ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2001. Серия 1. Том 8, № 4, 34–53

УДК 519.172.2

О РАЗБИЕНИИ ПЛОСКОГО ГРАФА ОБХВАТА 5 НА ПУСТОЙ И АЦИКЛИЧЕСКИЙ ПОДГРАФЫ*)

О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Доказано предположение А. В. Пяткина и М. Штибица о том, что множество вершин любого плоского графа G обхвата не менее 5 можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 такие, что множество V_1 является независимым в G, а множество V_2 порождает лес.

Введение

Граф G называется *k-вырожденным* при некотором положительном целом k, если любой подграф графа G содержит вершину степени меньше k. Например, пустой граф является 1-вырожденным, а ациклический граф (лес) — 2-вырожденным. Индукцией по числу вершин нетрудно доказать, что хроматическое число $\chi(G)$ любого k-вырожденного графа G не превосходит k. Граф G называется *$(k_1, k_2, \dots, k_m)$-разложимым*, если существует такое разбиение множества его вершин на m подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_m$, что при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ порожденный подграф $G[V_i]$ является k_i-вырожденным. Заметим, что наименьшее целое m, при котором граф G является $(1, 1, \dots, 1)$-разложимым, есть хроматическое число $\chi(G)$, а наименьшее m, при котором граф G является $(2, 2, \dots, 2)$-разложимым, называется *вершинной древесностью* графа G и обозначается через $\rho(G)$.

Нетрудно доказать по индукции, что $\rho(G) \leqslant 3$ для любого плоского графа G. Г. Чартрэнд и Г. В. Кронк [2] показали, что эта оценка является неулучшаемой, построив пример такой плоской триангуляции T, что $\rho(T) = 3$. С. К. Штейн [7, 8] доказал, что любой плоский граф является (1,2,2)-разложимым. Более сильный результат получен О. В. Бородиным [1]. Он состоит в том, что любой плоский граф допускает ациклическую раскраску в 5 цветов (*ациклической* называется правильная

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581) и INTAS (грант 97–1001), второго автора — при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (грант 047–008–006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00916).

раскраска вершин графа, при которой каждый подграф, порожденный вершинами двух цветов, является ациклическим). С другой стороны, Г. Вегнер [9] построил пример плоского графа, не являющегося (1,1,2)-разложимым.

Из результатов о раскрасках и разложениях плоских графов с заданным обхватом наиболее известна теорема Грецша [3] о том, что любой плоский граф обхвата 4 является 3-раскрашиваемым. Гипотеза Грюнбаума [4] об ациклической 4-раскрашиваемости таких графов (1973) была опровергнута А. В. Косточкой и Л. С. Мельниковым [6]. Недавно А. В. Пяткин и М. Штибиц (личное сообщение в 2000 г.) высказали следующие предположения о разложимости плоских графов обхвата 5.

1. Любой плоский граф обхвата 5 является (1,2)-разложимым.

2. Множество ребер любого плоского графа обхвата 5 допускает разбиение на лес и звездный лес (т. е. ациклический граф, не содержащий цепей длины 3).

Доказанная ниже теорема 1 подтверждает истинность первого предположения, в то время как второе предположение нуждается в дальнейшем изучении. Также не известно, всякий ли плоский граф обхвата 4 является (1,2)-разложимым. Если последнее верно, то это усиливает теорему Грецша, которая утверждает лишь, что любой такой граф является (1,1,1)-разложимым.

1. Определения и формулировка основного результата

Далее под плоским графом всюду понимается обыкновенный плоский граф без петель и кратных ребер. Через $V(G), E(G)$ и $F(G)$ обозначаются множества вершин, ребер и граней плоского графа G соответственно. Используются обозначения $d(v)$ для степени вершины $v \in V(G)$ и $r(f)$ для ранга грани $f \in F(G)$. Под d-вершиной и r-гранью понимаются вершина степени d и грань ранга r соответственно. Через $g(G)$ обозначается обхват графа G. Если u и v — две различные вершины графа G, то под *u-v-цепью* понимается любая простая цепь, соединяющая вершины u и v.

Для произвольного подмножества вершин $X \subset V(G)$ обозначим через $G[X]$ подграф графа G, порожденный множеством вершин X. Если C — простой цикл, то под $\operatorname{Int} C$ ($\operatorname{Ext} C$) будем понимать множество вершин графа G, расположенных строго внутри (вне) цикла C, и положим $\operatorname{Int}^* C = \operatorname{Int} C \cup V(C)$ и $\operatorname{Ext}^* C = \operatorname{Ext} C \cup V(C)$. Назовем цикл C *разделяющим* в G, если $\operatorname{Int} C \neq \varnothing$ и $\operatorname{Ext} C \neq \varnothing$, т. е. внутри и вне цикла C имеется хотя бы одна вершина графа G.

Теорема 1. *Если плоский граф G удовлетворяет условию $g(G) \geqslant 5$, то существует такое разбиение множества вершин $V(G)$ на подмножества V_1 и V_2, что множество V_1 является независимым в G, а подграф $G[V_2]$ является ациклическим.*

Замечание 1. С использованием введенного выше понятия разложимости теорема 1 утверждает, что любой плоский граф обхвата 5 является (1,2)-разложимым.

Для доказательства теоремы 1 убедимся в справедливости более сильного утверждения (теорема 2), для чего введем ряд вспомогательных определений. В условиях теоремы 1 рассмотрим раскраску вершин графа G в два цвета, порожденную разбиением $V(G) = V_1 \cup V_2$, т. е. такое отображение $\phi : V(G) \to \{1,2\}$, что $\phi(x) = 1$ при $x \in V_1$ и $\phi(x) = 2$ при $x \in V_2$. Пусть вершины 1-го цвета образуют независимое множество в G, а вершины 2-го цвета порождают лес. Тогда такую раскраску вершин графа G назовем (1,2)–*раскраской* графа G. Если на некотором подмножестве вершин $X \subset V(G)$ задано отображение $\varphi : X \to \{1,2\}$, то φ будем называть *допустимой предраскраской* множества X, если φ порождает (1,2)-раскраску вершин графа $G[X]$.

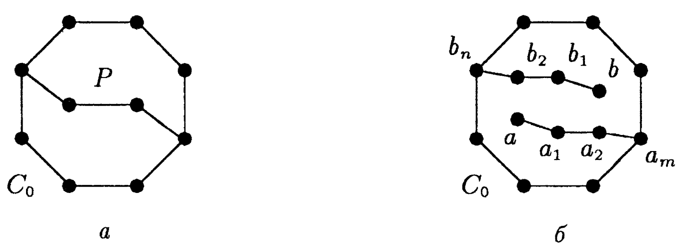


Рис. 1. Проективный цикл и проективная a-b-цепь

Обозначим через f_0 внешнюю грань плоского графа G и через C_0 граничный цикл грани f_0. Будем называть *граничными вершинами* (*ребрами*) графа G вершины (ребра), инцидентные грани f_0, а *граничными гранями* — грани, смежные с гранью f_0. Вершины графа G, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*, а вершины, не смежные с граничными вершинами, — *строго внутренними*. Назовем *проективным циклом* в G любую простую цепь P длины не менее 2, соединяющую две различные граничные вершины и не содержащую других граничных вершин графа G (рис. 1, *а*). Если a и b — две различные внутренние вершины графа G, то *проективной a-b-цепью* назовем любую пару не пересекающихся по вершинам простых цепей $aa_1 \ldots a_m$ и $bb_1 \ldots b_n$, где вершины a_m и b_n являются граничными в G, а вершины a_i, b_j являются внутренними при $i < m$, $j < n$ (рис. 1, *б*). Под

обобщенным циклом (*обобщенной* a-b-*цепью*) условимся понимать обычный цикл (a-b-цепь) или проективный цикл (проективную a-b-цепь) в G.

