ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2001. Серия 1. Том 8, № 4, 54–67

УДК 519.179.4

ПРИ КАКИХ k В ПОЧТИ КАЖДОМ n-ВЕРШИННОМ ГРАФЕ ИМЕЮТСЯ ВСЕ НЕИЗОМОРФНЫЕ k-ВЕРШИННЫЕ ПОДГРАФЫ*)

А. Д. Коршунов

Пусть $\mathscr{G}(n)$ обозначает множество неориентированных графов без петель и кратных ребер с n помеченными вершинами, $\mathscr{G}(n,k)$ — множество таких графов из $\mathscr{G}(n)$, в каждом из которых содержатся все неизоморфные k-вершинные подграфы, и $k_0 = k_0(n) = \lfloor 2(\log_2 n - \log_2\log_2 n + \log_2 e)\rfloor - 1$. Доказывается, что если $k = k(n) \geqslant k_0(n) + 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathscr{G}(n,k)|/|\mathscr{G}(n)| = 0$, а если $k = k_0(n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathscr{G}(n,k)|/|\mathscr{G}(n)| = 1$.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результата

Обозначим через $\mathscr{G}(n)$ множество неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V = \{1,\dots,n\}$. Пусть k — натуральное число, $1 \leqslant k \leqslant n$. Граф G из $\mathscr{G}(n)$ назовем *k-универсальным,* если в G содержатся все неизоморфные k-вершинные подграфы (иначе: индуцированные подграфы). Обозначим через $\mathscr{G}(n,k)$ множество всех k-универсальных графов из $\mathscr{G}(n)$.

Возникает следующий вопрос. Имеется ли такая функция $k_0 = k_0(n)$, которая обладает свойствами:

1) если $k = k(n) \geqslant k_0(n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathscr{G}(n,k)|/|\mathscr{G}(n)| = 0$;

2) если $k = k(n) \leqslant k_0 - c$, где c — некоторая положительная константа, то $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathscr{G}(n,k)|/|\mathscr{G}(n)| = 1$, т. е. почти все графы из $G(n)$ являются k-универсальными.

На сформулированный вопрос имеется положительный ответ. Он вытекает из следующего доказываемого ниже утверждения.**)

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00531) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО–110).

**) Формулировка чуть более слабого утверждения имеется в [2].

Теорема 1. *Пусть $k_0 = k_0(n) = \lfloor 2(\log_2 n - \log_2 \log_2 n + \log_2 e) \rfloor - 1$. Тогда при любом $k \geqslant k_0 + 2$*

$$\lim_{n \to \infty} |\mathscr{G}(n,k)|/|\mathscr{G}(n)| = 0,$$

а если k удовлетворяет условию $1 \leqslant k \leqslant k_0$, то

$$\lim_{n \to \infty} |\mathscr{G}(n,k)|/|\mathscr{G}(n)| = 1.$$

Наш интерес к этой задаче возник в связи со статьей [4], в которой наряду с другими задачами рассматривалась (в несколько иной постановке) задача о k-универсальных графах и был получен более слабый результат.

Ясно, что если граф G является k-универсальным, то при любом r, $1 \leqslant r < k$, граф G является r-универсальным. Если же граф G из $\mathscr{G}(n)$ не является k-универсальным, то при любом r, $k < r \leqslant n$, граф G не является r-универсальным. Следовательно, при любом k, $1 \leqslant k < n$, справедливо неравенство $|\mathscr{G}(n,k)| \geqslant |\mathscr{G}(n,k+1)|$. Поэтому справедливость теоремы 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть*

$$k_0 = k_0(n) = \lfloor 2(\log_2 n - \log_2 \log_2 n + \log_2 e) \rfloor - 1. \tag{1}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} |\mathscr{G}(n,k_0+2)|/|\mathscr{G}(n)| = 0 \tag{2}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} |\mathscr{G}(n,k_0)|/|\mathscr{G}(n)| = 1. \tag{3}$$

Соотношение (2) следует из известного факта (см., например, [1, теорема 2.12]): если $k = k(n) = k_0(n) + 2$, то при $n \to \infty$ число графов из $\mathscr{G}(n)$, в каждом из которых содержится по крайней мере один k-вершинный безреберный (иначе: пустой) подграф, равно $o(|\mathscr{G}(n)|)$.

Идея доказательства соотношения (3) состоит в следующем. Пусть H — безреберный граф из $\mathscr{G}(k_0)$ и m — натуральное число, $k_0 < m < n$. Обозначим через $\mathscr{G}(\overline{H}, m)$ множество графов из $\mathscr{G}(m)$, в которых отсутствуют подграфы, изоморфные графу H. Для $H \in \mathscr{G}(k_0)$ подбирается такое m, что удается убедиться в справедливости неравенства

$$|\mathscr{G}(\overline{H}, m)| < (2,6)^{-2\log_2^2 n} |\mathscr{G}(m)|. \tag{4}$$

Так как

$$|\mathscr{G}(n)| = |\mathscr{G}(m)| 2^{\binom{n-m}{2} + (n-m)m}$$

и

$$|\mathscr{G}(\overline{H}, n)| \leqslant |\mathscr{G}(\overline{H}, m)| 2^{\binom{n-m}{2} + (n-m)m},$$

