

МИНИМАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ И ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА КВАДРАТОВ ПЛОСКИХ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин, Х. Брусма, А. Н. Глебов,

Я. ван ден Хойвел

Вес предполной звезды при вершине v графа G определяется как сумма степеней всех смежных с v вершин, кроме одной, имеющей наибольшую степень. Определены достаточные условия существования в плоском графе G предполной звезды ограниченного веса при вершине степени не более 5. Для плоских графов с максимальной степенью $\Delta \geq 47$ доказана точная верхняя оценка, равная $\lceil \frac{9}{5} \Delta \rceil$, для минимальной степени вершин квадрата G^2 графа G и верхняя оценка, равная $\lceil \frac{9}{5} \Delta \rceil + 1$, для его списочного хроматического числа. Получены верхние оценки для так называемых (p, q) -хроматических чисел плоских графов.

Введение

Ниже под графом понимается обыкновенный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и ребер графа G соответственно. Под *расстоянием* $d(u, v)$ между вершинами u и v понимается число ребер в кратчайшей цепи, соединяющей вершины u и v в G . Любая вершина степени не более 5 в G называется *младшей*. Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная степень вершин графа G .

Для любой вершины v графа G определим *вес предполной звезды* при вершине v как сумму степеней всех смежных с v вершин, кроме одной, имеющей наибольшую степень. Назовем *2-дистанционной степенью* $d_2(v)$ вершины v число вершин графа G , находящихся на расстоянии

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00581) и INTAS (грант 97-1001), второго автора — при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (грант 047-008-006), третьего автора — при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (грант 047-008-006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00916).

не более 2 от вершины v (определение 3). Будем использовать обозначения $\delta_2(G)$ для минимальной 2-дистанционной степени вершин графа G и $\delta_2^*(G)$ для минимальной 2-дистанционной степени *младших* вершин в G .

Под 2-дистанционной раскраской графа G будем понимать такую раскраску его вершин, при которой любые две вершины, находящиеся на расстоянии не более 2, окрашены в различные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-дистанционным хроматическим числом графа G и обозначается через $\chi_2(G)$. Стандартным образом определяются понятия *предписанной* 2-дистанционной раскраски и *списочного* 2-дистанционного хроматического числа $\chi_2^l(G)$ (см. определение 4).

Квадратом G^2 графа G называется граф с множеством вершин $V(G)$, в котором вершины u и v смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии не более 2 в графе G . Понятно, что $\chi_2(G) = \chi(G^2)$ и $d_2(v) = d_{G^2}(v)$ для любой вершины $v \in V(G)$. При этом любая 2-дистанционная раскраска графа G является правильной раскраской вершин графа G^2 и наоборот.

Г. Вегнером [10] была высказана гипотеза о том, что 2-дистанционное хроматическое число $\chi_2(G)$ любого плоского графа G с максимальной степенью Δ удовлетворяет неравенствам

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} \Delta + 5 & \text{при } 4 \leq \Delta \leq 7; \\ \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1 & \text{при } \Delta \geq 8 \end{cases} \quad (1)$$

(см. также монографию Т. Р. Йенсена и Б. Тофта [8, п. 2.18]). Пример плоского мультиграфа, построенного К. Шенноном [9] (так называемый *треугольник Шеннона*), показывает, что если верхняя оценка (1) верна, то она достижима при $\Delta \geq 8$. Я. ван ден Хойвел и С. Мак Гиннесс [6] доказали, что $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 25$ для любого плоского графа G . Г. Агнарссоном и М. М. Холлдорссоном [3] было установлено, что $\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 2$ при $\Delta \geq 749$.

В настоящей статье доказано, что $\chi_2^l(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$ при значительно меньших начальных значениях $\Delta \geq 47$ (теорема 4 и следствие 5 из § 6). Одновременно получены аналогичные верхние оценки для так называемых списочных (p, q) -хроматических чисел плоских графов (определение 4 и теорема 4).

Получение упомянутых оценок основано на доказанной в § 1–4 теореме 2, описывающей строение плоских графов в терминах предполных звезд при младших вершинах и так называемых *пучков* (см. определения 1 и 2). Эта теорема является обобщением аналогичного результата, полученного теми же авторами в [2] для случая плоских триангуляций (теорема 1). Общий смысл теоремы 2 состоит в том, что в любом

плоском графе имеется либо предполная звезда ограниченного веса при младшей вершине, либо конфигурация специфического вида (пучок или набор пучков) при вершине степени не менее 26. Указанная конфигурация является сводимой относительно продолжения 2-дистанционной раскраски. Следствие 1 из теоремы 2 устанавливает достаточные условия существования в плоском графе предполной звезды ограниченного веса при младшей вершине.

В § 5 структурный результат теоремы 2 используется при получении достижимых верхних оценок $\delta_2(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil$ и $\delta_2^*(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$ для минимальных 2-дистанционных степеней плоских графов с максимальной степенью $\Delta \geq 47$ (теорема 3 и следствие 4). Достижимость указанных выше оценок подтверждается соответствующими примерами.

§ 1. Определения и формулировка структурной теоремы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в плоском графе G имеется *пучок* H ширины $w(H) = t \geq 3$ с *полюсами* в вершинах p и q (где $p \neq q$), если в G существует последовательность цепей P_1, P_2, \dots, P_t , обладающая следующими свойствами. Каждая цепь P_i , $i = 1, \dots, t$, имеет длину 1 или 2 и ее концами являются вершины p и q . При этом для любого $i = 1, \dots, t-1$ цикл, ограниченный цепями P_i и P_{i+1} , не является разделяющим в G (т. е. внутри этого цикла не содержится ни одна вершина графа G) (рис. 1 и 2). Кроме того, указанная последовательность цепей максимальна в том смысле, что не существует такой цепи P_0 (равно как и P_{t+1}), которую можно добавить к пучку H с сохранением всех его свойств.

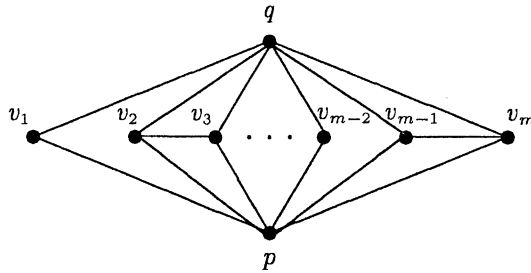


Рис. 1

Для каждой цепи $P_i = pv_iq$ длины 2 вершину v_i будем называть *собственной вершиной* пучка H , или *пучковой вершиной*. Цепь $P_i = pq$ длины 1 будем называть *родительским ребром* пучка H . На рис. 1 и 2 изображены пучки без родительского ребра и с родительским ребром

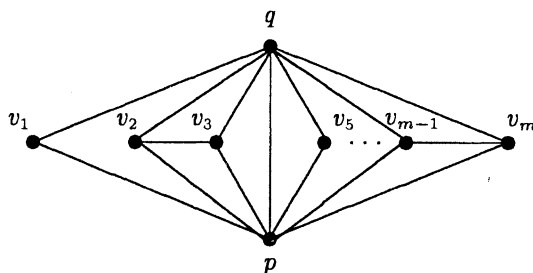


Рис. 2

соответственно. Если цикл, ограниченный цепями P_1 и P_m , является разделяющим в G (т. е. вне пучка имеется хотя бы одна вершина графа G), то ребра, принадлежащие цепям P_1 и P_m , будем называть *граничными ребрами*, а вершины v_1 и v_m — *концевыми вершинами* (или *концами*) пучка H . Вершины v_2, \dots, v_{m-1} будем называть *внутренними*, а вершины v_3, \dots, v_{m-2} — *строго внутренними* вершинами пучка H . Каждое ребро вида $v_i v_{i+1}$ назовем *горизонтальным*, а каждое ребро, принадлежащее любой из цепей P_i , — *вертикальным* ребром пучка. Из определения следует, что степень любой внутренней вершины v_i пучка равна 2, 3 или 4; при этом вершина v_i смежна с каждым из полюсов p и q и (возможно) с одной или двумя соседними пучковыми вершинами v_{i-1} и (или) v_{i+1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть u — некоторая вершина графа G степени d и вершины v_1, \dots, v_k смежны с вершиной u . Будем говорить, что вершины u, v_1, \dots, v_k и ребра uv_1, \dots, uv_k образуют k -звезду при d -вершине u , определяемую вершинами v_1, \dots, v_k . Величину $\sum_{i=1}^k d(v_i)$ будем называть *весом* указанной звезды. При этом всякую $(d-1)$ -звезду при d -вершине u назовем *предполной*, а всякую d -звезду — *полной*.