Теорема 2. *Пусть G — такой связный плоский граф, что $g(G) \geqslant 5$ и $5 \leqslant r(f_0) \leqslant 8$. Тогда любая допустимая предраскраска φ множества граничных вершин $V(C_0)$ может быть продолжена до $(1,2)$-раскраски ϕ вершин графа G таким образом, что в G отсутствуют проективные циклы, состоящие из вершин цвета* 2.

Замечание 2. Последнее свойство раскраски ϕ можно сформулировать следующим образом: любые две вершины, окрашенные цветом 2 в предраскраске φ и принадлежащие различным компонентам связности в графе $G[\varphi^{-1}(2)]$, принадлежат различным компонентам и в графе $G[\phi^{-1}(2)]$.

Замечание 3. Далее будем называть просто *раскраской* любую (1,2)-раскраску вершин плоского графа, удовлетворяющую требованиям теоремы 2.

Вывод теоремы 1 из теоремы 2. Достаточно доказать теорему 1 в случае, когда граф G является связным. Сначала предположим, что в G имеется грань f ранга от 5 до 8. Не уменьшая общности, грань f можно считать внешней, т. е. $f = f_0$. Из условия $g(G) \geqslant 5$ следует, что граничный цикл C_0 грани f_0 содержит не более одной хорды (что возможно лишь при $r(f_0) = 8$). Это означает, что на множестве $V(C_0)$ может быть задана допустимая предраскраска φ, которая согласно теореме 2 продолжается до некоторой (1,2)-раскраски вершин графа G.

Если в графе G отсутствуют грани ранга от 5 до 8, то выберем любую вершину $x \in V(G)$ и добавим к G новые вершины x_1, x_2, x_3, x_4 и ребра xx_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x так, что в полученном плоском графе G_1 цикл $xx_1x_2x_3x_4$ ограничивает некоторую 5-грань f. Далее применим предыдущие рассуждения.

Доказательство теоремы 2 начнем с изучения минимального контрпримера к ее утверждению.

2. Свойства минимального контрпримера к теореме 2

Пусть граф G является контрпримером к теореме 2 с минимальным числом вершин. Тогда на множестве граничных вершин графа G задана допустимая предраскраска φ_0, которую невозможно продолжить до раскраски вершин графа G.

Докажем, что граф G обладает следующими свойствами.

(2.1) $\delta(G) > 1$.

(2.2) Любая вершина $v \in V(G)$ степени 2 является граничной.

Для доказательства свойств (2.1) и (2.2) предположим, что в графе G имеется вершина v, являющаяся либо граничной степени 1, либо внутренней степени не более 2. Очевидно, что ограничение предраскраски φ_0 на множество $V(C_0) - v$ является допустимой предраскраской внешней грани графа $G - v$. Поэтому из минимальности выбора контрпримера G следует, что существует раскраска ϕ_1 вершин графа $G - v$, являющаяся продолжением предраскраски $\varphi_0(V(C_0) - v)$. Если вершина v является внутренней в G, то из условия $d(v) \leqslant 2$ следует, что раскраска ϕ_1 может быть продолжена на вершину v. Если же $d(v) = 1$ и вершина v является граничной в G, то, полагая $\phi(v) = \varphi_0(v)$, получим искомую раскраску ϕ вершин графа G.

(2.3) В графе G отсутствуют разделяющие циклы длины от 5 до 8.

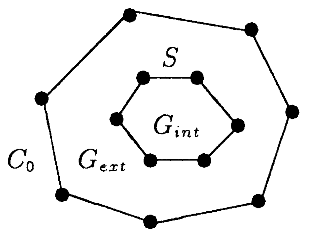


Рис. 2. Разделяющий 6-цикл S в G

Пусть S — какой-нибудь такой цикл. Из минимальности выбора G следует, что предраскраска φ_0 грани f_0 может быть продолжена до раскраски ϕ_{ext} вершин графа $G_{ext} = G[\mathrm{Ext}^* S]$. При этом в графе $G_{int} = G[\mathrm{Int}^* S]$ раскраска ϕ_{ext} индуцирует допустимую предраскраску $\varphi_S = \phi_{ext}|_{V(S)}$ на вершинах внешней грани f_S, ограниченной циклом S (рис. 2). Из минимальности выбора G следует, что предраскраска φ_S может быть продолжена до раскраски ϕ_{int} вершин графа G_{int}. Поскольку в графе G_{int} отсутствуют обобщенные циклы из вершин цвета 2, объединение раскрасок ϕ_{int} и ϕ_{ext} дает раскраску вершин графа G. Противоречие.

(2.4) Граничный цикл C_0 является простым циклом без хорд, и любая внутренняя вершина графа G смежна не более чем с одной граничной вершиной.

То, что C_0 является простым циклом, следует из условий $g(G) \geqslant 5$, $r(f_0) \leqslant 8$ и свойства (2.1). Пусть ребро e является хордой цикла C_0 в G. Тогда из условия $g(G) \geqslant 5$ следует, что $r(f_0) = 8$ и концевые вершины ребра e разделяют цикл C_0 на две цепи длины 4, образующие вместе с ребром e два цикла C_1 и C_2 длины 5 (рис. 3, *а*). Согласно (2.3) циклы C_1 и C_2 не являются разделяющими в G. Отсюда следует, что граф G не имеет ни одной внутренней вершины, а значит, не является контрпримером.

Пусть граф G содержит внутренюю вершину v, смежную с двумя граничными вершинами z_1 и z_2. Обозначим через C_1 и C_2 циклы, образованные в G цепью z_1vz_2 и каждой из граничных z_1-z_2-цепей. Так как $g(G) \geqslant 5$ и $r(f_0) \leqslant 8$, то циклы C_1 и C_2 имеют длину от 5 до 7. Из (2.2) следует, что $d(v) \geqslant 3$. Поэтому либо C_1, либо C_2 является разделяющим циклом в G, что противоречит (2.3) (рис. 3, *б*).

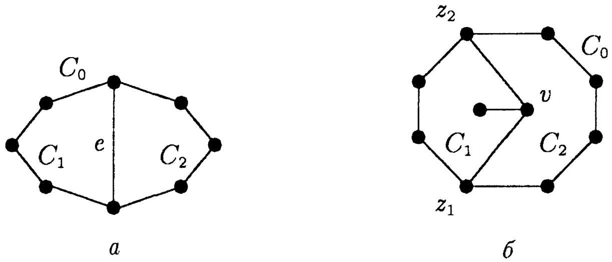


Рис. 3. Хорда e, вершина v и циклы C_1 и C_2

(2.5) Если $r(f_0) > 5$, то никакие две вершины степени 2 не смежны в G.

Пусть $r(f_0) > 5$ и в графе G имеются две смежные вершины z_1 и z_2 степени 2. Из (2.2) следует, что z_1 и z_2 являются граничными вершинами. Обозначим через z_0 и z_3 граничные вершины, смежные с вершинами z_1 и z_2 соответственно и отличные от z_1 и z_2. Докажем, что при замене в графе G цепи $z_0z_1z_2$ на ребро z_0z_2 обхват полученного графа G_1 окажется не меньше 5. Предположим, что в G_1 имеется 4-цикл $z_0z_2z_3x$ (рис. 4). Тогда из условия $r(f_0) > 5$ следует, что вершина x не является граничной в G, а из свойства (2.4) следует, что вершина x не может быть внутренней. Следовательно, $g(G_1) \geqslant 5$. Аналогичным образом доказывается, что обхват графа G_2, полученного заменой в G цепи $z_1z_2z_3$ на ребро z_1z_3, не меньше 5.