то из (4) следует, что

$$|\mathscr{G}(\overline{H},n)| < (2,6)^{-2\log_2^2 n}|\mathscr{G}(n)|.$$

Далее мы пользуемся тем фактом, что если H' — произвольный граф из $\mathscr{G}(k_0)$, то

$$|\mathscr{G}(\overline{H}',n)| \leqslant |\mathscr{G}(\overline{H}',n)|.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{H'\in\mathscr{G}(k_0)} |\mathscr{G}(\overline{H}',n)| < (2,6)^{-2\log_2^2 n}2^{\binom{k_0}{2}}|\mathscr{G}(n)| = o(|\mathscr{G}(n)|),$$

т. е. справедливо (3).

§ 2. Предварительные утверждения

Введем следующие обозначения:

G — произвольный граф из $\mathscr{G}(n)$;

$V(G')$ — множество вершин графа G';

H — произвольный граф из $\mathscr{G}(k)$;

$\mathrm{Aut}H$ — группа автоморфизмов графа H;

$s(G,H)$ — число k-вершинных подграфов в G, изоморфных графу H;

$M(H,n) = \frac{1}{|\mathscr{G}(n)|}\sum\limits_{G\in\mathscr{G}(n)} s(G,H)$.

Лемма 1. *При любых n и k, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо равенство*

$$M(H,n) = \binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}k!/|\mathrm{Aut}H|.$$

Доказательство. Пусть $V_1,\dots,V_{\binom{n}{k}}$ — k-элементные подмножества множества $V = \{1,\dots,n\}$. Введем предикат

$$P(G,H,i) = \begin{cases} 1, & \text{если подграф с множеством вершин } V_i \text{ в } G \\ & \text{изоморфен графу} H; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\sum_{G\in\mathscr{G}(n)} s(G,H) = \sum_{G\in\mathscr{G}(n)}\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(G,H,i) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}}\sum_{G\in\mathscr{G}(n)} P(G,H,i). \qquad (5)$$

Все графы, учитываемые в $\sum\limits_{G\in\mathscr{G}(n)} P(G,H,i)$ при фиксированном i, можно получить следующим способом.

1) Каждые две вершины из V_i соединяются или не соединяются ребром так, чтобы получился граф, изоморфный графу H. Имеется $k!/|\mathrm{Aut}H|$ возможностей.

2) Любые две другие вершины соединяются или не соединяются ребром. Имеется $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ возможностей.

Следовательно, при фиксированном i имеем

$$\sum_{G\in\mathcal{G}(n)} P(G,H,i) = 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}k!/|\mathrm{Aut}H|. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$M(H,n) = \frac{1}{|\mathcal{G}(n)|}\binom{n}{k}2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}k!/|\mathrm{Aut}H| = \binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}k!/|\mathrm{Aut}H|.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть H — произвольный граф из $\mathcal{G}(k_0)$ и n достаточно велико. Тогда*

$$M(H,n) > 2\log_2^2 n.$$

Доказательство. Так как $|\mathrm{Aut}H| \leqslant k!$ для любого k-вершинного графа H, то из леммы 1 следует, что если $H\in\mathcal{G}(k_0)$ и $n\to\infty$, то

$$M(H,n) \geqslant \binom{n}{k_0}2^{-\binom{k_0}{2}} \sim \frac{n^{k_0}}{k_0!}2^{-\binom{k_0}{2}}. \tag{7}$$

В свою очередь, согласно уточненной формуле Стирлинга (см., например, [3, с. 67]) имеем

$$r! \leqslant \sqrt{2\pi r}\left(\frac{r}{e}\right)^r e^{1/(12r)}.$$

Поэтому при $r\to\infty$

$$r! < 2\sqrt{r}\left(\frac{r}{e}\right)^r. \tag{8}$$

Воспользовавшись (8), из (7) получаем, что если $H\in\mathcal{G}(k_0)$, то

$$\begin{aligned}
M(H,n) &> \frac{1}{3\sqrt{k_0}}\left(\frac{en}{k_0}\right)^{k_0}2^{-\binom{k_0}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{k_0}}\left(\frac{en}{k_0 2^{(k_0-1)/2}}\right)^{k_0}\\
&\geqslant \frac{1}{3\sqrt{k_0}}\left(\frac{en}{k_0\ 2^{\log_2 n-\log_2\log_2 n+\log_2 e-1}}\right)^{k_0} = \frac{1}{3\sqrt{k_0}}\left(\frac{2\log_2 n}{k_0}\right)^{k_0}\\
&\geqslant \frac{1}{3\sqrt{k_0}}\left(\frac{\log_2 n}{\log_2 n-\log_2\log_2 n}\right)^{k_0} \sim \frac{1}{3\sqrt{k_0}}e^{2\log_2\log_2 n}\\
&= \frac{1}{3\sqrt{k_0}}(\log_2 n)^{2\log_2 e} > \frac{1}{3\sqrt{k_0}}(\log_2 n)^{2{,}8}.
\end{aligned}$$

Следовательно, при любом достаточно большом n и любом графе $H\in\mathcal{G}(k_0)$, где k_0 взято из (1), имеем $M(H,n) > 2\log^2 n$. Лемма 2 доказана.