Вершины степени не менее 26 в G будем называть *B-вершинами*, вершины степени не более 25 — *L-вершинами*, вершины степени не более 5 — *младшими вершинами*.

В [2] была доказана следующая структурная теорема, определяющая достаточные условия существования в плоской триангуляции предполной звезды ограниченного веса при младшей вершине.

Теорема 1 [2]. Для любой плоской триангуляции T верно одно из следующих утверждений:

(А) В T имеется предполная звезда веса не более 38 при младшей вершине, не содержащая B-вершин.

(В) В T имеется B-вершина b , являющаяся полюсом либо для пучка ширины более $d(b)/5$, либо для пучка ширины $d(b)/5$ с родительским

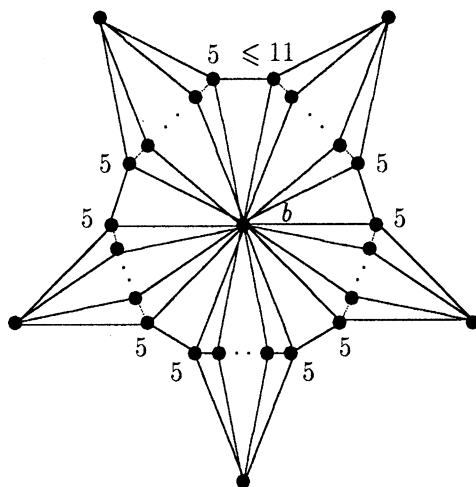


Рис. 3

ребром, либо для пяти пучков ширины $d(b)/5$ без родительских ребер и с попарно несовпадающими концевыми вершинами. При этом в последнем случае все концевые вершины, кроме, возможно, одной, имеют степень 5, а степень последней концевой вершины не превосходит 11 (рис. 3).

Ниже доказываем обобщение теоремы 1 для случая произвольных плоских графов, а именно следующая

Теорема 2. Для любого плоского графа G верно одно из следующих утверждений:

(А) В G имеется предполная звезда веса не более 38 при младшей вершине, не содержащая B -вершин (любую такую звезду будем называть легкой).

(В) В G имеется B -вершина b , которая удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) b является полюсом для пучка ширины более $d(b)/5$;
- (ii) b является полюсом для пучка ширины $d(b)/5$ с родительским ребром;
- (iii) b является полюсом для пяти пучков ширины $d(b)/5$ без родительских ребер с попарно несовпадающими концевыми вершинами. При этом среди концевых вершин пучков имеется вершина v_0 степени не более 11, а степени остальных концевых вершин не превосходят 5. Если v_i и v_{i+1} — две расположенные рядом в окружении b концевые вершины двух пучков, причем $v_i \neq v_0$ и $d(v_i) = 5$, то $v_i v_{i+1} \in E(G)$ (см. рис. 3).

Следствие 1 (достаточное условие существования легкой звезды). Если в плоском графе G каждая B -вершина b является полюсом для

пучков ширины менее $d(b)/5$, то в G имеется легкая предполная звезда при младшей вершине. В частности, если $w(H) \leq 5$ для любого пучка H , то граф G содержит звезду указанного вида.

§ 2. Идея доказательства теоремы 2

Покажем, каким образом утверждение теоремы 2 можно получить из теоремы 1. Каждому связному плоскому графу G поставим в соответствие два числовых параметра $\tau(G)$ и $\beta(G)$. Значение параметра τ определим соотношением

$$\tau(G) = \sum_{f \in F(G)} (r(f) - 3) = 2|E| - 3|F|.$$

Из определения следует, что $\tau(G) = 0$, если граф G является триангуляцией, и $\tau(G) > 0$ в противном случае. Можно сказать, что параметр τ отражает степень близости плоского графа G к триангуляции. Значение параметра $\beta(G)$ определим как число ребер графа G с концами в двух B -вершинах. В дальнейшем такие ребра будем называть *ВВ-ребрами*, ребра, инцидентные точно одной B -вершине, — *ВL-ребрами* и ребра, инцидентные двум L -вершинам, — *LL-ребрами*.

Пусть граф G является контрпримером к теореме 2. Не уменьшая общности, можно считать, что граф G связан. Из теоремы 1 следует, что G не является триангуляцией, следовательно, $\tau(G) > 0$. Заметим, что минимальная степень графа G не меньше 2, причем любая вершина степени 2 смежна с двумя B -вершинами (иначе для G выполняется утверждение (А) теоремы 2). Обозначим через \mathcal{X} класс всех связных графов, являющихся контрпримерами к теореме 2, и через G_0 такой граф из \mathcal{X} , что $\tau(G_0) = \tau_0 = \min\{\tau(G) \mid G \in \mathcal{X}\}$ и $\beta(G_0) = \min\{\beta(G) \mid G \in \mathcal{X}, \tau(G) = \tau_0\}$.

Шагом триангулирования назовем такое преобразование графа $G \in \mathcal{X}$, при котором для полученного плоского графа $G_1 \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство $\tau(G_1) < \tau(G)$. *Подшагом триангулирования* назовем такое преобразование графа $G \in \mathcal{X}$, при котором полученный плоский граф $G_1 \in \mathcal{X}$ обладает свойствами: $\tau(G_1) = \tau(G)$ и $\beta(G_1) < \beta(G)$. Из минимальности выбора контрпримера G_0 следует, что для завершения доказательства теоремы 2 достаточно выполнить шаг или подшаг триангулирования в графе G_0 .

§ 3. Лемма о добавлении ребра

Естественной попыткой совершить шаг триангулирования в контрпримере $G \in \mathcal{X}$ является добавление нового ребра e между несмежными вершинами. Выясним, в каких случаях такая операция выводит из класса контрпримеров.

Лемма. Пусть $G \in \mathcal{K}$ и $G_1 = G + e$ — плоский граф, причем $G_1 \notin \mathcal{K}$. Тогда в G_1 ребро e является вертикальным в некотором пучке H ширины не менее 6. При этом полюса пучка H являются B -вершинами в G , а ребро e является либо родительским, либо граничным, либо предграничным в H .

Доказательство. Предположим, что для графа G_1 выполнено утверждение (А) теоремы 2, т. е. в G_1 имеется легкая предполная звезда при младшей вершине x . Тогда в графе $G = G_1 - e$ указанная звезда индуцирует легкую предполную или полную звезду при вершине x , что противоречит условию $G \in \mathcal{K}$.

Следовательно, для графа G_1 выполняется утверждение (В) теоремы 2. Вначале рассмотрим случай, когда выполнено одно из условий (i) или (ii). В этом случае в G_1 имеется B -вершина b , являющаяся полюсом для пучка H ширины $w(H) \geq \lceil d(b)/5 \rceil \geq 6$. Второй полюс пучка H обозначим через t . Докажем, что вершины b и t являются B -вершинами в G . Предположим, что $d_G(b) = 25$ (или $d_G(t) \leq 25$). Обозначим через x некоторую строго внутреннюю вершину пучка H (существование такой вершины следует из условия $w(H) \geq 6$). Из свойств строго внутренней вершины следует, что $d_G(x) \leq 4$. При этом вершина x является центром предполной звезды S , определяемой вершиной b (вершиной t) и (возможно) одной или двумя смежными с x внутренними пучковыми вершинами, степень каждой из которых не превосходит 4. Отсюда следует, что в графе G вес звезды S не превосходит 33. Это означает, что для графа G выполняется утверждение (А) теоремы 2, что противоречит условию $G \in \mathcal{K}$.

Предположим, что ребро e не является вертикальным в пучке H . В этом случае H содержится также в графе G , причем $w_G(H) = w_{G_1}(H)$ и $26 \leq d_G(b) \leq d_{G_1}(b)$. Из доказанного следует, что утверждение (В) теоремы 2 выполняется для графа G , что противоречит условию $G \in \mathcal{K}$. Следовательно, ребро $e = uv$ является вертикальным в пучке H . Если ребро e не является в H ни родительским, ни граничным, ни предграничным, то одна из вершин u или v (для определенности u) является строго внутренней в H . В этом случае в графе G при вершине u имеется предполная звезда веса не более 8, состоящая из одной или двух смежных с u внутренних пучковых вершин. Из полученного противоречия следует, что ребро e является в H либо родительским, либо граничным, либо предграничным.