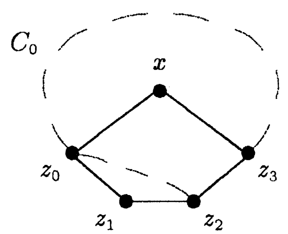


Рис. 4. Смежные 2-вершины z_1 и z_2

Если $\varphi_0(z_0) \neq \varphi_0(z_2)$, то предраскраска φ_0 индуцирует допустимую предраскраску на вершинах внешней грани $z_0z_2z_3\ldots$ графа G_1. Ввиду минимальности контрпримера G эта предраскраска может быть продолжена до раскраски ϕ_1 вершин графа G_1. Полагая $\phi(v) = \phi_1(v)$ при

$v \in V \backslash \{z_1\}$ и $\phi(z_1) = \varphi_0(z_1)$, получим раскраску ϕ вершин графа G. Аналогично рассматривается случай, когда $\varphi_0(z_1) \neq \varphi_0(z_3)$ (используется предраскраска внешней грани графа G_2). Пусть $\varphi_0(z_0) = \varphi_0(z_2)$ и $\varphi_0(z_1) = \varphi_0(z_3)$. Если $\varphi_0(z_1) = 1$, то для получения противоречия воспользуемся предраскраской внешней грани в G_1, иначе — в G_2.

(2.6) Любая строго внутренняя вершина степени 3 инцидентна граням ранга не более 6.

Предположим, что в G имеется строго внутренняя вершина v степени 3, инцидентная грани f ранга не менее 7. Пусть x, y и z (внутренние) вершины графа G, смежные с вершиной v, причем $f = xvy\ldots$ Обозначим через G_1 плоский граф, полученный отождествлением в графе G вершин x и y, а через $x * y$ — общий образ вершин x и y после их отождествления. Тогда из условия $g(G) \geqslant 5$ следует, что в графе G_1 отсутствуют петли и кратные ребра (при этом степень вершины v в G_1 равна 2). Так как отождествляемые вершины x и y графа G являются внутренними в G, то предраскраска φ_0 индуцирует допустимую предраскраску на вершинах внешней грани в графе G_1.

Докажем, что $g(G_1) \geqslant 5$. Предположим, что в графе G_1 имеется цикл C_1 длины не более 4. Тогда цикл C_1 содержит вершину $x * y$, а в графе G имеется x-y-цепь P длины не более 4, не содержащая вершину v (рис. 5).

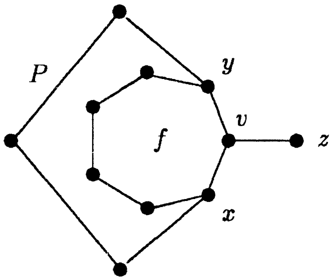


Рис. 5. Вершина v, цепь P и разделяющий цикл C

Докажем, что цикл $C = xPyv$ длины не более 6 является разделяющим в G. Из условия $r(f) \geqslant 7$ следует, что цикл C отличен от граничного цикла грани f; в частности, не все вершины, инцидентные грани f, принадлежат циклу C. Из условия $g(G) \geqslant 5$ следует, что вершина z не лежит на цепи P, а следовательно, не инцидентна грани f. Это означает, что цикл C отделяет вершину z от части вершин, инцидентных грани f в G. Полученное противоречие со свойством (2.3) доказывает, что $g(G_1) \geqslant 5$.

Из установленных свойств графа G_1 и минимальности выбора G следует, что предраскраска внешней грани графа G_1 (индуцированная

предраскраской φ_0) может быть продолжена до раскраски ϕ_1 вершин графа G_1. Положим $\phi(v) = \phi_1(v)$ при $v \in V \backslash \{x, y\}$ и $\phi(x) = \phi(y) = \phi_1(x * y)$. Докажем, что определенная таким образом раскраска ϕ является допустимой (1,2)-раскраской вершин графа G. Действительно, в графе G_1 образы любых двух смежных вершин графа G также смежны. Отсюда и из допустимости раскраски ϕ_1 следует, что множество вершин ϕ^{-1} (1) является независимым в G. С другой стороны, если в графе G имеется обобщенный цикл из вершин цвета 2, то нетрудно убедиться, что образ этого цикла в графе G_1 также состоит из вершин цвета 2 (в раскраске ϕ_1) и содержит обобщенный цикл. Это противоречит допустимости раскраски ϕ_1. Тем самым справедливость свойства (2.6) доказана.

3. Слабые 5-грани и их свойства

Будем называть *слабой* 5*-гранью* в G любую 5-грань, инцидентную не менее чем четырем строго внутренним вершинам степени 3. Пусть $f = v_1v_2v_3v_4v_5$ — слабая 5-грань, причем вершины v_1, v_2, v_3 и v_4 являются строго внутренними степени 3 в G. Тогда вершина v_5 является внутренней. Обозначим через $w_1, \ldots, w_4$ (внутренние) вершины графа G, не инцидентные грани f и смежные с вершинами $v_1, \ldots, v_4$ соответственно. Обозначим через $f_1, f_2 \ldots, f_5$ грани графа G, отличные от грани f и инцидентные ребрам $v_5v_1, v_1v_2, \ldots, v_4v_5$ соответственно (рис. 6–8). Следующая лемма задает необходимые условия существования слабой 5-грани в G и является основной при доказательстве теоремы 2.

Лемма. *В описанных условиях имеет место равенство* $r(f_2) = r(f_3) = r(f_4) = 6$; *при этом верно одно из следующих утверждений*:

(i) *степень хотя бы одной вершины* w_2 *или* w_3 *не меньше* 4,

(ii) $f_3 = v_2w_2yzw_3v_3$ *и хотя бы одна вершина* y *или* z *является граничной степени не менее* 3 *в* G.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно для слабой 5-грани f. Из свойства (2.6) следует, что $5 \leqslant r(f_i) \leqslant 6$ при $i = 1, \ldots 5$. Учитывая это, достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. $r(f_2) = 5$ или $r(f_4) = 5$ (ввиду симметрии эти два условия являются равносильными) (рис. 6).

Случай 2. $r(f_2) = r(f_4) = 6$ и $r(f_3) = 5$ (рис. 7).

Случай 3. $r(f_2) = r(f_3) = r(f_4) = 6$ (рис. 8).

Идея доказательства состоит в том, что в каждом случае 1–3 граф G преобразуется к другому плоскому графу G_1 с меньшим, чем у G, числом вершин таким образом, что предраскраска φ_0 является допустимой

предраскраской вершин внешней грани в G_1. Для графа G_1 проверяется выполнение всех условий теоремы 2 и доказывается существование раскраски ϕ_1, являющейся продолжением предраскраски φ_0. Далее раскраска ϕ_1 используется для получения раскраски ϕ вершин графа G. При реализации указанной схемы на стадии преобразования графа G к графу G_1 требуется следить за соблюдением следующих двух условий.

(SC) В графе G_1 отсутствуют циклы длины меньше 5 (в том числе петли и кратные ребра).