§ 3. Доказательство неравенства (4) для безреберного графа H

Идея доказательства состоит в следующем. Сначала при специально выбранном m, $n/4 < m < n$, показывается, что в почти каждом графе из $\mathscr{G}(m)$ нет двух пересекающихся по вершинам подграфов, изоморфных графу H. Затем устанавливается, что в $\mathscr{G}(m)$ имеется не более $|\mathscr{G}(m)|2^{-4\log_2^2 n}$ графов, в каждом из которых содержится не менее $\lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor$ не пересекающихся по вершинам подграфов, изоморфных безреберному графу $H \in \mathscr{G}(k_0)$. Наконец, с использованием этих фактов устанавливается справедливость неравенства (4).

Для безреберного графа $H \in \mathscr{G}(k_0)$ обозначим через $m = m(H)$, $m < n$, минимальное натуральное число такое, что выполняется неравенство

$$M(H,m) = \binom{m}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}} > \lfloor 2\log_2^2 n\rfloor. \tag{9}$$

Согласно лемме 2 такое m существует.

Предварительно убедимся в том, что при $n \to \infty$

$$m = m(H) > n/4 \tag{10}$$

и

$$M(H,m) \sim 2\log_2^2 n. \tag{11}$$

Действительно, пользуясь (1), при любом $v \leqslant n/4$ имеем

$$\binom{v}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}} < \frac{v^{k_0}}{k_0!} 2^{-\binom{k_0}{2}} < \left(\frac{ev}{k_0}\right)^{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}} = \left(\frac{ev}{k_0 2^{(k_0-1)/2}}\right)^{k_0}$$
$$\leqslant \left(\frac{en}{4k_0 2^{(2(\log_2 - \log_2\log_2 n + \log_2 e)-3)/2}}\right)^{k_0} < 1.$$

Поэтому при $n \to \infty$ справедливо неравенство (10), т. е. $m \to \infty$ при $n \to \infty$. Из (9), (10) и неравенства

$$M(H,m-1) = \frac{m-k_0}{m} M(H,m) \leqslant \lfloor 2\log_2^2 n\rfloor$$

следует (11).

Ниже всюду будем полагать, что множеством вершин каждого графа из $\mathscr{G}(m)$ является множество $V^1 = \{1,2,\dots,m\}$.

Обозначим через $\mathscr{G}_1(H,m,r)$ множество графов $G \in \mathscr{G}(m)$ таких, что в G имеются по крайней мере два k_0-вершинных безреберных подграфа, которые пересекаются по r вершинам.

Лемма 3. *При любом r, $1 \leqslant r \leqslant k_0 - 1$, и $n \to \infty$*

$$|\mathscr{G}_1(H,m,r)| < |\mathscr{G}(m)| \frac{2m^{k_0-r}}{(k_0-r)!} \binom{k_0}{r} 2^{-\binom{k_0}{2}+\binom{r}{2}} \log_2^2 n.$$

Доказательство. Все графы из $\mathscr{G}_1(H,m,r)$ можно получить дважды следующим способом.

1) В множестве V^1 выбирается произвольное k_0-элементное подмножество V_1. Имеется $\binom{m}{k_0}$ возможностей.

2) В множестве $V^1 \setminus V_1$ выбирается $(k_0 - r)$-элементное подмножество V_2. Имеется $\binom{m-k_0}{k_0-r} < \binom{m}{k_0-r}$ возможностей.

3) В V_1 выбирается r-элементное подмножество V_3. Имеется $\binom{k_0}{r}$ возможностей.

4) Каждые две вершины из V_1 и каждые две вершины из $V_2 \cup V_3$ ребрами не соединяются.

5) Каждые две вершины из V^1, которые не указаны в п. 4, соединяются или не соединяются ребром. Имеется

$$2^{\binom{m}{2}-2\binom{k_0}{2}+\binom{r}{2}} = |\mathscr{G}(m)| 2^{-2\binom{k_0}{2}+\binom{r}{2}}$$

возможностей.

Из пп. 1–5 следует, что

$$|\mathscr{G}_1(H,m,r)| \leqslant \frac{1}{2}\binom{m}{k_0}\binom{m}{k_0-r}\binom{k_0}{r} 2^{-2\binom{k_0}{2}+\binom{r}{2}} |\mathscr{G}(m)|.$$

Далее, воспользовавшись (11), при $n \to \infty$ получаем

$$|\mathscr{G}_1(H,m,r)| \leqslant \binom{m}{k_0-r}\binom{k_0}{r} 2^{-\binom{k_0}{2}+\binom{r}{2}} \log_2^2 n |\mathscr{G}(m)| \leqslant \frac{m^{k_0-r}}{(k_0-r)!}\binom{k_0}{r} 2^{-\binom{k_0}{2}+\binom{r}{2}} \log_2^2 n |\mathscr{G}(m)|.$$

Лемма 3 доказана.