Предположим, что для графа G_1 выполняется условие (iii) утверждения (В) теоремы 2. В этом случае в G_1 имеется B -вершина b , являющаяся полюсом для пяти пучков H_1, \dots, H_5 ширины $d(b)/5$ без родительских ребер. Полюса этих пучков, отличные от вершины b , обозначим через t_1, \dots, t_5 . Таким же образом, как и при рассмотрении условий

(i) и (ii), доказывается, что $w(H_i) \geq 6$, $i = 1, \dots, 5$, и каждая вершина b, t_1, \dots, t_5 является B -вершиной в G . Предположим, что ребро e не является вертикальным ни в одном пучке H_i . Тогда все пучки H_i содержатся в графе G . При этом нетрудно проверить, что после удаления из графа G_1 ребра e все условия, налагаемые на степени концевых вершин пучков и на их смежность, не нарушаются, т. е. эти условия выполнены и в G . Далее остается применить те же рассуждения, что и в случае с условиями (i) и (ii). Лемма доказана.

Следствие 2. Если $G \in \mathcal{X}$ и $G_1 = G + uv$ — плоский граф, где u и v являются L -вершинами в G , то $G_1 \in \mathcal{X}$ (если при этом $d_G(u) = 25$ или $d_G(v) = 25$, то ребро uv не является LL -ребром в G_1).

Справедливость этого утверждения следует из леммы и того факта, что каждое вертикальное ребро пучка инцидентно хотя бы одному из его полюсов. Следствие 2 показывает, что операция добавления ребра между двумя несмежными L -вершинами в контрпримере G (с сохранением планарности) является шагом триангулирования.

Заметим, что другое элементарное преобразование плоского графа G , заключающееся в *подразбиении* его BB -ребра uv (т. е. замене ребра uv на ребра ux и xv), не является шагом триангулирования, но оставляет класс \mathcal{X} инвариантным. Действительно, если в образующемся графе G_1 имеется пучок с полюсами u и v , содержащий цепь uxv , то в графе G ему соответствует пучок той же ширины с родительским ребром uv . Отсюда следует, что если для графа G_1 выполнено утверждение (B) теоремы 2, то оно выполняется также и для G вопреки условию $G \in \mathcal{X}$. Следовательно, $G_1 \in \mathcal{X}$. В описанной ситуации будем также говорить, что граф G_1 получен из графа G «размещением вершины x на BB -ребре uv ». Из определения следует, что $\tau(G_1) = \tau(G) + 2$ и $\beta(G_1) = \beta(G) - 1$.

Если операция размещения вершины x на BB -ребре uv в графе $G \in \mathcal{X}$ сопровождается добавлением трех ребер xw_1, xw_2 и xw_3 (с сохранением планарности), где w_1, w_2 и w_3 — L -вершины графа G , то согласно следствию 2 происходит шаг триангулирования. Если же операция размещения вершины x сопровождается добавлением двух ребер xw_1 и xw_2 (с сохранением планарности), где w_1 и w_2 являются L -вершинами как в G , так и в полученном графе G' , то выполняется подшаг триангулирования. Последний факт следует из того, что при удалении ребра uv из графа G в графе G' не возникает новых BB -ребер.

§ 4. Триангулирование минимального контрпримера

Воспользуемся сделанными замечаниями при выполнении шага или подшага триангулирования в минимальном контрпримере G_0 . Согласно

теореме 1 граф G_0 не является триангуляцией. Поэтому в G_0 найдется такая пара несмежных вершин u и v , что граф $G_1 = G + \{e = uv\}$ является плоским. Если $G_1 \in \mathcal{K}$, то шаг триангулирования сделан. Пусть $G_1 \notin \mathcal{K}$. Тогда согласно лемме в графе G_1 ребро e является вертикальным в некотором пучке H ширины не менее 6, причем полюсы p и q пучка H являются B -вершинами в G_0 . Согласно лемме возможны следующие случаи: ребро e является

- 1) строго внутренним родительским в H (т. е. не является граничным или предграничным);
- 2) предграничным родительским в H ;
- 3) предграничным не родительским в H ;
- 4) граничным родительским в H ;
- 5) граничным не родительским в H .

В каждом случае 1–5 укажем некоторую последовательность операций, позволяющую вместо «ошибочного» добавления ребра e к G_0 выполнить некоторый шаг или подшаг триангулирования.

Случай 1. Согласно сделанным предположениям в G_1 ребро $e = pq$ инцидентно двум треугольным граням $pv_{i-1}q$ и $pv_{i+1}q$, где v_{i-1} и v_{i+1} — внутренние вершины пучка H (рис. 4, а). Отсюда следует, что в графе G_0 вершины v_{i-1} и v_{i+1} являются младшими и несмежными (поскольку $w(H) \geq 6$). Применяя следствие 2, получаем, что добавление к графу G_0 ребра $v_{i-1}v_{i+1}$ является шагом триангулирования (рис. 4, б).

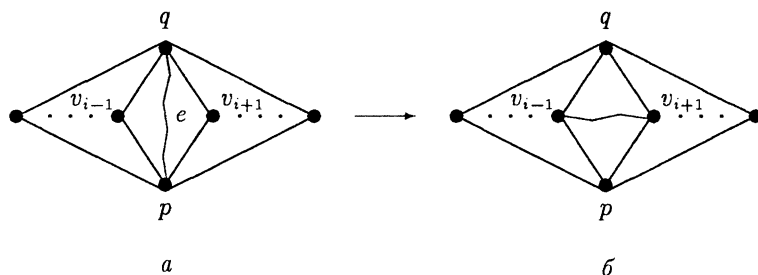


Рис. 4

Случай 2. В G_1 ребро $e = pq$ инцидентно двум треугольным граням pv_1q и pv_3q , где v_1 — концевая вершина пучка H , а v_3 — его строго внутренняя вершина. Отсюда следует, что $d(v_3) \leq 3$ (рис. 5, а). Как и в случае 1, вершины v_1 и v_3 не смежны в G_0 . Положим $G' = G + e'$, где $e' = v_1v_3$. Предположим, что $G' \notin \mathcal{K}$. Тогда согласно лемме и следствию 2 вершина v_1 является B -вершиной в G_0 , а ребро e' — вертикальным в некотором пучке H' ширины не менее 6 в G' . Так как в графе G' ребро e' инцидентно только одной B -вершине v_1 , то v_1 совпадает с одним из полюсов пучка H' . Второй полюс этого пучка находится в окружении

вершины v_3 и является B -вершиной. Так как в графе G_0 вершина v_3 смежна лишь с двумя B -вершинами p и q , то второй полюс пучка H' совпадает с одной из этих вершин.

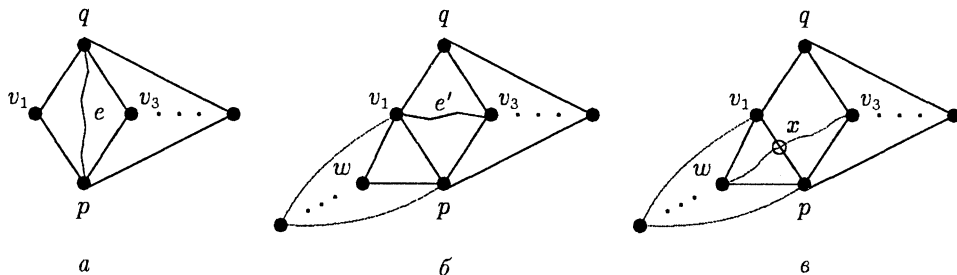


Рис. 5

В силу симметрии можно считать, что полюсами пучка H' являются вершины v_1 и p . Следовательно, ребро v_1p родительское в H' (рис. 5, б). Заметим, что вершина v_3 концевая в H' , поскольку расположенная рядом с v_3 в окружении полюса v_1 вершина q не смежна со вторым полюсом p пучка H' (согласно предположениям для случая 2). Отсюда следует, что в G' ребро v_1p инцидентно треугольной грани v_1wp , где $w \neq v_3$ — внутренняя вершина пучка H' . Так как вершины v_3 и w младшие в G_0 , то, помещая вершину x на BB -ребро v_1p в G_0 и добавляя ребра xv_3 и xw , мы совершаем подшаг триангулирования (рис. 5, в).