(OUT) Предраскраска φ_0 индуцирует допустимую предраскраску на вершинах внешней грани в графе G_1. В частности, внешняя грань графа G_1 ограничена циклом C_0. При этом никакие две несмежные между собой граничные вершины графа G не становятся смежными или совпадающими в графе G_1.

4. Разбор случая 1

Пусть $r(f_2)=5$ и $f_2=v_1w_1tw_2v_2$ (рис. 6, где для определенности грани f_1, f_3, f_4 и f_5 также изображены пятиугольными). Определим граф G_1 как результат удаления из графа G вершин $v_1, \ldots, v_4$ (на рисунке они не закрашены) и последующего отождествления вершины w_1 с вершиной w_2 и вершины v_5 с вершиной w_3 (ребра w_1t и w_2t также отождествляются). Вершины $w_1 * w_2$ и $v_5 * w_3$ графа G_1 обозначим через A и B соответственно. Так как удаляемые и отождествляемые вершины графа G являются внутренними в G, то для графа G_1 выполняется условие (OUT).

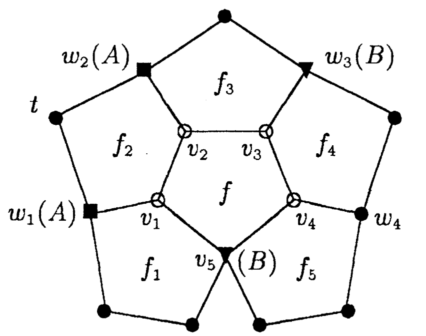


Рис. 6. Конфигурация для случая 1

Докажем, что выполняется условие (SC). Предположим, что в графе G_1 имеется цикл длины не более 4. Очевидно, что цикл C_1 проходит через одну из вершин A или B.

Предположим, что цикл C_1 проходит через вершину A и не проходит через вершину B. Тогда в графе $G' = G - \{v_1, \ldots, v_4\}$ имеется w_1-w_2-цепь P длины не более 4, отличная от цепи w_1tw_2. Из условия $g(G) \geqslant 5$

следует, что цепь P не проходит через вершину t. Поэтому в графе G объединение цепей P и $w_1v_1v_2w_2$ является разделяющим циклом длины не более 7, что противоречит свойству (2.3). Если в графе G_1 цикл C_1 проходит через вершину B, но не проходит через вершину A, то в графе G' имеется v_5-w_3-цепь P длины не более 4. В этом случае из неравенств $r(f_4) \geqslant 5$ и $r(f_5) \geqslant 5$ следует, что в графе G имеется вершина, которая инцидентна одной из граней f_4 или f_5 и не принадлежит цепям P и $v_5v_4v_3w_3$. Из доказанного следует, что объединение цепей P и $v_5v_4v_3w_3$ является разделяющим циклом длины не более 7 в G, что противоречит (2.3).

Наконец, рассмотрим случай, когда в графе G_1 цикл C_1 проходит через вершины A и B. Если цикл C_1 при разотождествлении вершин w_1, w_2 и вершин v_5, w_3 в графе G' не распадается на v_5-w_1-цепь P_1 и w_2-w_3-цепь P_2, то противоречие получается в точности так же, как в выше разобранных случаях. Пусть в графе G' имеется v_5-w_1-цепь P_1 и w_2-w_3-цепь P_2, сумма длин которых не превосходит 4. Из условий $r(f_1) \geqslant 5$ и $r(f_3) \geqslant 5$ следует, что либо грань f_1 инцидентна вершине $x \notin \{w_1, v_1, v_5\}$, не принадлежащей цепи P_1, либо грань f_3 инцидентна вершине $y \notin \{w_2, v_2, w_3, v_3\}$, не принадлежащей цепи P_2. Следовательно, один из циклов, образованных объединением цепей P_1 и $w_1v_1v_5$ или P_2 и $w_2v_2v_3w_3$, является разделяющим циклом длины не более 6 в G, что противоречит (2.3).

Докажем, что раскраска ϕ_1 вершин графа G_1 может быть преобразована в раскраску ϕ вершин графа G. Положим $\phi(x) = \phi_1(x)$ для каждой вершины x графа G, отличной от вершин $v_1, \dots, v_5, w_1, w_2, w_3$. Положим $\phi(w_1) = \phi(w_2) = \phi_1(A) = \alpha$ и $\phi(v_5) = \phi(w_3) = \phi_1(B) = \beta$. Наконец, определим цвета вершин $v_1, \dots, v_4$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

а) $\alpha = \beta = 1$. Положим $\phi(v_1) = \phi(v_2) = \phi(v_3) = \phi(v_4) = 2$.

б) $\alpha = 1, \beta = 2$. При $\phi(w_4) = 1$ положим $\phi(v_1) = \phi(v_2) = \phi(v_4) = 2$ и $\phi(v_3) = 1$. Если же $\phi(w_4) = 2$, то заметим, что в графе G' отсутствуют обобщенные v_5-w_3-цепи из вершин цвета 2 (иначе в графе G_1 имеется обобщенный цикл из вершин цвета 2, проходящий через вершину B). С учетом этого факта положим $\phi(v_1) = \phi(v_2) = \phi(v_3) = 2$ и $\phi(v_4) = 1$.

в) $\alpha = 2, \beta = 1$. Положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = \phi(v_4) = 2$ и $\phi(v_2) = 1$.

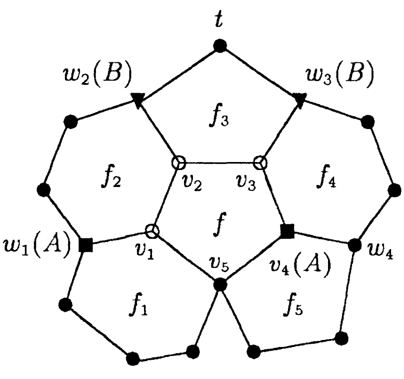
г) $\alpha = \beta = 2$. При $\phi(w_4) = 1$ положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = 1$ и $\phi(v_2) = \phi(v_4) = 2$. Если же $\phi(w_4) = 2$, то воспользуемся тем, что в графе G' отсутствуют обобщенные v_5-w_1- либо w_2-w_3-цепи из вершин цвета 2 (иначе в графе G_1 имеется обобщенный цикл из вершин цвета 2, проходящий через вершины A и B). В первом случае положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = 2$ и $\phi(v_2) = \phi(v_4) = 1$, а во втором — $\phi(v_1) = \phi(v_4) = 1$ и $\phi(v_2) = \phi(v_3) = 2$.

В заключение заметим, что во всех рассуждениях, проведенных в случае 1, вершину v_4 можно считать внутренней, а не обязательно строго внутренней вершиной графа G.

5. Разбор случая 2

Пусть $r(f_2) = r(f_4) = 6$ и $r(f_3) = 5$ (рис. 7). Если $d(v_5) = 3$, то доказательство сводится к случаю 1 с помощью изменения обозначений вершин, инцидентных грани f. Действительно, с учетом последнего замечания из предыдущего раздела в рассуждениях случая 1 вершины $v_1, \ldots, v_4$ достаточно заменить на вершины $v_2, \ldots, v_5$ и грань f_2 — на грань f_3. Итак, можно считать, что $d(v_5) > 3$.

Пусть $f_3 = v_2w_2tw_3v_3$. Рассмотрим следующие два подслучая.