Положим

$$\mathscr{G}_1(H,m) = \bigcup_{r=1}^{k_0-1} \mathscr{G}_1(H,m,r). \tag{12}$$

Лемма 4. *При $n \to \infty$*

$$|\mathscr{G}_1(H,m)| < \frac{2}{n} \log_2^5 n |\mathscr{G}(m)| = o(|\mathscr{G}(m)|).$$

Доказательство. Пусть

$$f(r) = \frac{m^{k_0-r}}{(k_0-r)!}\binom{k_0}{r} 2^{\binom{r}{2}} \quad \text{и} \quad \varphi(r) = f(r)/f(r+1) = \frac{m(r+1)}{(k_0-r)^2 2^r}.$$

Так как в интервале $[1, k_0-3]$ при $n\to\infty$ производная функции $\varphi(x)$ отрицательна, то в этом интервале функция $\varphi(x)$ убывает. Отсюда и из неравенств $\varphi(1)>1$ и $\varphi(k_0-3)<1$ следует, что в интервале $[1,k_0-2]$ функция $f(r)$ сначала убывает, а затем возрастает. Пользуясь этим фактом, (12) и леммой 3, при $n\to\infty$ получаем

$$|\mathscr{G}_1(H,m)| < |\mathscr{G}_1(H,m,1)| + |\mathscr{G}_1(H,m,k_0-1)| + k_0|\mathscr{G}_1(H,m,2)| + k_0|\mathscr{G}_1(H,m,k_0-2)| < |\mathscr{G}(m)| \left\{ \frac{m^{k_0-1}k_0}{(k_0-1)!} 2^{-\binom{k_0}{2}} \log_2^2 n + mk_0 2^{-k_0+1}\log_2^2 n + \frac{m^{k_0-2}k_0^3}{(k_0-2)!}2^{-\binom{k_0}{2}+1}\log_2^2 n + m^2k_0^3 2^{-2k_0+3}\log_2^2 n \right\}. \tag{13}$$

В свою очередь, пользуясь (9) и (11), при $n\to\infty$ имеем

$$\frac{m^{k_0-1}k_0}{(k_0-1)!}2^{-\binom{k_0}{2}}\log_2^2 n \sim \binom{m}{k_0}\frac{k_0^2}{m}2^{-\binom{k_0}{2}}\log_2^2 n < \frac{2}{n}\log_2^4 n, \tag{14}$$

$$mk_0 2^{-k_0+1}\log_2^2 n < n2^{-k_0+2}\log_2^3 n < \frac{1}{n}\log_2^5 n, \tag{15}$$

$$\frac{m^{k_0-2}k_0^3}{(k_0-2)!}2^{-\binom{k_0}{2}+1}\log_2^2 n \sim \frac{2}{m^2}\binom{m}{k_0}k_0^5 2^{-\binom{k_0}{2}}\log_2^2 n < \frac{5}{m^2}k_0^5\log_2^4 n = o\Big(\frac{1}{n}\log_2^5 n\Big), \tag{16}$$

$$m^2k_0^3 2^{-2k_0+3}\log_2^2 n = o\Big(\frac{1}{n}\log_2^5 n\Big). \tag{17}$$

Подставляя (14)–(17) в (13), получаем утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\mathscr{G}_2(H,m)$ множество графов G из $\mathscr{G}(m)$ таких, что в G имеется более $\lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor$ не пересекающихся по вершинам подграфов, изоморфных безреберному графу $H\in\mathscr{G}(k_0)$.

Лемма 5. *При $n\to\infty$*

$$|\mathscr{G}_2(H,m)| < |\mathscr{G}(m)|2^{-4\log_2^2 n}.$$

Доказательство. Все графы из $\mathscr{G}_2(H,m)$ можно получить следующим способом.

1) В множестве V^1 выбирается $r=\lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor$ попарно не пересекающихся k-элементных подмножеств $V_1,\dots,V_r$. Число способов выбора таких подмножеств равно

$$\binom{m}{rk_0}(rk_0)!/((k_0!)^r r!) < ((k_0!)^r r!)^{-1}\prod_{i=0}^{rk_0-1}(m-i).$$

2) Каждые две вершины из V_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, ребром не соединяются.

3) Каждые две вершины из V^1, которые не принадлежат одному подмножеству V_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, соединяются или не соединяются ребром. Число возможностей равно $2^{\binom{m}{2}-r\binom{k_0}{2}}$.

Из пп. 1–3 следует, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
|\mathscr{G}_2(H,m)| &< 2^{\binom{m}{2}-r\binom{k_0}{2}}((k_0!)^r r!)^{-1} \prod_{i=0}^{rk_0-1}(m-i) \\
&= |\mathscr{G}(m)| 2^{-r\binom{k_0}{2}}((k_0!)^r r!)^{-1} \prod_{i=0}^{rk_0-1}(m-i) \\
&< |\mathscr{G}(m)| \left(\binom{m}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}}\right)^r / r! < \text{ (см. (9) и (11))} \\
&< |\mathscr{G}(m)| (2(1+o(1))\log_2^2 n)^r / r! \\
&= |\mathscr{G}(m)| (2(1+o(1))\log_2^2 n)^{\lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor} / \lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor ! \\
&< |\mathscr{G}(m)| (2(1+o(1))/3)^{\lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor} < |\mathscr{G}(m)| 2^{-4\log_2^2 n}.
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Обозначим через $\mathscr{G}_3(H,m)$ множество таких графов $G \in \mathscr{G}(m)$, что максимальное число не пересекающихся по вершинам подграфов в G, изоморфных безреберному графу $H \in \mathscr{G}(k_0)$, не больше $\lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor$, т. е. $\mathscr{G}_3(H,m) = \mathscr{G}(m) \setminus \mathscr{G}_2(H,m)$.