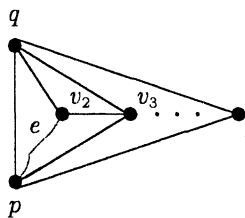


Рис. 6

Случай 3. Ребро $e = pv_2$ принадлежит предграничной цепи $P_2 = pv_2q$ пучка H . Если граничная цепь P_1 этого пучка представляет собой родительское ребро, т. е. $P_1 = pq$, то в графе G_0 вершина v_2 смежна лишь с вершиной q и, возможно, вершиной v_3 , которая есть внутренняя вершина пучка H (рис. 6). Тогда в графе G_0 при вершине v_2 имеется легкая предполная звезда, что противоречит условию $G_0 \in \mathcal{K}$. Следовательно, $P_1 = pv_1q$ и возможны лишь следующие два подслучая:

3.1) $P_3 = pq$, т. е. цепь P_3 является родительским ребром пучка H (рис. 7, а);

3.2) $P_3 = pv_3q$, т. е. цепь P_3 не является родительским ребром пучка H (рис. 8, а).

Рассмотрим подслучай 3.1. Так как $w_{G_1}(H) \geq 6$, то в графе G_1 ребро $pq = P_3$ инцидентно треугольной грани pv_4q , где v_4 — внутренняя вершина пучка H . Теперь, помещая вершину x на BB -ребро pq в G_0 и добавляя ребра xv_2 и xv_4 , совершаем подшаг триангулирования (рис. 7, б).

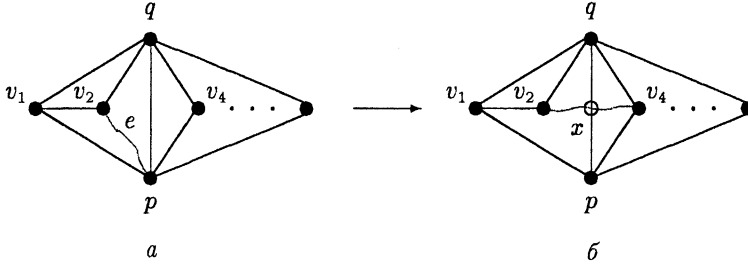


Рис. 7

Пусть имеет место подслучай 3.2 (рис. 8, а). Тогда $v_1v_2 \in E(G_0)$, причем вершина v_1 является B -вершиной в G_0 . Действительно, в противном случае в графе G_0 при вершине v_2 имеется предполная звезда веса не более 29, состоящая из (младшей) вершины v_3 и (возможно) вершины v_1 . Если младшие вершины v_2 и v_3 графа G_0 не смежны, то, добавляя к G_0 ребро v_2v_3 , совершаем шаг триангулирования.

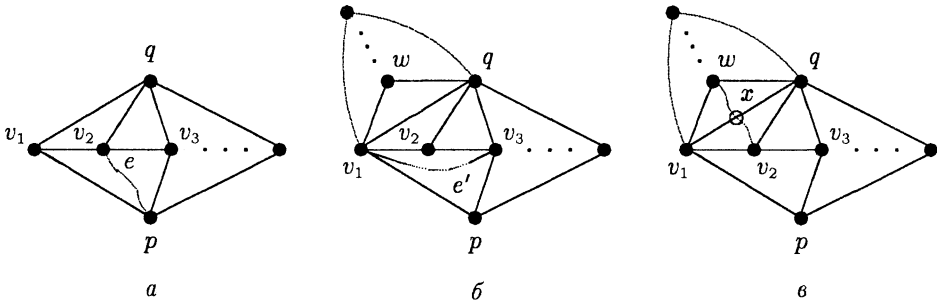


Рис. 8

Пусть $v_2v_3 \in E(G_0)$ (рис. 8). Положим $G' = G_0 + e'$, где $e' = v_1v_3$. Допустим, что $G' \notin \mathcal{H}$. Используя те же рассуждения, что и в случае 2, приходим к выводу, что в графе G' ребро e' является вертикальным в некотором пучке H' ширины не менее 6. При этом пару полюсов пучка H' составляют либо вершины v_1 и p , либо вершины v_1 и q .

Предположим, что полюсами являются вершины v_1 и q , а ребро v_1q — родительское в H' . В этом случае одна из вершин v_3 или p концевая для пучка H' , так как p является B -вершиной (вершина p концевая для H' в том случае, если в G' имеется треугольная грань pv_3q). Так

как $w(H') \geq 6$, то в графе G' ребро v_1q инцидентно треугольной грани v_1wq , где $w \neq v_3$ — внутренняя вершина пучка H' (рис. 8, б). Так как вершины v_2 и w младшие в G_0 , то, помещая вершину x на BB -ребро v_1q в G_0 и добавляя ребра xv_2 и xw , совершаем подшаг триангулирования (рис. 8, в).

В случае, когда полюсами пучка H' являются вершины v_1 и p , аналогично доказывается, что в графе G' ребро v_1p инцидентно треугольной грани v_1wp , где w — внутренняя вершина пучка H' . Далее, помещая вершину x на BB -ребро v_1p в G_0 и добавляя ребра xv_2 и xw , совершаем подшаг триангулирования.

Случай 4. Так как ребро $e = pq = P_1$ является граничным в пучке H , то в графе G_1 ребро e инцидентно треугольной грани pv_2q и не-треугольной грани $ypqz \dots$, где v_2 — внутренняя вершина пучка H (рис. 9, а). Отсюда следует, что в графе G_0 имеется грань $f_0 = ypv_2qz \dots$ ранга не менее 5. Так как вершина v_2 является внутренней в пучке H , то в графе G_0 вершина v_2 не смежна с вершинами, инцидентными грани f_0 и отличными от вершин p и q . Поэтому если в графе G_0 имеется L -вершина $t \neq v_2$, инцидентная грани f_0 , то добавление к графу G_0 ребра tv_2 является шагом триангулирования (не создающим кратных ребер).

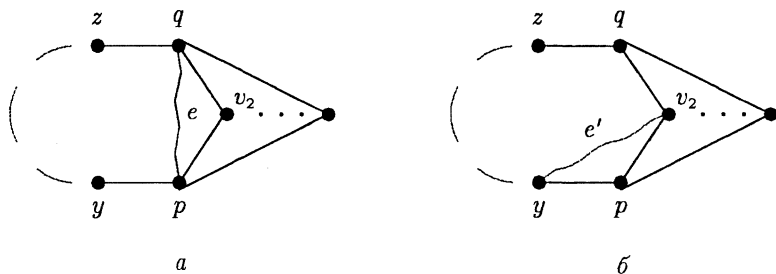


Рис. 9

Пусть все вершины графа G_0 , инцидентные грани f_0 и отличные от v_2 , являются B -вершинами. Положим $G' = G_0 + e'$, где $e' = yv_2$ (рис. 9, б), и допустим, что $G' \notin \mathcal{K}$. Тогда, как и в случае 2, получаем, что в графе G' ребро e' является вертикальным в некотором пучке H' ширины не менее 6. Одним из полюсов пучка H' должна быть вершина y , а вторым полюсом — одна из вершин p или q . Докажем, что если вторым полюсом пучка H' является вершина q , то $w_{G'}(H') \leq 3$. Действительно, согласно сделанным предположениям обе вершины графа G' , расположенные рядом с вершиной v_2 в окружении вершины y , отличны от q и являются B -вершинами. Из этого следует, что обе эти вершины могут быть лишь концевыми в H' , откуда $w_{G'}(H') \leq 3$. Следовательно, полюсами пучка H' являются вершины y и p , а ребро yp — родительское

в H' . При этом вершина v_2 концевая в пучке H' , а его родительское ребро $ур$ инцидентно в графе G' треугольной грани $уwr$, где w — некоторая внутренняя вершина пучка H' (рис. 10, а). Помещая в графе G_0 вершину x на BB -ребро $ур$ и добавляя ребра xv_2 и xw , совершаем подшаг триангулирования (рис. 10, б).

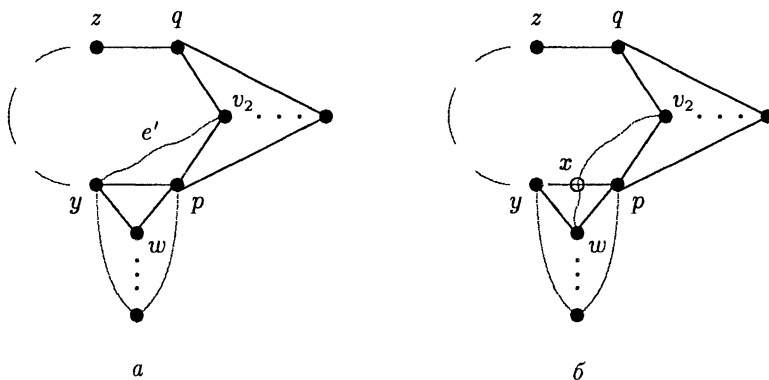


Рис. 10

СЛУЧАЙ 5. Ребро $e = pv_1$ принадлежит граничной цепи $P_1 = pv_1q$ пучка H . Рассмотрим следующие два подслучая:

5.1) $P_2 = pv_2q$, т. е. цепь P_2 не является родительским ребром в H (рис. 11, а);

5.2) $P_2 = pq$, т. е. цепь P_2 является родительским ребром в H (рис. 15, а).