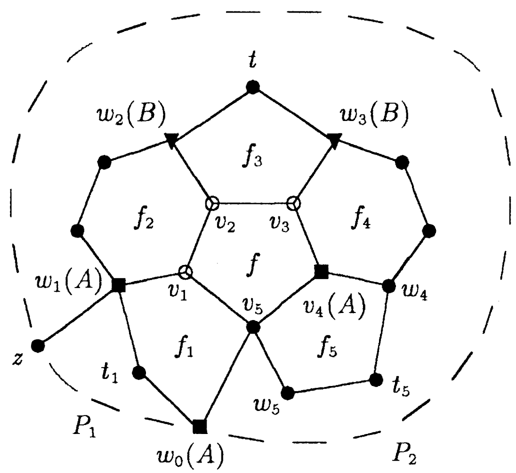


Рис. 7. Конфигурации для случая 2

Подслучай 2A. $r(f_1) = 6$ или $r(f_5) = 6$. В силу симметрии можно считать, что $r(f_1) = 6$ (рис. 7, *а*). Определим граф G_1, получаемый из графа G удалением вершин v_1, v_2, v_3 и последующим отождествлением вершины w_1 с вершиной v_4 и вершины w_2 с вершиной w_3 (ребра w_2t и w_3t также отождествляются). Положим $A = w_1 * v_4$ и $B = w_2 * w_3$.

Подслучай 2B. $r(f_1) = (f_5) = 5$. Пусть $f_1 = v_1v_5w_0t_1w_1$ и $f_5 = v_4v_5w_5t_5w_4$, где $w_0 \neq w_5$ (рис. 7, *б*). Определим граф G_1, получаемый из графа G удалением вершин v_1, v_2, v_3 и последующим отождествлением вершин w_1, v_4 и w_0, а также вершины w_2 с вершиной w_3 (при этом отождествляются пары ребер w_2t и w_3t, w_0t_1 и w_1t_1, v_4v_5 и w_0v_5,). Положим $A = w_1 * v_4 * w_0$ и $B = w_2 * w_3$.

Докажем, что выполняется условие (OUT). В подслучае $2A$ это следует из того, что все удаляемые и отождествляемые вершины графа G являются внутренними в G. В подслучае $2B$ единственной граничной вершиной среди всех таких вершин графа G может быть вершина w_0. Отсюда следует, что условие (OUT) может нарушиться только при наличии в графе G_1 двух смежных граничных вершин, прообразы которых не были смежны в G. Одной из этих вершин должна быть вершина $A \in V(G_1)$, а ее прообразом — вершина $w_0 \in V(G)$). При этом в графе G вершина w_1 должна быть смежна с граничной вершиной z (так как по условию вершина v_4 является строго внутренней в G).

Согласно (2.4) вершина z — единственная граничная вершина в окружении вершины w_1. Если $z = t_1$, то вершины z и w_0 являются смежными в G. Следовательно, условие (OUT) не нарушается. Если же $z \neq t_1$, то рассмотрим в графе G циклы C_1 и C_2, образованные объединением цепи $zw_1v_1v_5w_0$ с каждой из граничных w_0-z-цепей P_1 и P_2 (рис. 7, *б*). Так как вершина t_1 является внутренней в G, то циклы C_1 и C_2 являются разделяющими в G, а из условия $r(f_0) \leqslant 8$ следует, что по крайней мере один из них имеет длину не более 8. Полученное противоречие со свойством (2.3) доказывает, что выполняется условие (OUT).

Проверка условия (SC) осуществляется по той же схеме, что и в случае 1, и основывается на существовании в графе G цепей $w_1v_1v_5v_4$, $w_2v_2v_3w_3$, $w_1v_1v_2w_2$, $w_3v_3v_4$ (в подслучаях $2A$ и $2B$), а также цепей $w_1v_1v_5w_0$, $v_4v_5w_0$, $w_2v_2v_1v_5w_0$ и $w_3v_3v_4v_5w_0$ (в подслучае $2B$). Наличие в графе G указанных цепей приводит к существованию в G разделяющего цикла длины не более 8 в случае, если в графе G_1 имеется цикл длины не более 4, проходящий через одну из вершин A или B.

Покажем, каким образом раскраска ϕ_1 вершин графа G_1, являющаяся продолжением предраскраски φ_0, может быть продолжена до раскраски ϕ вершин графа G. Аналогично случаю 1 положим $\phi(x) = \phi_1(x)$ для каждой вершины $x \in V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_4, w_0, \dots, w_3\}$. Далее положим $\phi(w_1) = \phi(v_4) = \phi_1(A) = \alpha$ и $\phi(w_2) = \phi(w_3) = \phi_1(B) = \beta$. Кроме того, в подслучае $2B$ положим $\phi(w_0) = \alpha$. Определим цвета вершин v_1, v_2, v_3. Для этого рассмотрим следующие случаи.

а) $\alpha = \beta = 1$. Положим $\phi(v_1) = \phi(v_2) = \phi(v_3) = 2$.

б) $\alpha = 1, \beta = 2$. Положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = 2$ и $\phi(v_2) = 1$.

в) $\alpha = 2, \beta = 1$. При $\phi(v_5) = 2$ положим $\phi(v_1) = 1$ и $\phi(v_2) = \phi(v_3) = 2$. Если же $\phi(v_5) = 1$, то положим $\phi(v_1) = \phi(v_2) = \phi(v_3) = 2$, учитывая, что в графе $G' = G - \{v_1, v_2, v_3\}$ отсутствуют обобщенные w_1-v_4-цепи, состоящие из вершин цвета 2 (см. пункт б) в случае 1).

г) $\alpha = \beta = 2$. При $\phi(v_5) = 2$ положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = 1$ и $\phi(v_2) = 2$.

Если же $\phi(v_5) = 1$, то воспользуемся тем, что в графе G' отсутствуют обобщенные w_1-w_2- либо w_3-v_4-цепи из вершин цвета 2 (иначе в графе G_1 имеется обобщенный цикл из вершин цвета 2). В первом случае положим $\phi(v_1) = \phi(v_2) = 2$ и $\phi(v_3) = 1$, а во втором — $\phi(v_1) = \phi(v_3) = 2$ и $\phi(v_2) = 1$.

6. Разбор случая 3

Пусть $r(f_2) = r(f_3) = r(f_4) = 6$. Можно считать, что $d(w_2) = d(w_3) = 3$, иначе выполняется утверждение (i) леммы. Положим $f_2 = v_1v_2w_2pqw_1$ и $f_3 = v_2w_2yzw_3v_3$ (рис. 8). Если хотя бы одна вершина y или z является граничной степени не менее 3 в G, то выполняется утверждение (ii) леммы. Если же одна из указанных вершин является граничной степени 2 в G, то либо вершина w_2, либо вершина w_3 также является граничной, что противоречит сделанным предположениям. Поэтому будем считать, что вершины y и z являются внутренними в G.

Определим граф G_1, получаемый из графа G удалением вершин v_1, v_2, v_3 и w_2 и последующим отождествлением вершин v_5, w_3 и y, а также вершины w_1 с вершиной p (при этом отождествляются пары ребер yz и w_3z, pq и w_1q). Положим $A = w_1 * p$ и $B = v_5 * w_3 * y$.