Следствие 1. *При* $n \to \infty$

$$|\mathscr{G}_3(H,m)| > |\mathscr{G}(m)|(1 - 2^{-4\log_2^2 n}).$$

Обозначим через $\mathscr{G}_4(H,m)$ множество таких графов $G \in \mathscr{G}(m)$, что число k-вершинных безреберных подграфов в G не превосходит $\log_2 n$. Так как определенная в (9) величина $M(H,m)$ является средним числом k-вершинных безреберных подграфов, содержащихся в графах из $\mathscr{G}(m)$, то, воспользовавшись (11) и леммой 4, получаем

Следствие 2. *При* $n \to \infty$

$$|\mathscr{G}_4(H,m)| = o(|\mathscr{G}(m)|).$$

Пусть $z = \lfloor 3e\log_2^2 n\rfloor$, $m_1 = zk_0$, $m_2 = m - m_1$, $V^2 = \{1,\dots,m_1\}$, $V^3 = \{m_1+1,\dots,m\}$ и $V_1,\dots,V_u$ — фиксированные попарно не пересекающиеся k_0-элементные подмножества из V^2, где $1 \leqslant u \leqslant z$.

Обозначим через $\mathscr{G}(H,m,V_1,\dots,V_u)$ множество таких графов $G \in \mathscr{G}(m)$, что в подграфе графа G с множеством вершин V^3 отсутствуют k_0-вершинные безреберные подграфы, а каждый подграф с множеством вершин V_i, $1 \leqslant i \leqslant u$, является безреберным. Далее обозначим через $\mathscr{G}(\overline{H},m_2)$ множество графов с вершинами из V^3, в которых нет k_0-вершинных безреберных подграфов.

Лемма 6. *При* $n \to \infty$

$$|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)| = |\mathscr{G}(\overline{H}, m_2)| 2^{m_1 m_2 + \binom{m_1}{2} - u\binom{k_0}{2}}.$$

Доказательство. Все графы из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$ можно получить следующим способом.

1) Берется произвольный граф с множеством вершин V^3, не содержащий k_0-вершинных безреберных подграфов. Число способов выбора таких графов равно $|\mathscr{G}(\overline{H}, m_2)|$.

2) При каждом i, $1 \leqslant i \leqslant u$, берется безреберный граф с множеством вершин V_i.

3) Каждые две вершины, одна из которых принадлежит множеству V^2, а другая — множеству V^3, соединяются или не соединяются ребром. Имеется $2^{m_1 m_2}$ возможностей.

4) Каждые две вершины из V^2, которые одновременно не принадлежат одному множеству V_i, $1 \leqslant i \leqslant u$, соединяются или не соединяются ребром. Число возможностей для назначения таких ребер равно $2^{\binom{m_2}{2} - u\binom{k_0}{2}}$.

Из пп. 1–4 следует утверждение леммы 6.

Обозначим через $\mathscr{G}^1(H, m, V_1, \dots, V_u)$ множество таких графов G из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, что в G отсутствует k_0-вершинный безреберный подграф, отличный от подграфов с множествами вершин $V_1, \dots, V_u$.

Лемма 7. *При любом* u, $\log_2 n \leqslant u \leqslant \lfloor 3e \log_2^2 n \rfloor$, *и* $n \to \infty$

$$|\mathscr{G}^1(H, m, V_1, \dots, V_u)| \sim |\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)|.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{G}^2(H, m, V_1, \dots, V_u)$ множество таких графов G из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, что в G имеется по крайней мере один k_0-вершинный безреберный подграф с множеством вершин V^4, где $V^4 \subset V^2$ и $V^4 \neq V_i$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant u$. Далее через $\mathscr{G}^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$ обозначим множество таких графов $G \in \mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, что в G имеется по крайней мере один k_0-вершинный безреберный подграф с множеством вершин V^5, что $V^5 \cap V^2 \neq \varnothing$ и $V^5 \cap V^3 \neq \varnothing$. Ясно, что

$$\bigcup_{i=2}^{3} \mathscr{G}^i(H, m, V_1, \dots, V_u) = \mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u) \setminus \mathscr{G}^1(H, m, V_1, \dots, V_u).$$

Очевидно, что утверждение леммы непосредственно следует из соотношения

$$\sum_{i=2}^{3} |\mathscr{G}^i(H, m, V_1, \dots, V_u)| = o(|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)|). \tag{18}$$

Убедимся в справедливости этого соотношения. Сначала рассмотрим множество $\mathscr{G}^2(H, m, V_1, \dots, V_u)$. Будем различать три случая.

