f_{n_H}, v_{n_H}\rangle$, где при любых i и j, $1 \leqslant i \leqslant n_G$ и $1 \leqslant j \leqslant n_H$, ребро e_i соединяет вершины x_{i-1} и x_i, а ребро f_j — вершины v_{j-1} и v_j. Эти последовательности будем называть *проекциями* цепи $P_{G\times H}$ на графы-сомножители G и H соответственно.

Поскольку вершины простой цепи должны быть попарно различны, проекции простой цепи могут не быть цепями. Нетрудно убедиться, однако, что кратчайшие цепи в декартовом произведении обладают следующим свойством.

Предложение 2. *В декартовом произведении произвольных графов G и H цепь $P_{G\times H}$ является кратчайшей тогда и только тогда, когда проекции P_G и P_H являются кратчайшими цепями в графах G и H соответственно.*

Из этого свойства сразу вытекает

Следствие 3. *Для пары вершин $(x, u), (y, v) \in V(G \times H)$ в декартовом произведении произвольных графов G и H расстояние $\rho_{G\times H}((x, u), (y, v))$ определено в том и только в том случае, когда в графах G и H определены расстояния $\rho_G(x, y)$ и $\rho_H(u, v)$ соответственно, причем*

$$\rho_{G\times H}((x, u), (y, v)) = \rho_G(x, y) + \rho_H(u, v).$$

Теорема 4. *Для любого натурального числа $d \geqslant 2$ и любого графа G существует граф H диаметра $d(H) = d$, обладающий свойством*

продолжения метрики и содержащий граф G в качестве порожденного подграфа, причем это вложение сохраняет расстояния между вершинами графа G, не превосходящие d.

Доказательство. Пусть заданы произвольные натуральное число $d \geqslant 2$ и граф G. Вложение $G \subset H$ будет осуществляться последовательным построением таких графов G_1, G_2, H' и H, что $G \subseteq G_1 \subset G_2 \subseteq H' \subset H$, причем всякий раз предшествующий граф будет порожденным подграфом последующего, и по меньшей мере для одного способа вложения в последующем графе будут сохраняться расстояния между вершинами предшествующего графа, не превосходящие d.

Если в графе G нет изолированных вершин, то положим $G_1 = G$. В противном случае к множеству вершин графа G добавим новую вершину, которую соединим ребрами со всеми изолированными вершинами. Полученный граф обозначим через G_1. По построению в графе G_1 нет изолированных вершин.

Граф G_2 конструируется из графа G_1 «подвешиванием» к каждой вершине графа G_1 цепи длины $\delta + 1$. Более формально: пусть $V(G_1) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\}$, где $n_1 = n(G_1)$. Положим $V(G_2) = \{u_{i,j} | 0 \leqslant i \leqslant \delta + 1, 1 \leqslant j \leqslant n_1\}$, где $u_{0,j} = v_j$ при любых j, $1 \leqslant j \leqslant n_1$, и $E(G_2) = E(G_1) \cup \{e_{i,j} | 1 \leqslant i \leqslant \delta + 1, 1 \leqslant j \leqslant n_1\}$, где ребро $e_{i,j}$ соединяет вершины $u_{i-1,j}$ и $u_{i,j}$. Легко видеть, что в графе G_2 *каждая кратчайшая цепь длины не более d может быть продолжена до кратчайшей цепи длины не менее d.*

Пусть $P_{2\delta+3} = \langle x_0, e_1, x_1, \ldots, e_{2\delta+2}, x_{2\delta+2}\rangle$ — цепь длины $2\delta+2$, и пусть цепь $P_{2\delta+1} = \langle x_1, \ldots, e_{2\delta+1}, x_{2\delta+1}\rangle$ длины $2\delta \geqslant 0$ получается из цепи $P_{2\delta+3}$ отбрасыванием концевых вершин вместе с инцидентными ребрами. Пронумеруем вершины графа G_2, полагая $V(G_2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_2}\}$, где $n_2 = n(G_2)$. Положим $H' = P_{2\delta+1} \times G_2$ и $H'' = P_{2\delta+3} \times G_2$. Ясно, что графу G_2 изоморфны все подграфы H_i, $1 \leqslant i \leqslant 2\delta + 1$, графов H' и H'', а также подграфы H''_0 и $H''_{2\delta+2}$ графа H'', порожденные вершинами множеств $\{\langle x_i, v_j\rangle \mid 1 \leqslant j \leqslant n_2\}$, где $0 \leqslant i \leqslant 2\delta + 2$. Поэтому каждый такой подграф будем называть i-й *копией* графа G_2, а его вершины — копиями соответствующих вершин графа G_2.

В зависимости от четности числа d возможны два случая:

1) $d = 2\delta + 2$;

2) $d = 2\delta + 3$,

где δ — неотрицательное целое число.