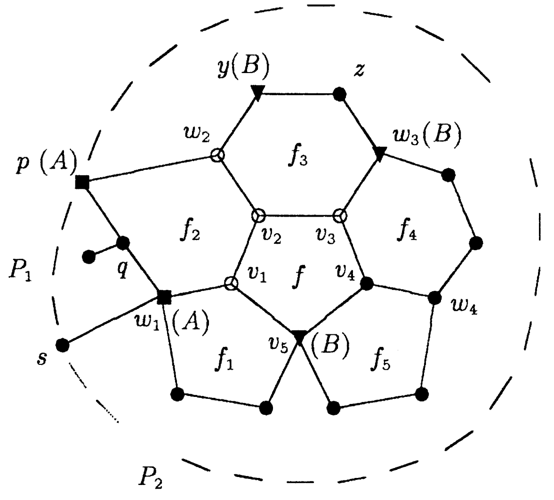


Рис. 8. Конфигурация для случая 3

Так как все удаляемые и отождествляемые вершины графа G за исключением, возможно, вершины p являются внутренними в G, то (как и в случае 2) условие (OUT) может нарушиться лишь тогда, когда вершина p является граничной, а вершина w_1 смежна с граничной вершиной s графа G. При этом если $s = q$, то условие (OUT) не нарушается, поскольку вершины p и q смежны в G. Если же $s \neq q$, то

из свойств (2.2) и (2.4) следует, что вершина q является внутренней в G и $d(q) \geqslant 3$. В этом случае в графе G рассмотрим циклы C_1 и C_2, образованные объединением цепи pqw_1s с каждой из граничных p-s-цепей P_1 и P_2 (см. рис. 8). Так как вершина q является внутренней степени не менее 3 в G, то каждый цикл C_1 и C_2 является разделяющим в G. Из условия $r(f_0) \leqslant 8$ следует, что по крайней мере один из этих циклов имеет длину не более 8, что противоречит (2.3).

Проверка условия (SC) осуществляется по той же схеме, что и в случаях 1 и 2, и основывается на существовании в графе G цепей $w_1v_1v_2w_2p$, $v_5v_4v_3w_3$, $v_5v_1v_2w_2y$, $yw_2v_2v_3w_3$, $w_1v_1v_5$, $w_1v_1v_2v_3w_3$, pw_2y и $pw_2v_2v_3w_3$, длина каждой из которых не превосходит 4. При этом из условия $r(f_4) = 6$ следует, что ранг грани $Bv_4w_4\dots$ в графе G_1 равен 5.

Рассмотрим раскраску ϕ_1 вершин графа G_1, являющуюся продолжением предраскраски φ_0, и положим $\phi(x) = \phi_1(x)$ при $x \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_5, w_1, w_2, w_3, p, y\}$. Положим $\phi(w_1) = \phi(p) = \phi_1(A) = \alpha$ и $\phi(v_5) = \phi(w_3) = \phi(y) = \phi_1(B) = \beta$. Для определения цвета вершин v_1, v_2, v_3 и w_2 рассмотрим следующие случаи.

а) $\beta = 1$. Положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = \phi(w_2) = 2$ и $\phi(v_2) = 1$.

б) $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Также положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = \phi(w_2) = 2$ и $\phi(v_2) = 1$, учитывая, что в графе $G' = G - \{v_1, v_2, v_3, w_2\}$ отсутствуют обобщенные v_5-w_3-цепи (а следовательно, и обобщенные v_4-w_3-цепи), состоящие из вершин цвета 2.

в) $\alpha = \beta = 2$. При $\phi(v_4) = 1$ положим $\phi(v_1) = \phi(w_2) = 1$ и $\phi(v_2) = \phi(v_3) = 2$. Если же $\phi(v_4) = 2$, то положим $\phi(v_1) = \phi(v_3) = \phi(w_2) = 1$ и $\phi(v_2) = 2$.

На этом рассмотрение случаев 1–3 закончено. Лемма доказана.

7. Применение формулы Эйлера

Положим $V = V(G)$, $F = F(G)$ и запишем формулу Эйлера для графа G в виде

$$\sum_{v \in V}(d(v) - 4) + \sum_{f \in F}(r(f) - 4) = -8. \tag{1}$$

Первоначальным *зарядом вершины* $v \in V$ назовем число $\mu(v) = d(v) - 4$, а первоначальным *зарядом грани* $f \in F \backslash \{f_0\}$ — число $\mu(f) = r(f) - 4$. Первоначальный заряд внешней грани f_0 определим как $\mu(f_0) = r(f_0) + 4$. Тогда формула (1) примет вид

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu(x) = 0. \tag{2}$$

Вершины и грани графа G будем называть *элементами* графа G. Из условия $g(G) \geqslant 5$ и свойства (2.1) следует, что $\mu(x) \geqslant 0$ для любого элемента x, не являющегося вершиной степени 2 или 3. Перераспределим заряды между элементами графа G таким образом, чтобы их сумма осталась прежней, а новый заряд $\mu^*(x)$ каждого элемента $x \in V \cup F$ стал неотрицательным. В этом случае наличие в графе G элемента x с положительным зарядом $\mu^*(x)$ приводит к противоречию с (2). Определим следующие правила П1–П5 перераспределения зарядов, в соответствии с которыми грани графа G, а также вершины степени не менее 5 передают часть своего заряда вершинам степени 2 и 3, делая заряд этих вершин неотрицательным.

П1. Пусть $f = v_1v_2v_3v_4v_5 \neq f_0$ — некоторая 5-грань. Рассмотрим следующие случаи.

а) Все вершины v_i при $i = 1, \dots, 5$ являются внутренними в G. В этом случае грань f передает инцидентной строго внутренней 3-вершине v_i заряд 1/3, если не выполнено следующее условие (∗): «вершина v_i инцидентна двум 6-граням $f_1 = v_iv_{i+1}w_{i+1}z_1t_1w_i$ и $f_2 = v_iv_{i-1}w_{i-1}z_2t_2w_i$ в G, где либо $d(w_i) > 3$ (рис. 9, *а*), либо одна из вершин z_1 или z_2 является граничной степени не менее 3 в G (рис. 9, *б*)».

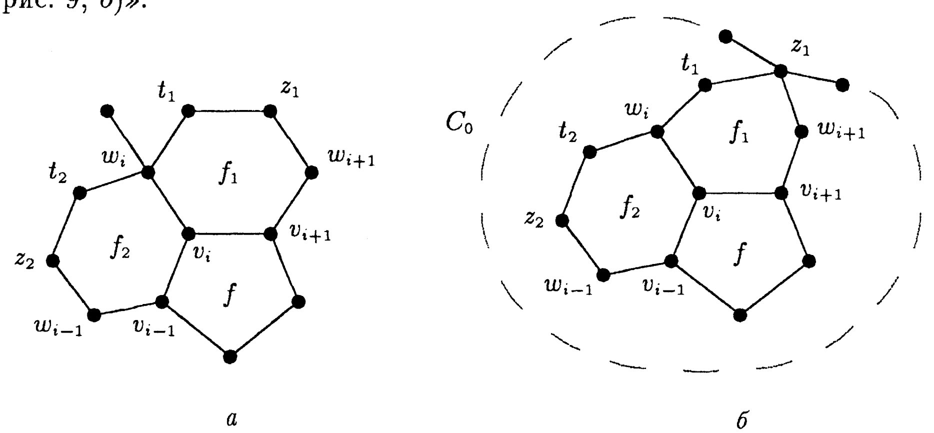
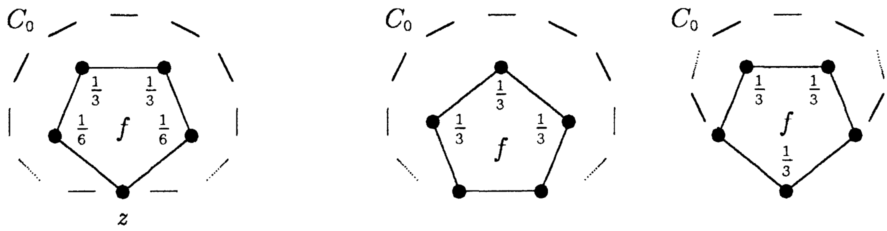


Рис. 9. Условие (∗)

б) Грань f инцидентна в точности одной граничной вершине $z = v_1$. В этом случае f передает заряд 1/6 вершинам v_2 и v_5 и заряд 1/3 вершинам v_3 и v_4 (рис. 10, *а*).