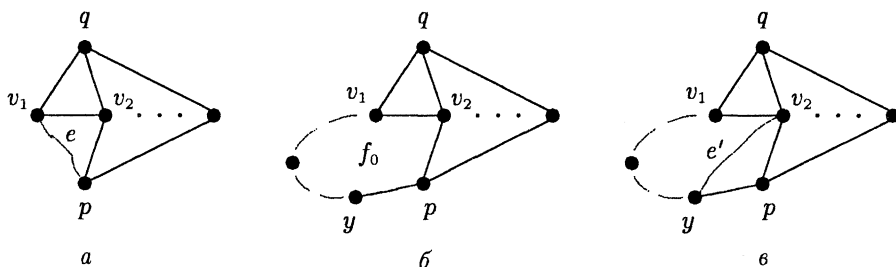


Рис. 11

Рассмотрим подслучай 5.1. Будем считать, что $v_1v_2 \in E(G_0)$ (если $v_1v_2 \notin E(G_0)$, то все дальнейшие рассуждения проводятся по той же схеме с очевидными упрощениями). Рассмотрим в графе G_0 нетреугольную грань $f_0 = v_1v_2py \dots$ (рис. 11, б). Если граничный цикл грани f_0 содержит хотя бы одну L -вершину t , отличную от v_1 и v_2 , то, как и в случае 4, добавляя к графу G_0 ребро v_2t , совершаем шаг триангулирования (не создавая при этом кратных ребер).

Пусть все вершины, инцидентные грани f_0 и отличные от v_1 и v_2 , являются B -вершинами в G_0 . Сначала рассмотрим случай, когда $r(f_0) \geq 5$. В этом случае вершины y и v_1 не являются соседними в граничном цикле грани f_0 (рис. 11, б). Положим $G' = G_0 + e'$, где $e' = uv_2$. Если $G' \in \mathcal{K}$, то шаг триангулирования сделан (рис. 11, в). Пусть $G' \notin \mathcal{K}$. Рассуждая, как и в случае 4, приходим к выводу, что в графе G' ребро e' вертикальное в некотором пучке H' ширины не менее 6. При этом одним из полюсов пучка H' является вершина y , а другим — одна из вершин p, q или v_1 (последнее возможно, если v_1 есть B -вершина в G_0).

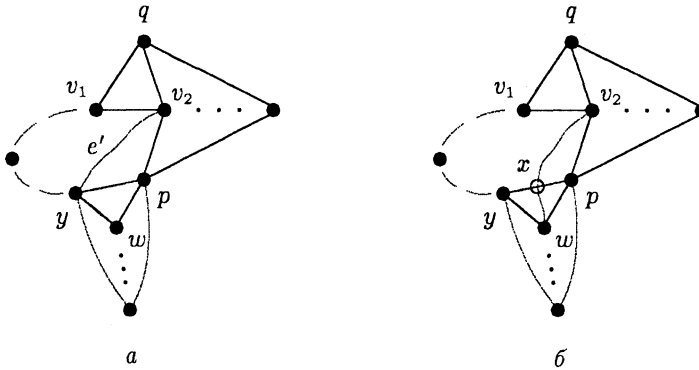


Рис. 12

Случаи, когда второй полюс пучка H' совпадает с одной из вершин v_1 или q , отвергаются таким же образом, как и при рассмотрении случая 4. Следовательно, полюсами пучка H' являются вершины y и p , а ребро yp — родительское в H' . Тогда вершина v_2 является концевой в H' , а ребро yp инцидентно треугольной грани ypw в G' , где w — внутренняя вершина пучка H' (рис. 12, а). Теперь, помещая вершину x на BB -ребро yp в G_0 и добавляя ребра xv_2 и xw , совершаем подшаг триангулирования (рис. 12, б).

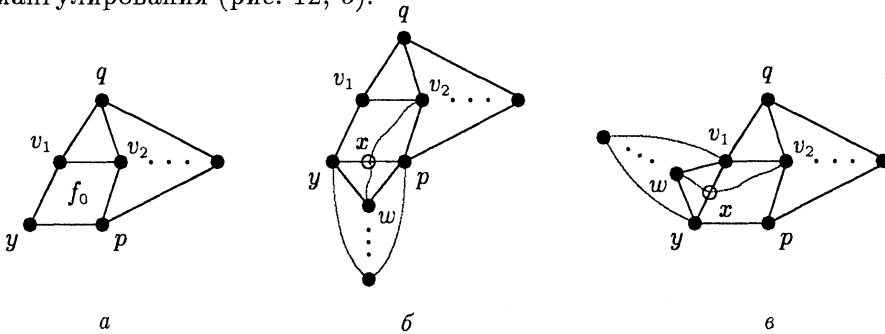


Рис. 13

Предположим, что грань f_0 является четырехугольной, т. е. $f_0 = v_1v_2py$ (рис. 13, а). В этом случае после добавления к графу G_0 ребра

$e' = uv_2$ может образоваться пучок H' с одной из пар полюсов: (y, p) , (y, q) или (y, v_1) (последнее возможно, если v_1 является B -вершиной). Заметим, что в первом и последнем случаях вершина v_2 концевая в пучке H' . При этом в графе G' ребро up (соответственно uv_1) является родительским для пучка H' и инцидентно треугольной грани upr (соответственно upv_1), где w — внутренняя вершина пучка H' . Тогда, помещая в G_0 вершину x на BB -ребро up (соответственно uv_1) и добавляя ребра xv_2 и xw , совершаем подшаг триангулирования (рис. 13, б, в).

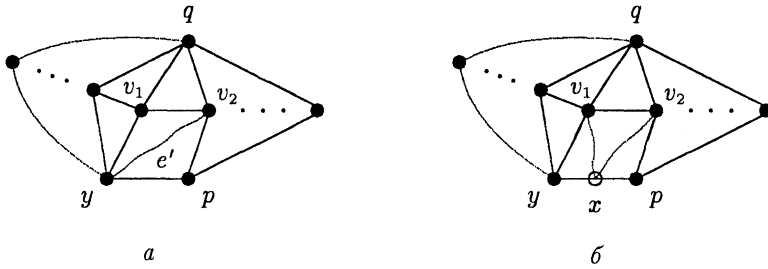


Рис. 14

Допустим, что полюсами пучка H' являются вершины y и q (рис. 14, а). Тогда одна из вершин v_2 или p концевая в H' , поскольку вершина p является B -вершиной. Отсюда следует, что вершина v_1 внутренняя в H' , в частности v_1 является младшей вершиной в G_0 . Поэтому, помещая в G_0 вершину x на BB -ребро up и добавляя ребра xv_1 и xv_2 , совершаем подшаг триангулирования (рис. 14, б). Этим завершается рассмотрение подслучая 5.1.

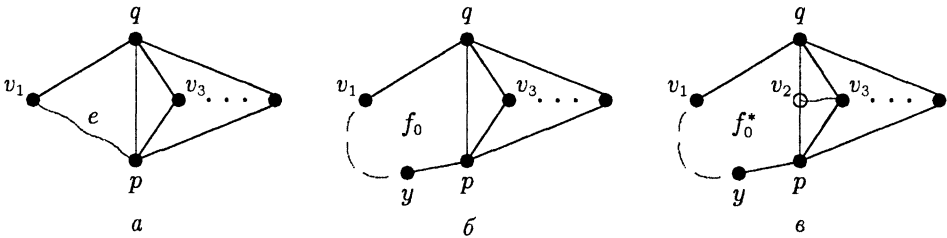


Рис. 15

Пусть имеет место подслучай 5.2 (рис. 15, а). Тогда в графе G_0 BB -ребро $pq = P_2$ инцидентно треугольной грани pv_3q и нетреугольной грани $f_0 = v_1qpy \dots$, где v_3 — внутренняя вершина пучка H (рис. 15, б).