В случае 1 граф H конструируется из графа H'' следующим образом. Из множества ребер $E(H'')$ исключаются все ребра, принадлежащие крайним копиям графа G_2, т. е. подграфам H''_0 и $H''_{2\delta+2}$. Все вершины подграфа H''_0 стягиваются (отождествляются) в одну вершину,

обозначаемую через a, а все вершины подграфа $H''_{2\delta+2}$ стягиваются в вершину b. Через H обозначим граф, полученный в результате этих операций. Вершины a и b графа H будем называть *полюсами*. По построению полюс a в графе H смежен со всеми вершинами подграфа H_1 и только с этими вершинами, а полюс b — со всеми вершинами подграфа $H_{2\delta+1}$ и только с ними.

В случае 2 множество ребер $E(H'')$ пополняется всеми ребрами, которые соединяют несмежные вершины одного и того же подграфа H''_0 или $H''_{2\delta+2}$. Полученный в результате этой операции граф обозначим через H, а его подграфы, соответствующие подграфам H''_0 и $H''_{2\delta+2}$ графа H'', — через H_0 и $H_{2\delta+2}$ соответственно. Ясно, что каждый из подграфов H_0 и $H_{2\delta+2}$ изоморфен полному графу K_{n_2}. Все вершины этих подграфов будем называть полюсами, а их ребра — *полярными*.

Легко видеть, что любая пара вершин графа H лежит на цикле длины $2d$, который от полюса до полюса проходит по копиям двух различных вершин графа G_2. Поэтому расстояние между любыми двумя вершинами графа H не превосходит d. С другой стороны, всегда имеются два полюса, удаленные друг от друга на расстояние не менее d. Следовательно, $d(H) = d$. Покажем, что граф H обладает свойством продолжения метрики, т. е. любая пара вершин графа H лежит на диаметральной цепи.

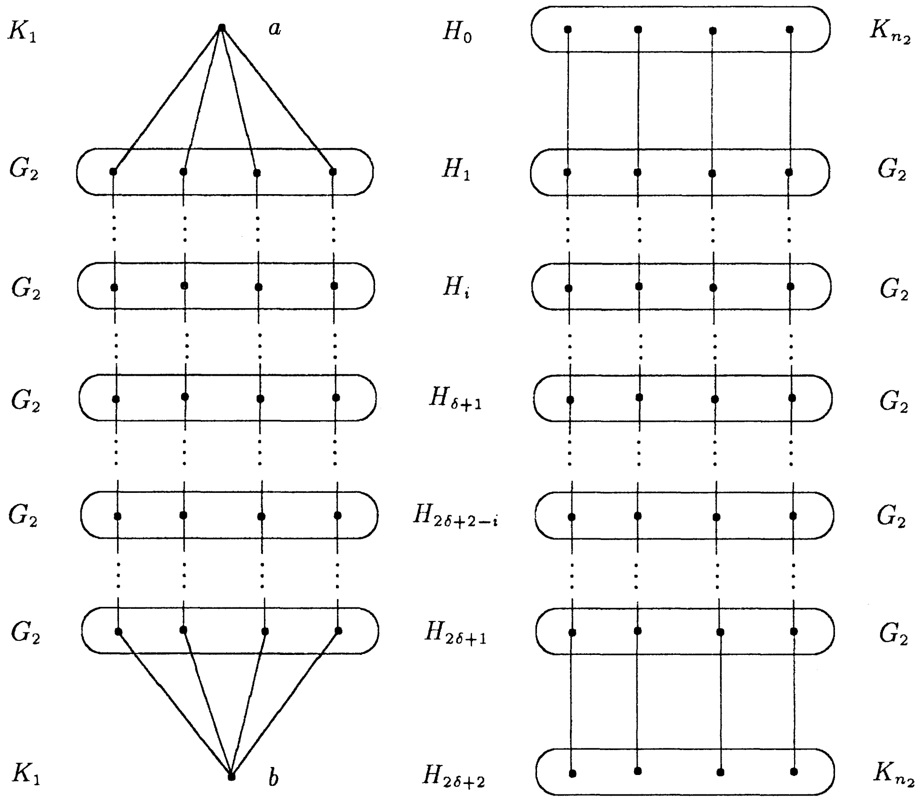
Пусть p_1, p_2 — произвольные вершины графа H. Все возможные варианты распределения этих вершин по подграфам графа H распадаются на два случая:

a) либо хотя бы одна из вершин p_1 и p_2 (например, p_1) является полюсом, либо обе вершины p_1 и p_2, не являясь полюсами, представляют собой копии одной и той же вершины графа G_2;

b) обе вершины p_1 и p_2, не являясь полюсами, представляют собой копии различных вершин графа G_2.

В случае a) в графе G_2 всегда можно выбрать такую вершину, что цепь, соединяющая два полюса по копиям выбранной вершины, проходит через вершину p_2. Для случая 1 эта цепь будет искомой диаметральной цепью, содержащей вершины p_1 и p_2. В случае 2 эта цепь легко продолжается до искомой диаметральной цепи добавлением одного из полярных ребер.