в) Грань f является граничной в G. В этом случае f передает заряд 1/3 каждой инцидентной внутренней 3-вершине, а также инцидентной 2-вершине (если такая имеется) (рис. 10, *б*).



а *б*

Рис. 10. Применение правила П1 (случаи б) и в))

Замечание 4. В условиях пункта в) правила 1 случай, когда грань f одновременно инцидентна двум граничным 2-вершинам графа G, является невозможным. Действительно, если в G такие две вершины имеются, то из свойства (2.5) следует, что $r(f_0) = 5$. При этом либо $f = f_0$, что невозможно, либо в графе G имеется 4-цикл, что противоречит условию $g(G) \geqslant 5$.

П2. Пусть $f = v_1 v_2 \ldots v_r \neq f_0$ — некоторая грань ранга $r \geqslant 6$. Тогда грань f передает заряд $1/3$ каждой инцидентной граничной вершине. Кроме того, f передает каждой инцидентной внутренней 3-вершине v_i заряд $1/3 + s_i/6$, где s_i есть число внутренних вершин графа G степени не менее 4 во множестве $\{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ (здесь и ниже индексы вершин рассматриваются по mod r) (рис. 11).

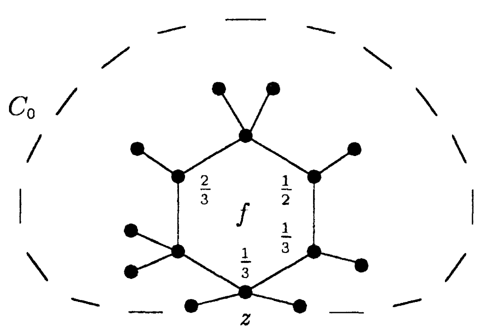


Рис. 11. Пример применения правила П2

П3. Внешняя грань f_0 передает каждой граничной вершине z заряд $1 - \mu(z)/3$ (при $d(z) > 7$ можно считать, что вершина z передает грани f_0 заряд $\mu(z)/3 - 1$).

П4. Пусть $z \in V(C_0)$ — граничная вершина степени $d \geqslant 3$ и $v_1, \ldots, v_d$ вершины из окружения вершины z, перечисленные в циклическом порядке, причем v_1 и v_d являются граничными вершинами.

Тогда если $d = 3$, то вершина z передает заряд $1/3$ вершине v_2 (рис. 12, *а*), а если $d > 3$, то вершина z передает заряд $1/2$ вершинам v_2 и v_{d-1} и заряд $2/3$ каждой вершине v_i при $i = 3, \dots, d-2$ (рис. 12, *б*).

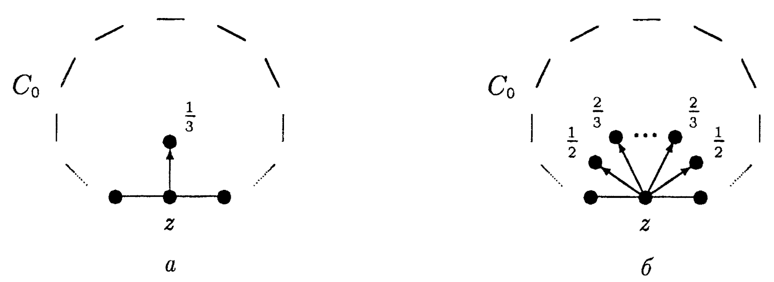


Рис. 12. Применение правила П4

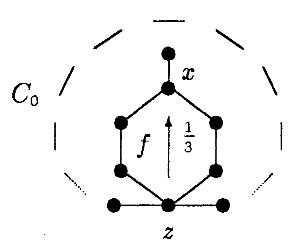


Рис. 13. Применение правила П5

П5. Пусть $z \in V(C_0)$ и $d(z) \geqslant 3$ и вершина z инцидентна 6-грани $f = zu_1u_2xu_3u_4$, где x является строго внутренней 3-вершиной в G. Тогда вершина z посылает вершине x заряд $1/3$ (рис. 13).

Обозначим через $\mu^*(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил П1–П5. Докажем, что $\mu^*(x) \geqslant 0$ для любого элемента x графа G и $\mu^*(x) > 0$ хотя бы для одного элемента x.

Пусть $f \neq f_0$ — некоторая 5-грань в G. Если грань f инцидентна хотя бы одной граничной вершине, то из правила П1 (случаи б) и в)) следует, что $\mu^*(f) = 0$. Пусть грань f инцидентна только внутренним вершинам в G. Если среди этих вершин имеется не более трех, строго внутренних степени 3, то из правила П1(а) следует, что $\mu^*(f) \geqslant 0$. Если же грань f инцидентна не менее чем четырем строго внутренним вершинам степени 3 (т. е. f — слабая 5-грань), то неравенство $\mu^*(f) \geqslant 0$ следует из правила П1(а) (условие $(*)$) и леммы.

Пусть $f = v_1 \dots v_r \neq f_0$ — некоторая грань ранга $r \geqslant 6$. В этом случае $\mu(f) \geqslant r/3$. Следовательно, заряд грани f остается неотрицательным, если f передает заряд $1/3$ каждой инцидентной вершине. Единственное отличие правила П2 от описанной «равномерной» схемы перераспределения зарядов состоит в том, что для каждой внутренней

вершины v_i степени не менее 4 заряд $1/3$ не передается вершине v_i, а делится поровну между вершинами v_{i-1} и v_{i+1} (если они являются внутренними степени 3). Отсюда следует, что $\mu^*(f) \geqslant 0$.

Докажем, что $\mu^*(f_0) \geqslant 0$. Согласно правилу П3 суммарный заряд, передаваемый гранью f_0 граничным вершинам, равен $r(f_0) - \mu_0/3$, где $\mu_0 = \sum\limits_{z \in C_0} \mu(z)$. Следовательно, $\mu^*(f_0) = \mu(f_0) - r(f_0) + \mu_0/3 = 4 + \mu_0/3 = (12 + \mu_0)/3$. Так как $\mu(z) \geqslant -2$ для любой вершины z, то при $r(f_0) = 5$ имеем $\mu_0 \geqslant -10$, откуда $\mu^*(f_0) > 0$. Если же $6 \leqslant r(f_0) \leqslant 8$, то из свойства (2.5) следует, что грань f_0 инцидентна не более чем четырем вершинам степени 2. В этом случае имеем $\mu_0 \geqslant 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) = -12$. Следовательно, $\mu^*(f_0) \geqslant 0$.