Разместим в графе G_0 новую вершину v_2 на ребре pq и добавим ребро v_2v_3 (рис. 15, в). Полученный плоский граф обозначим через G_0^* . Из замечаний § 3 следует, что $G_0^* \in \mathcal{K}$, причем $\tau(G_0^*) = \tau(G_0) + 1$ и $\beta(G_0^*) = \beta(G_0) - 1$. Очевидно, что граф G_0^* содержит грань $f_0^* = v_1qv_2py \dots$, где

$\tau(f_0^*) = \tau(f_0) + 1 \geq 5$. Приведенные выше соотношения для $\tau(G_0^*)$ и $\beta(G_0^*)$ показывают, что для выполнения шага триангулирования в отношении графа G_0 в графе G_0^* достаточно уменьшить значение параметра τ на 2, а для выполнения подшага триангулирования достаточно уменьшить значение $\tau(G_0^*)$ на 1, не увеличивая при этом $\beta(G_0^*)$.

Если в графе G_0^* имеются две различные L -вершины u_1 и u_2 , инцидентные грани f_0^* и отличные от вершины v_2 , то добавление к графу G_0^* ребер v_2u_1 и v_2u_2 является шагом триангулирования (в отношении графа G_0). Пусть среди вершин, инцидентных грани f_0^* и отличных от вершины v_2 , имеется не более одной L -вершины. Тогда не более чем одна из вершин y или v_1 является L -вершиной в G_0^* (следовательно, и в G_0). Сначала рассмотрим случай, когда обе указанные вершины являются B -вершинами. Положим $G' = G_0^* + e'$ и $G'' = G_0^* + e''$, где $e' = yv_2$ и $e'' = v_1v_2$. Если хотя бы один из графов G' или G'' является контрпримером, то подшаг триангулирования сделан. Для доказательства достаточно заметить, что операция добавления к графу G_0^* ребра e' или e'' не увеличивает числа BB -ребер в G_0^* .

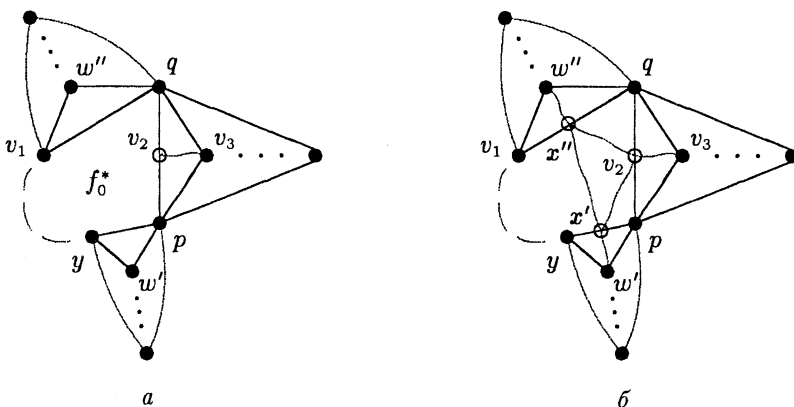


Рис. 16

Предположим, что $G' \notin \mathcal{K}$ и $G'' \notin \mathcal{K}$. Рассуждая так же, как и в ранее рассмотренных случаях, заключаем, что в графе G' ребро e' является вертикальным в некотором пучке H' ширины не менее 6. При этом одним из полюсов пучка H' является вершина y , а другим — одна из вершин p или q . Случай, когда вторым полюсом пучка H' является вершина q , отвергается так же, как при рассмотрении случая 4. Следовательно, полюс пучка H' — это вершины y и p , а ребро yp является родительским в H' . Так как вершина v_2 концевая в H' , то в графе G' ребро yp инцидентно треугольной грани $uw'p$, где w' — внутренняя вершина пучка H' . Так как $G'' \notin \mathcal{K}$, то (в силу аналогичных причин) в графе G_0^* ребро v_1q инцидентно треугольной грани $v_1w''q$, где w'' — младшая

является полюсом пучка H . Эту вершину обозначим через t . Рассмотрим в пучке H некоторую строго внутреннюю вершину w . Так как вершина t является L -вершиной в G , то в G имеется легкая предполная звезда при вершине w , состоящая из вершины t , а также из одной или двух смежных с w внутренних вершин пучка H . Полученное противоречие с условием $G \in \mathcal{X}$ завершает доказательство следствия 3, а значит, и теоремы 2.

§ 5. Верхние оценки для минимальной 2-дистанционной степени вершин в плоских графах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число вершин графа G , находящихся на расстоянии не более 2 от вершины $v \in V(G)$, назовем *2-дистанционной степенью* вершины v и обозначим через $d_2(v)$.

В соответствии с определением 2-дистанционная степень вершины v равна ее обычной степени в квадрате графа G , который обозначим через G^2 . Будем использовать обозначения $\delta_2(G)$ для минимальной 2-дистанционной степени вершин графа G $\delta_2^*(G)$ для минимальной 2-дистанционной степени *младших* вершин в G . Очевидно, что $\delta_2(G) \leq \delta_2^*(G)$.

Обозначим через $\Delta(G) = \Delta$ максимальную степень вершин плоского графа G . Структурный результат теоремы 2 позволяет доказать следующие верхние оценки для величин $\delta_2(G)$ и $\delta_2^*(G)$, являющиеся точными при $\Delta \geq 47$.

Теорема 3. Для любого плоского графа G справедливы оценки

- а) $\delta_2(G) \leq \max\{\Delta + 38; \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil\}$;
- б) $\delta_2^*(G) \leq \max\{\Delta + 38; \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1\}$.

В частности, при $\Delta \geq 47$ справедливы достижимые оценки $\delta_2(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil$ и $\delta_2^*(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$.

Доказательство. Пусть для графа G выполнено утверждение (А) теоремы 2. Тогда некоторая младшая вершина u графа G является центром полной звезды веса не более $\Delta + 38$. Так как величина $d_2(u)$ не превосходит веса полной звезды при вершине u , то $\delta_2(G) \leq \delta_2^*(G) \leq \Delta + 38$.

Пусть для графа G выполнено утверждение (В) теоремы 2. Тогда в графе G имеется пучок H ширины $k \geq 6$ с полюсами в B -вершинах b и t , содержащий строго внутреннюю вершину u . Оценим сверху величину $d_2(u)$ через величины $d(b)$, $d(t)$ и k . Из определения строго внутренней вершины следует, что любая вершина графа G , находящаяся на расстоянии не более 2 от вершины u , смежна или совпадает с одним из полюсов b или t . При этом любая собственная вершина пучка H смежна

с каждым полюсом. Поэтому если пучок H не имеет родительского ребра, то

$$d_2(u) \leq d(b) + d(t) - k + 1. \quad (2)$$

Если же H содержит родительское ребро, то

$$d_2(u) \leq d(b) + d(t) - k. \quad (2')$$

Если имеет место один из случаев (i) или (ii) из утверждения (В) теоремы 2, то, используя условия $k > d(b)/5$ и $k = d(b)/5$ в неравенствах (2) и (2') соответственно, получаем оценку

$$d_2(u) < \frac{4}{5}d(b) + d(t) + 1 \leq \frac{9}{5}\Delta + 1.$$

Следовательно,

$$\delta_2(G) \leq \delta_2^*(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil.$$

Пусть имеет место случай (iii) из утверждения (В) теоремы 2. В этом случае в графе G имеется B -вершина b , являющаяся полюсом для пяти пучков H_1, \dots, H_5 ширины $d(b)/5$ без родительских ребер. Полюса этих пучков, отличные от вершины b , обозначим через t_1, \dots, t_5 . Для любой строго внутренней вершины u пучка H_i из неравенства (2) следует, что

$$d_2(u) \leq \frac{4}{5}d(b) + d(t_i) + 1 \leq \frac{9}{5}\Delta + 1.$$

Поэтому

$$\delta_2^*(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1.$$

Докажем, что $\delta_2(G) \leq \Delta + 38$. Для этого оценим сверху величину $d_2(b)$. Заметим, что кроме вершин, смежных с вершиной b , в ее 2-дистанционное окружение входят вершины t_1, \dots, t_5 , а также некоторые вершины, смежные с концами пучков H_i . Эти последние вершины назовем *внешними* для b . Из условий, наложенных на степени концевых вершин пучков и на их смежность (см. формулировку теоремы 2), следует, что каждая концевая вершина $v_i \neq v_0$ смежна не более чем с двумя внешними вершинами, а вершина v_0 смежна не более чем с 9 внешними вершинами. Отсюда получаем неравенство

$$d_2(b) \leq d(b) + 5 + 9 \cdot 2 + 9 \leq \Delta + 32 < \Delta + 38,$$

которое обеспечивает нужную оценку для $\delta_2(G)$.