1) В G имеется такой k_0-вершинный безреберный подграф G_4 с множеством вершин V^4, что $V^4 \subset V^2$ и $|V^4 \cap V_i| \leqslant \sqrt{k_0}$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant u$.

2) В G имеется такой k_0-вершинный безреберный подграф G_4 с множеством вершин V^4, что $V^4 \subset V^2$ и $\sqrt{k_0} \leqslant |V^4 \cap V_i| \leqslant k_0 - \sqrt{k_0}$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant u$.

3) В G имеется такой k_0-вершинный безреберный подграф G_4 с множеством вершин V^4, что $V^4 \subset V^2$ и $k_0 - \sqrt{k_0} < |V^4 \cap V_i| \leqslant k_0 - 1$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant u$.

Случай 1. Ясно, что в этом случае в графе G_4 имеется более $\binom{k_0}{2} - \lceil k_0\sqrt{k_0}\rceil$ таких пар вершин, что вершины каждой такой пары принадлежат разным V_i, $1 \leqslant i \leqslant u$, а число способов выбора множества V^4 меньше $\binom{\lfloor 3e \log_2^3 n\rfloor}{k_0}$. Поэтому при $n \to \infty$ число графов из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, учитываемых в случае 1, не превосходит

$$|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)| \binom{\lfloor 6e \log_2^3 n\rfloor}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2} + k_0\sqrt{k_0}} = o(|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)|). \tag{19}$$

Случай 2. Пусть $|V^4 \cap V_i| = \omega$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant u$, где $\sqrt{k}_0 < \omega \leqslant k_0 - \sqrt{k}_0$. Тогда число таких пар вершин, что одна вершина каждой пары принадлежит множеству V_i, а другая — множеству $V^2 \backslash V_i$, равно $\omega(k_0 - \omega)$. Поэтому при $n \to \infty$ число графов из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, учитываемых в случае 2, меньше

$$|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)| \binom{\lfloor 6e \log_2^3 \rfloor}{k_0} 2^{-(k_0 - \sqrt{k_0})k_0} = o(|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)|). \tag{20}$$

Случай 3. Пусть $|V^4 \cap V_i| = \omega$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant u$, где $k_0 - \sqrt{k}_0 < \omega \leqslant k_0 - 1$. Тогда число таких пар вершин, что одна вершина каждой пары принадлежит множеству V_i, а другая — множеству $V^2 \backslash V_i$, равно $\omega(k_0 - \omega)$. Так как число способов выбора множества V^4 меньше величины

$$u\binom{k_0}{\omega}\binom{\lfloor 6e \log_2^3 n\rfloor}{k_0 - \omega} < u k_0^{k_0 - \omega}(6e \log_2^3 n)^{k_0 - \omega},$$

то при $n \to \infty$ число графов из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, учитываемых в случае 3, меньше

$$\sum_{\omega = k_0 - \lfloor k_0 \rfloor}^{k_0 - 1} |\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)| u (6e k_0 \log_2^3 n)^{k_0 - \omega} 2^{-\omega(k_0 - \omega)}$$
$$= o(|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)|). \tag{21}$$

Из (19)–(21) следует, что при $n \to \infty$

$$|\mathscr{G}^2(H, m, V_1, \dots, V_u)| = o(|\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)|). \tag{22}$$

Теперь рассмотрим множество $\mathscr{G}^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$. Представим его в виде

$$\mathscr{G}^3(H, m, V_1, \dots, V_u) = \mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u) \cup \mathscr{G}_2^3(H, m, V_1, \dots, V_u), \tag{23}$$

где $\mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$ есть множество таких графов G из $\mathscr{G}(H, m, V_1, \dots, V_u)$, что в G имеется k_0-вершинный безреберный подграф G_5 с множеством вершин V^5 такой, что $|V^5 \cap V^3| \leqslant k_0/3$; $\mathscr{G}_2^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$ есть множество остальных графов из $\mathscr{G}^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$. Сначала оценим сверху мощность множества $\mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$. Это множество представим в виде

$$\mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u) = \bigcup_{s=1}^{\lfloor k_0/3 \rfloor} \mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u, s), \tag{24}$$

где $\mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u, s)$ есть множество таких графов G из $\mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u)$, что в G имеется такой k_0-вершинный безреберный подграф G_5 с множеством вершин V^5, что $|V^5 \cap V^3| = s$. Все графы из $\mathscr{G}_1^3(H, m, V_1, \dots, V_u, s)$ можно получить следующим способом.

1) Берется произвольный граф G' с множеством вершин V^3, не содержащий k_0-вершинных безреберных подграфов. Число способов выбора графа G' равно $|\mathscr{G}(\overline{H}, m_2)|$.

2) При каждом i, $1 \leqslant i \leqslant u$, берется безреберный граф с множеством вершин V_i.

3) В графе G' отбирается s-вершинный безреберный подграф G'' с множеством вершин V^5. Имеется менее $\binom{m}{s} < m^s$ возможностей.

4) В множестве V^2 отбирается $(k_0 - s)$-элементное подмножество V^6. Будем различать два случая: (a) $|V^6 \cap V_i| = v \leqslant k_0/2$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant u$; (b) $|V^6 \cap V_i| = v > k_0/2$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant u$.