Пусть $v \in V$ — некоторая внутренняя вершина в G. Если $d(v) > 3$, то из правил П1–П5 следует, что $\mu^*(v) \geqslant \mu(v) \geqslant 0$. Пусть $d(v) = 3$ и вершина v является строго внутренней в G. Если вершина v получает заряд от каждой инцидентной грани, то из правил П1 и П2 следует, что $\mu^*(v) \geqslant -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Предположим, что v не получает заряд от инцидентной грани f. Тогда из правил П1 и П2 следует, что $r(f) = 5$ и имеет место случай а) из правила П1. При этом для вершины $v = v_i$ выполнено условие $(*)$. Используя обозначения из правила П1(а), получаем, что если $d(w_i) > 3$ (см. рис. 9, *а*), то вершина v_i получает заряд не менее $1/2$ от каждой из 6-граней f_1 и f_2 по правилу П2. Если же $d(w_i) = 3$ и одна из вершин z_j ($j \in \{1, 2\}$) является граничной степени не менее 3 (см. рис. 9, *б*), то вершина v_i получает заряд $1/3$ от каждой из граней f_1 и f_2 по правилу П2 и заряд $1/3$ от вершины z_j по правилу П5.

Пусть v — внутренняя вершина степени 3, смежная с граничной вершиной z степени $d \geqslant 3$ в G. Вершины из окружения вершины z обозначим в циклическом порядке через $v_1, \ldots, v_d$. При этом будем считать, что вершины v_1 и v_d являются граничными в G. Если $d = 3$, то вершина $v = v_2$ получает заряд не менее $1/3$ от каждой из граничных граней $v_1 z v_2 \ldots$ и $v_2 z v_3 \ldots$ по правилам П1 и П2 и заряд $1/3$ от вершины z по правилу П4. Если $d \geqslant 4$ и $v = v_2$ (или $v = v_{d-1}$), то v получает заряд не менее $1/3$ от граничной грани $v_1 z v_2 \ldots$ ($v_{d-1} z v_d \ldots$) и не менее $1/6$ от грани $v_2 z v_3 \ldots$ ($v_{d-2} z v_{d-1} \ldots$) по правилам П1 и П2. Кроме того, v получает заряд $1/2$ от вершины z по правилу П4. Пусть $d \geqslant 5$ и $v = v_i$, где $3 \leqslant i \leqslant d-2$. В этом случае вершина v_i получает заряд не менее $1/6$ от каждой из граней $v_{i-1} z v_i \ldots$ и $v_i z v_{i+1} \ldots$ согласно правилам П1 и П2 и заряд $2/3$ от вершины z по правилу П4.

Докажем, что $\mu^*(z) \geqslant 0$ при $z \in V(C_0)$. Если $d(z) = 2$, то вершина z получает заряд $1/3$ от инцидентной граничной грани по правилам П1 и П2 и заряд $5/3$ от грани f_0 по правилу П3. При этом z не передает заряд по правилам П4 и П5. Следовательно, $\mu^*(z) = 0$.

Пусть $d(z) = d \geqslant 3$. Заметим, что если вершина z инцидентна 6-грани $f = zu_1u_2xu_3u_4$ и посылает заряд $1/3$ вершине x по правилу П5, то z получает заряд $1/3$ от грани f по правилу П2. Поэтому можно учитывать передачи заряда от вершины z только по правилу П4. Из определения этого правила следует, что вершина z передает смежным внутренним вершинам суммарный заряд $(2d-5)/3 = 2\mu(z)/3 + 1$. При этом z получает заряд $1 - \mu(z)/3$ от грани f_0 по правилу П3. Отсюда следует, что $\mu^*(z) \geqslant \mu(z) - (2\mu(z)/3 + 1) + (1 - \mu(z)/3) = 0$.

Замечание 5. Из приведенных выше рассуждений следует, что если граничная вершина z степени не менее 3 получает заряд $\mu > 0$ от инцидентных граничных граней по правилу П2 и не передает заряд по правилу П5, то $\mu^*(z) \geqslant \mu > 0$.

Итак, мы доказали, что $\mu^*(x) \geqslant 0$ для любого элемента x графа G. Докажем, что $\mu^*(x) > 0$ для некоторого элемента $x \in V \cup F$. Возвращаясь к доказательству неравенства $\mu^*(f_0) \geqslant 0$, заметим, что оно обращается в равенство лишь в случае, когда $r(f_0) = 8$ и грань f_0 инцидентна четырем вершинам степени 2 и четырем вершинам степени 3 в G. С учетом свойства (2.5) это означает, что $f_0 = z_1z_2\dots z_8$, где $d(z_i) = 2$ при четных i и $d(z_i) = 3$ при нечетных i. Обозначим через v_i (при $i = 1,3,5,7$) внутреннюю вершину графа G, смежную с граничной 3-вершиной z_i, и через f_i (при $i = 2,4,6,8$) граничную грань, инцидентную 2-вершине z_i (рис. 14).

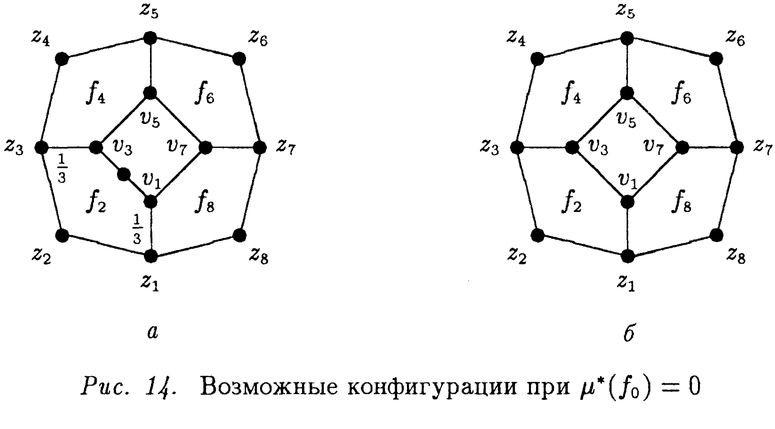


Рис. 14. Возможные конфигурации при $\mu^*(f_0) = 0$

Если $r(f_i) \geqslant 6$ при некотором i (рис. 14, *а*), то 3-вершины z_{i-1} и z_{i+1} (индексы берутся по mod 8) получают заряд $1/3$ от грани f_i по правилу П2 и не передают заряд по правилу П5 (так как вершины v_{i-1} и v_{i+1} не являются строго внутренними в G). В этом случае согласно замечанию 5 имеем $\mu^*(z_{i+1}) \geqslant 1/3$ и $\mu^*(z_{i-1}) \geqslant 1/3$. Если же $r(f_i) = 5$ при каждом $i = 2,4,6,8$ (рис. 14, *б*), то в G имеется 4-цикл $v_1v_3v_5v_7$, что противоречит условию $g(G) \geqslant 5$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Borodin O. V.** On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. 1979. V. 25, N 3. P. 211–236.
2. **Chartrand G., Kronk H. V.** The point-arboricity of planar graphs // J. London Math. Soc. 1969. V. 44, N 4. P. 612–616.
3. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Natur. Reihe. 1959. V. 8. P. 109–120.
4. **Grünbaum B.** Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 3. P. 390–408.
5. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, Jnc., 1995.
6. **Kostochka A. V., Melnikov L. S.** Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. 1976. V. 14, N 4. P. 403–406.
7. **Stein S. K.** B-sets and coloring problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76, N 4. P. 805–806.
8. **Stein S. K.** B-sets and planar maps // Pacific J. Math. 1971. V. 37, N 1. P. 217–224.
9. **Wegner G.** Note on a paper of B. Grünbaum on acyclic colorings // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 4. P. 409–412.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: borodin@math.nsc.ru,
angle@math.nsc.ru

Статья поступила
26 июня 2001 г.