Итак, во всех возможных случаях доказаны верхние оценки а) и б) из теоремы 3. Так как при $\Delta \geq 47$ выполняется неравенство

$$\Delta + 38 \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1,$$

то при всех таких Δ справедливы оценки $\delta_2(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil$ и $\delta_2^*(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$.

Для доказательства неуллучшаемости последних двух оценок рассмотрим плоский граф J , называемый *графом икосододекаэдра* (его фрагмент изображен на рис. 18, а), т. е. многогранника, получаемого из додекаэдра отсечением всех его вершин. При этом каждая вершина исходного додекаэдра в графе J преобразуется в треугольную грань, инцидентную трем новым вершинам степени 3, а каждая грань додекаэдра преобразуется в новую грань ранга 10 в J , смежную с пятью десятиугольными и пятью треугольными гранями.

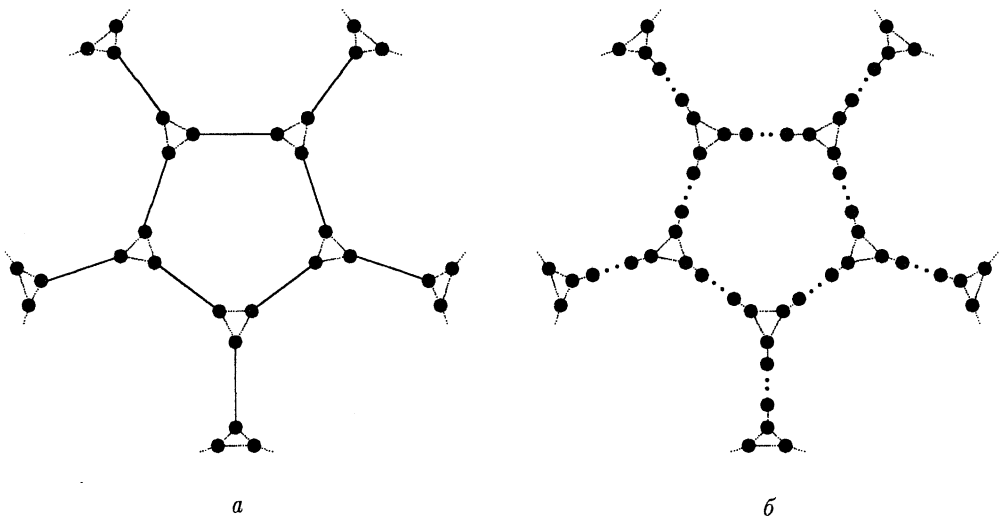


Рис. 18

На каждом ребре графа J , инцидентном двум десятиугольным граням, разместим $k-2$ новые вершины степени 2 ($k \geq 6$), т. е. каждое такое ребро графа J заменим на цепь длины $k-1$. В результате получим плоский граф J_k , содержащий 12 граней ранга $5k$ и 20 треугольных граней (рис. 18, б). В центре каждой грани f_i ранга $5k$ графа J_k ($i = 1, \dots, 12$) поместим новую вершину b_i и соединим ее ребрами со всеми вершинами, инцидентными грани f_i . В результате получим плоскую триангуляцию T_k , в которой каждая вершина b_i ($i = 1, \dots, 12$) имеет степень $\Delta = 5k$ и является полюсом для пяти пучков ширины k без родительских ребер с концевыми вершинами степени 5 (т. е. для T_k выполнено утверждение (iii) пункта (В) теоремы 2). Фрагмент триангуляции T_k изображен на рис. 19, а.

Прямой подсчет 2-дистанционных степеней младших вершин в T_k показывает, что $\delta_2^*(T_k) = 9k + 1 = \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$, т. е. для триангуляции T_k достигается верхняя оценка из б) теоремы 3. Чтобы перенести данный результат на случай, когда максимальная степень Δ не кратна 5,

в триангуляции T_k ширину некоторых пучков достаточно увеличить на 1 и сделать равной $k+1$, а ширину других пучков оставить равной k (так чтобы степени всех вершин b_i остались равны между собой).

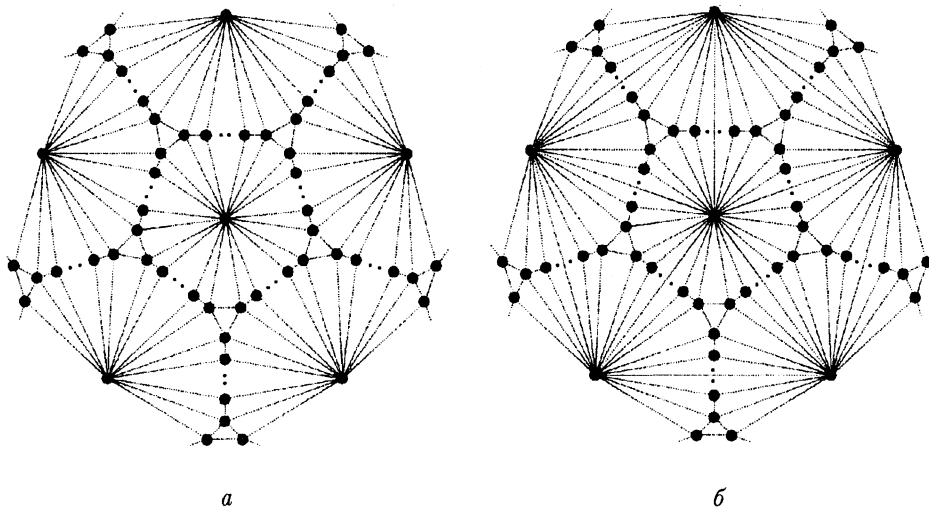


Рис. 19

Заметим, что 2-дистанционная степень каждой вершины b_i ($i = 1, \dots, 12$) в триангуляции T_k равна $\Delta+5$. Поэтому для T_k не достигается верхняя оценка из а) теоремы 3. Чтобы доказать точность оценки а), из каждого пучка в T_k удалим одну строго внутреннюю вершину и вместо нее добавим родительское ребро $b_i b_j$. Тогда в полученной триангуляции T'_k (рис. 19, б) минимальное значение 2-дистанционной степени достигается на младших вершинах и равно $9k = \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil$, что доказывает точность оценки а) в случае, когда максимальная степень Δ кратна 5. Если Δ не кратна 5, некоторые пучки в T'_k достаточно заменить пучками ширины $k+1$ без родительских ребер, а остальные пучки сохранить без изменений. Теорема 3 доказана.

Следствие 4. Если в плоском графе G каждая B -вершина b является полюсом для пучков ширины менее $d(b)/5$, то $\delta_2^*(G) \leq \Delta+38$. В частности, последнее неравенство верно, если ширина любого пучка в G не превосходит 5.

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 1.

§ 6. Верхние оценки для (p, q) -хроматических чисел плоских графов

Одно из применений структурного результата теоремы 2 и доказанных верхних оценок для величин $\delta_2(G)$ и $\delta_2^*(G)$ состоит в получении

верхних оценок для минимального числа цветов в так называемых (p, q) -раскрасках плоских графов. Ниже дается определение (p, q) -раскраски и ее наиболее известного частного случая — 2-дистанционной раскраски.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для любых двух неотрицательных целых чисел p и q назовем (p, q) -раскраской вершин графа G в k цветов отображение $\varphi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, обладающее свойствами:

- 1) $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq p$ при $uv \in E(G)$;
- 2) $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq q$ при $d(u, v) = 2$.

Наименьшее натуральное число k , при котором существует (p, q) -раскраска вершин графа G в k цветов, называется (p, q) -хроматическим числом графа G и обозначается через $\chi_{p,q}(G)$. Если каждой вершине v поставлено в соответствие собственное множество цветов \mathcal{C}_v , состоящее из k различных целых чисел, то рассматриваются такие отображения $\varphi : V(G) \rightarrow \bigcup_{v \in V} \mathcal{C}_v$, обладающие свойствами 1 и 2, что $\varphi(v) \in \mathcal{C}_v$ для

каждой вершины $v \in V(G)$. В этом случае говорят о *предписанных* (p, q) -раскрасках графа G , отвечающих системе предписаний $\{\mathcal{C}_v\}_{v \in V}$ мощности k . Наименьшее натуральное число k , при котором для любой системы предписаний мощности k существует отвечающая ей предписанная (p, q) -раскраска, называется *списочным* (p, q) -хроматическим числом графа G и обозначается через $\chi_{p,q}^l(G)$. Очевидно, что $\chi_{p,q}(G) \leq \chi_{p,q}^l(G)$. При этом любая (предписанная) $(1, 1)$ -раскраска вершин графа G называется *(предписанной) 2-дистанционной раскраской*, а соответствующее ей хроматическое число $\chi_{1,1}(G)$ ($\chi_{1,1}^l(G)$) — *(списочным) 2-дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$ ($\chi_2^l(G)$).