В случае (a) имеется менее $\frac{k_0}{v}\binom{v}{2} < \frac{1}{2}k_0 v$ таких пар вершин, что вершины каждой пары принадлежат одному V_i, $1 \leqslant i \leqslant u$. В этом случае будем считать, что V^6 можно выбирать в V^2 произвольно, т. е. для выбора V^6 имеется менее $\binom{\lfloor 6e \log_2^3 n \rfloor}{k_0 - s}$ возможностей.

В случае (b) число способов выбора V^6, как нетрудно видеть, не превосходит

$$u\binom{k_0}{v}\binom{\lfloor 6e \log_2^3 n \rfloor}{k_0 - s - v} < u\binom{k_0}{k_0 - v}(6e \log_2^3 n)^{k_0 - s - v}.$$

5) Берется безреберный подграф с множеством вершин $V^5 \cup V^6$.

6) При фиксированных V^5 и V^6 остальные ребра назначаются произвольно. В случае (a) из п. 4 имеется менее $2^{m_1(m-m_1)-s(k_0-s)+\binom{m_1}{2}-u\binom{k_0}{2}-\binom{k_0}{2}+\frac{1}{2}k_0v}$ возможностей. В случае (b) из п. 4 имеется менее $2^{m_1(m-m_1)-s(k_0-s)+\binom{m_1}{2}-u\binom{k_0}{2}-v(k_0-s-v)}$ возможностей.

Из пп. 1–6 следует, что

$$\begin{aligned}|\mathscr{G}_1^3(H,m,V_1,\dots,V_u,s)| &< |\mathscr{G}(H,m,V_1,\dots,V_u,s)|m^s2^{-s(k_0-s)}\\ &\times\left\{\sum_{v=1}^{\lfloor k_0/2\rfloor}(6e\log_2^3 n)^{k_0-s}2^{-\binom{k_0}{2}+\frac{1}{2}k_0s}\right.\\ &\left.+\sum_{v=\lfloor k_0/2\rfloor}^{k_0-s}u\binom{k_0}{k_0-v}(6e\log_2^3 n)^{k_0-s-v}2^{-v(k_0-s-v)}\right\}.\end{aligned}$$

Пользуясь этим неравенством и (24), при $n\to\infty$ получаем

$$|\mathscr{G}_1^3(H,m,V_1,\dots,V_u)| = o(|\mathscr{G}(H,m,V_1,\dots,V_u)|). \tag{25}$$

Наконец, рассмотрим множество $\mathscr{G}_2^3(H,m,V_1,\dots,V_u)$. Согласно лемме 1 при любом s, $1\leqslant s\leqslant m$, среднее число s-вершинных безреберных подграфов в графах из $\mathscr{G}(m)$ равно $\binom{m}{s}2^{-\binom{s}{2}}$. Поэтому число графов из $\mathscr{G}(m)$, в каждом из которых содержится не менее $m^s2^{-\binom{s}{2}}$ таких подграфов, не превосходит $|\mathscr{G}(m)|/s!$. Следовательно, при любом s, $k_0/3 < s \leqslant k_0-1$, в почти каждом графе из $\mathscr{G}(m)$ число s-вершинных безреберных подграфов не превосходит $m^s2^{-\binom{s}{2}}$.

Пользуясь этим фактом и повторяя рассуждения из доказательства соотношения (25) (с заменой m^s на $m^s2^{-\binom{s}{2}}$), убеждаемся в том, что при $n\to\infty$

$$|\mathscr{G}_2^3(H,m,V_1,\dots,V_u)| = o(|\mathscr{G}(H,m,V_1,\dots,V_u)|). \tag{26}$$

Из (18)–(26) следует справедливость леммы 7. Лемма 7 доказана.

Пусть $u=\lfloor 2\log_2^2 n\rfloor$, $m_4=uk_0$, $m_5=m-m_4$, $V^4=\{1,\dots,m_4\}$, $V^5=\{m_4+1,\dots,m\}$ и $V_1,\dots,V_u$ — фиксированные попарно не пересекающиеся k_0-элементные подмножества из V^4.

Обозначим через $\mathscr{G}^4(H,m,V_1,\dots,V_u)$ множество таких графов $G\in\mathscr{G}(m)$, что в G имеется точно u k_0-вершинных безреберных подграфов $G_1,\dots,G_u$, причем множеством вершин подграфа G_i является множество V_1, $1\leqslant i\leqslant u$.

Лемма 8. *При* $n\to\infty$

$$|\mathscr{G}^4(H,m,V_1,\dots,V_u)| \sim |\mathscr{G}(\overline{H},m-uk_0)|2^{(m-uk_0)uk_0+\binom{uk_0}{2}-u\binom{k_0}{2}}.$$

Доказательство. Все графы из $\mathscr{G}^4(H,m,V_1,\dots,V_u)$ можно получить следующим способом.

1) Берется произвольный граф с множеством вершин V^5, не содержащий k_0-вершинных безреберных подграфов. Число способов выбора такого графа равно $|\mathscr{G}(\overline{H},m-uk_0)|$.

2) При каждом i, $1\leqslant i\leqslant u$, берется безреберный граф с множеством вершин V_i.