В случае b) вершины p_1 и p_2 являются вершинами подграфа H' графа H. Пусть $p_1 = (x_{i_1}, v_{j_1})$ и $p_2 = (x_{i_2}, v_{j_2})$. В силу симметрии конструкции (см. рисунок) можно считать, что расстояние от вершины p_1 до ближайшего к ней полюса не больше, чем расстояние от вершины p_2 до ближайшего к ней полюса. Более того, по той же причине можно



Вариант 1. $d = 2\delta + 2$ Вариант 2. $d = 2\delta + 3$

Структура графа H

считать, что ближайшим к вершине p_1 полюсом является вершина a в случае 1 или вершина подграфа H_0 в случае 2, т. е. $i = i_1 \leqslant \min\{i_2, 2\delta + 2 - i_2\}$. Кроме того, по условию случая b) вершины v_{j_1} и v_{j_2} различны, т. е. $j_1 \neq j_2$. Положим $i' = 2\delta + 2 - i$. Тогда $i \leqslant i_2 \leqslant i'$.

Предположим, что имеет место случай 1. Тогда возможны два подслучая.

Подслучай b1. Либо расстояние $\rho_{G_2}(v_{j_1}, v_{j_2})$ не определено, либо $\rho_{G_2}(v_{j_1}, v_{j_2}) \geqslant 2i$. В графе H рассмотрим цепь P, последовательно проходящую через копии вершины v_{j_1}, начиная с вершины p_1, вверх до ближайшего к ней полюса, затем через копии вершины v_{j_2} вниз вплоть до вершины $p' = (x_{i'}, v_{j_2})$. Поскольку эта цепь проходит через все копии вершины v_{j_2}, удаленные от соответствующих полюсов на расстояние не

меньше i, то вершина p_2 лежит на цепи P. Ее длина равна d. Заметим, что всякая кратчайшая цепь графа H, соединяющая вершины p_1 и p', либо не содержит полюсов, т. е. полностью содержится в подграфе H' графа H, либо не содержит ни одного ребра, которое было бы ребром одной из копий H_i, $1 \leqslant i \leqslant 2\delta + 1$. В последнем случае ее длина равна d. Если же кратчайшая цепь, соединяющая вершины p_1 и p', полностью содержится в подграфе H' графа H, то в соответствии с условиями рассматриваемого случая имеем $\rho_{H'}(p_1, p') = \rho_{P_{2\delta+1}}(x_i, x_{i'}) + \rho_{G_2}(v_{j_1}, v_{j_2}) \geqslant i' - i + 2i = d$. Следовательно, цепь P является диаметральной, что и требовалось доказать.

Подслучай b2. $\rho_{G_2}(v_{j_1}, v_{j_2}) \leqslant 2i$. В этом случае по свойству графа G_2 в нем найдется кратчайшая цепь P' длины $2i$, содержащая обе вершины v_{j_1} и v_{j_2}. Обозначим концы цепи P' через u_1 и u_2. В силу симметрии можно считать, что вершины цепи P' следуют в таком порядке: $u_1, \ldots, v_{j_1}, \ldots, v_{j_2}, \ldots, u_2$, где вершина u_1 не обязательно отличается от вершины v_{j_1}, а вершина u_2 — от вершины v_{j_2}. Рассмотрим цепь P в графе H, последовательно проходящую через копии вершин цепи P' из подграфа H_i, начиная с копии вершины u_1 через вершину p_1 и заканчивая копией вершины v_{j_2}, затем через копии вершины v_{j_2} вниз вплоть до вершины $p' = (x_{i'}, v_{j_2})$ и, наконец, через копии вершин цепи P' из подграфа $H_{i'}$, начиная с копии вершины v_{j_2} и заканчивая копией вершины u_2. Поскольку эта цепь проходит через все копии вершины v_{j_2}, удаленные от соответствующих полюсов на расстояние не меньше i, вершина p_2 лежит на цепи P. Ее длина равна d. Цепь P полностью содержится в подграфе H' и является его кратчайшей цепью. Но цепи графа H, соединяющие вершины (x_i, u_1) и $(x_{i'}, u_2)$ и являющиеся кратчайшими среди такого рода цепей, проходящих через полюса, имеют длину d. Следовательно, цепь P является диаметральной, что и требовалось доказать.

Заметим, что кратчайшая цепь в графе H, соединяющая две вершины подграфа H_i, $1 \leqslant i \leqslant \delta + 1$, либо полностью содержится в подграфе H_i, либо проходит через полюс и имеет длину $2i$. Поэтому в графе H сохраняются расстояния, не превосходящие $2i$ в подграфе H_i. В частности, в подграфе $H_{\delta+1}$ сохраняются все расстояния, не превосходящие d. Поэтому если граф G имеет диаметр $d(G) \leqslant d$, то его вложение в граф H вместе с подграфом $H_{\delta+1}$ является изометрическим.

Случай 2 совпадает со случаем 1 с точностью до замены всех вхождений пары символов «$2i$» на «$2i + 1$». Теорема 4 доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Евдокимову за постановку задачи и внимание при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 116–132. (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т.10).
2. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
3. **Федоряева Т. И.** Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 49–67.
4. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы со свойством продолжения метрики. I // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 1. С. 83–112.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
29 июня 2001 г.