Эквивалентное определение 2-дистанционной раскраски состоит в том, что любые две вершины графа G , находящиеся на расстоянии не более 2, окрашены различно. Следовательно, понятие 2-дистанционной раскраски вершин графа G равносильно понятию правильной раскраски вершин графа G^2 , а 2-дистанционное хроматическое число $\chi_2(G)$ ($\chi_2^l(G)$) совпадает с обычным хроматическим числом $\chi(G^2)$ ($\chi^l(G^2)$).

Для любого целого числа x положим $x^* = \max\{0, 2x - 1\}$.

Теорема 4. При $p \geq q \geq 0$ для любого плоского графа G справедливы оценки:

- а) $\chi_{p,q}^l(G) \leq 5p^* + 53q^* + 1$ при $\Delta \leq 20$;
- б) $\chi_{p,q}^l(G) \leq 1 + \max\{5p^* + (\Delta + 33)q^*; 4p^* + (\lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor - 3)q^*\}$ при $\Delta \geq 21$.

Доказательство. Рассмотрим контрпример G к утверждению а) с минимальным числом вершин и отвечающую ему недопустимую систему предписаний $\{\mathcal{C}_v\}_{v \in V}$ мощности $5p^* + 53q^* + 1$. Так как

$\Delta(G) = \Delta \leq 20$, то для графа G не может выполняться утверждение (В) теоремы 2. Следовательно, выполняется утверждение (А), т. е. существует младшая вершина u , являющаяся центром предполной звезды веса не более 38. Пусть w — вершина наименьшей степени, смежная с вершиной u в G . Обозначим через G_1 плоский граф, полученный стягиванием ребра uw в G и удалением возникающих кратных ребер. Положим $w_1 = u * w \in V(G_1)$ и вершине w_1 поставим в соответствие предписание \mathcal{C}_w вершины w .

Докажем, что $\Delta(G_1) \leq 20$. Достаточно убедиться, что $d(w_1) \leq 20$. Так как

$$d(w_1) \leq d_G(u) + d_G(w) - 2, \quad (3)$$

то $d(w_1) \leq 20$ при $d(u) \leq 2$. Если $d(u) = 3$ ($d(u) \geq 4$), то из выбора вершины w и верхней оценки на вес предполной звезды при вершине u следует, что $d(w) \leq 19$ ($d(w) \leq 12$). Отсюда, учитывая (3), получаем, что $d(w_1) \leq 20$, т. е. $\Delta(G_1) \leq 20$.

Из минимальности выбора контрпримера G следует существование предписанной (p, q) -раскраски φ_1 графа G_1 , согласованной с множеством предписаний $\{\mathcal{C}_v\}_{v \in V - u}$. Эта раскраска индуцирует (p, q) -раскраску на множестве вершин $V(G) - u$ графа G (так как расстояние между любыми двумя вершинами из этого множества в G не меньше соответствующего расстояния в G_1). Докажем, что раскраска φ_1 продолжается на вершину u . Заметим, что цвет каждой вершины, находящейся на расстоянии 1 или 2 от вершины u , накладывает соответственно p^* или q^* ограничений на выбор цвета для вершины u . Из неравенств $d(u) \leq 5$ и $d_2(u) \leq \Delta + 38 \leq 58$ следует, что в 2-дистанционном окружении вершины u имеется не более 5 вершин, задающих p^* таких запретов, и не более 53 вершин, задающих q^* запретов, что гарантирует наличие свободного цвета для вершины u в множестве \mathcal{C}_u .

Докажем неравенство б). Для этого снова рассмотрим минимальный по числу вершин контрпример G с максимальной степенью $\Delta(G) = \Delta \geq 21$. Если для графа G выполняется утверждение (А) теоремы 2, то определим плоский граф G_1 с $\Delta(G_1) \leq \Delta$ и системой предписаний мощности $1 + \max\{5p^* + (\Delta + 33)q^*; 4p^* + (\lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor - 3)q^*\}$ так же, как в случае а). Из минимальности выбора графа G и уже доказанного утверждения а) следует существование предписанной (p, q) -раскраски φ_1 графа G_1 . Используя неравенства $d(u) \leq 5$ и $d_2(u) \leq \Delta + 38$, как и в случае а) заключаем, что раскраска φ_1 может быть продолжена на вершину u .

Пусть для графа G выполняется утверждение (В) теоремы 2. В качестве вершины u выберем некоторую строго внутреннюю вершину пучка H , существование которого следует из теоремы 2. Обозначим через w соседнюю с u внутреннюю вершину этого пучка. Определим граф G_1

как результат отождествления вершин u и w в G (или стягивания ребра uw , если $uw \in E(G)$). Вершине $u * w$ графа G_1 поставим в соответствие предписание \mathcal{C}_w и воспользуемся предписанной (p, q) -раскраской φ_1 графа G_1 . Из полученных при доказательстве теоремы 3 неравенств $d(u) \leq 4$ и $d_2(u) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$ следует возможность продолжения раскраски φ_1 на вершину u . Теорема 4 доказана.

Следствие 5. Для любого плоского графа G справедливы оценки

а) $\chi_2^l(G) \leq 59$ при $\Delta \leq 20$;

б) $\chi_2^l(G) \leq 1 + \max\{\Delta + 38; \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil\}$ при $\Delta \geq 21$.

В частности, $\chi_2^l(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil + 1$ при $\Delta \geq 47$.

Доказательство. Утверждение а) следует из соответствующего утверждения теоремы 4 при $p = q = 1$. Доказательство утверждения б) повторяет доказательство пункта б) теоремы 4 со следующими изменениями в случае, когда минимальный контрпример G удовлетворяет утверждению (В) теоремы 2. В случаях (i) и (ii) из этого утверждения воспользуемся неравенством $d_2(u) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil$, из которого следует, что $\chi_2^l(G) \leq 1 + \max\{\Delta + 38; \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil\}$. Если имеет место случай (iii), то применим полученные при доказательстве теоремы 3 неравенства $d_2(u) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta \rfloor + 1$ и $d_2(b) \leq \Delta + 38$. Раскраску вершин графа G_1 (отвечающую заданной системе предписаний мощности $1 + \max\{\Delta + 38; \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil\}$) сначала перенесем на множество вершин $V(G) - \{u, b\}$ графа G (не придавая цвета вершине b), а затем последовательно покрасим в G вершины u и b . Следствие 5 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин О. В. Раскраски и топологические представления графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 3–27.
2. Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван ден Хойвел Я. Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звезд // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 15–39.
3. Agnarsson G., Halldórsson M. M. Coloring powers of planar graphs // Unpublished manuscript. 2000.
4. Borodin O. V. Triangulated 3-polytopes without faces of low weight // Discrete Math. 1998. V. 186, N 1–3. P. 281–285.
5. Borodin O. V., Woodall D. R. Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
6. Van den Heuvel J., McGuinness S. Colouring the square of a planar graph // Unpublished manuscript. 1999.

7. Jendrol S., Madaras T., Soták R., Tuza Z. On light cycles in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 197/198. P. 453–467.
8. Jensen T. R., Toft B. Graph coloring problems. New York: John-Wiley & Sons, 1995.
9. Shannon C. E. A theorem on coloring the lines of a network // J. Math. and Phys. 1949. V. 28. P. 148–151.
10. Wegner G. Graphs with given diameter and a coloring problem // Technical Report. Univ. of Dortmund, 1977.

Адреса авторов:

Статья поступила
2 августа 2001 г.

О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: borodin@math.nsc.ru,
angle@math.nsc.ru

H. Broersma

University of Twente,
Enschede, Netherlands.
E-mail:

broersma@math.utwente.nl

Jan van den Heuvel

Centre for Discrete
and Applicable Mathematics,
Dep. of Mathematics London
School of Economics,
Houghton Street,
London WC2A 2AE, U. K.