3) Каждые две вершины, одна из которых принадлежит множеству V^4, а другая — множеству V^5, соединяются или не соединяются ребром. При этом не должно появиться нового k_0-вершинного безреберного подграфа. Согласно лемме 7 число возможностей для такого назначения ребер асимптотически равно $2^{m_4m_5}$.

4) Каждые две вершины из V^4, которые одновременно не принадлежат одному множеству V_i, $1\leqslant i\leqslant u$, соединяются или не соединяются ребром. При этом не должно появиться новых k_0-вершинных безреберных подграфов. Согласно лемме 7 число возможностей для такого назначения ребер асимптотически равно $2^{\binom{m_4}{2}-u\binom{k_0}{2}}$.

Из пп. 1–4 следует, что

$$\begin{aligned}|\mathscr{G}^4(H,m,V_1,\dots,V_u)|&\sim|\mathscr{G}(\overline{H},m_5)|2^{m_4m_5+\binom{m_4}{2}-u\binom{k_0}{2}}\\&=|\mathscr{G}(\overline{H},m-uk_0)|2^{(m-uk_0)uk_0+\binom{uk_0}{2}-u\binom{k_0}{2}}.\end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

Обозначим через $\mathscr{G}^2(H,m,u)$ множество таких графов $G\in\mathscr{G}(m)$, что все k_0-вершинные безреберные подграфы в G не пересекаются по вершинам и число таких подграфов равно u.

Лемма 9. *Если* $u=\lfloor 2\log_2^2 n\rfloor$, *то при* $n\to\infty$

$$|\mathscr{G}^2(H,m,u)|\sim\frac{1}{u!}\binom{m}{k_0}^u 2^{(m-uk_0)+\binom{uk_0}{2}-u\binom{k_0}{2}}|\mathscr{G}(\overline{H},m-uk_0)|.$$

Доказательство. Ясно, что число способов выбора u попарно не пересекающихся k_0-элементных подмножеств в V^1 равно

$$\frac{m!}{(k_0!)^u(m-uk_0)!u!}<\frac{m^{uk_0}}{(k_0)!u!}\sim\frac{1}{u!}\binom{m}{k_0}^u.$$

Отсюда и из определения множества $\mathscr{G}^2(H,m,V_1,\dots,V_u)$ следует, что

$$|\mathscr{G}^2(H,m,u)|\sim\frac{1}{u!}\binom{m}{k_0}^u|\mathscr{G}^2(H,m,V_1,\dots,V_u)|.$$

Пользуясь этим фактом и леммой 8, при $n\to\infty$ получаем

$$|\mathscr{G}^2(H,m,u)|\sim\frac{1}{u!}\binom{m}{k_0}^u 2^{(m-uk_0)uk_0+\binom{uk_0}{2}-u\binom{k_0}{2}}|\mathscr{G}(\overline{H},m-uk_0)|.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если $u = \lfloor 2\log_2^2 n \rfloor$, то при $n \to \infty$*

$$|\mathscr{G}(\overline{H}, m - uk_0)| < (2,6)^{-2\log_2^2 n}|\mathscr{G}(m - uk_0)|.$$

Доказательство. Согласно лемме 9 имеем

$$|\mathscr{G}(\overline{H}, m - uk_0)| \sim |\mathscr{G}^1(H, m, u)| 2^{-(m-uk_0)uk_0 - \binom{uk_0}{2} + u\binom{k_0}{2}} u! \Big/ \binom{m}{k_0}^u$$

$$< |\mathscr{G}(m)| 2^{-(m-uk_0)uk_0 - \binom{uk_0}{2} + u\binom{k_0}{2}} u! \Big/ \binom{m}{k_0}^u$$

$$= |\mathscr{G}(m - uk_0)| 2^{u\binom{k_0}{2}} u! \Big/ \binom{m}{k_0}^u.$$

Отсюда и из неравенства

$$2^{u\binom{k_0}{2}} \Big/ \binom{m}{k_0}^u < \left(\frac{1 + o(1)}{2\log_2^2 n}\right)^u,$$

которое следует из (9) и (11), получаем

$$|\mathscr{G}(\overline{H}, m - uk_0)| < |\mathscr{G}(m - uk_0)|(1 + o(1))^u \frac{u!}{(2\log_2^2 n)^u}$$

$$= |\mathscr{G}(m - uk_0)|(1 + o(1))^u e^{-u} < (2,6)^{-2\log_2^2 n}|\mathscr{G}(m - uk_0)|.$$

Лемма 10 доказана.

Из леммы 10 следует справедливость неравенства (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коршунов А. Д.** Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 1. С. 107–173.
2. **Коршунов А. Д.** При каких k в почти каждом n-вершинном графе имеются все k-вершинные подграфы // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). Ч. I. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 89–90.
3. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. М.: Мир, 1967.
4. **Buhrman H., Li M., Tromp J., Vitányi P.** Kolmogorov random graphs and the incompressibility method // SIAM J. Comput. 1999. V. 29, N 2. P. 590–599.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: korshun@math.ncs.ru

Статья поступила
28 февраля 2001 г.
переработанный вариант —
25 сентября 2001 г.