ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2001. Серия 1. Том 8, № 4, 68–75

УДК 519.71

ПОЗИТИВНЫЕ ВЕ-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛОВАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ*)

С. С. Марченков

Установлено, что классы арифметических словарных предикатов и рудиментарных предикатов можно определить через предикаты «x есть начало y» и «x есть конец y» с использованием только позитивных логических операций дизъюнкции и конъюнкции.

При определении различных классов словарных предикатов ключевую роль играет предикат сцепления или конкатенации $xy = z$ (слово z есть результат приписывания справа слова y к слову x). Из [5] следует, что класс $\mathbf{A}$ арифметических предикатов в алфавите Σ, содержащем не менее двух букв, может быть определен как наименьший класс словарных предикатов в алфавите Σ, который содержит предикат конкатенации и замкнут относительно операций логики высказываний, навешивания кванторов существования и общности, перестановки и отождествления переменных и подстановки словарных констант (см. также [2]). Существенно более узкий класс $\mathbf{R}$ рудиментарных предикатов, предложенный Р. Смальяном [4], определяется аналогичным образом. Однако при этом рассматриваются лишь ограниченные кванторы.

Предикат конкатенации $xy = z$, по существу, содержит в себе три предиката: слово x есть начало слова z, слово y есть конец слова z и сумма длин слов x и y равна длине слова z. Возникает вопрос: какова роль каждого из этих предикатов в определении классов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{R}$?

Доказываемые ниже теоремы 1 и 2 свидетельствуют о том, что трехместный предикат конкатенации в определениях классов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{R}$ можно заменить двуместными предикатами $B(x, y)$ (x есть начало y) и $E(x, y)$ (x есть конец y). Более того, из операций логики высказываний можно ограничиться лишь позитивными операциями дизъюнкции и конъюнкции.

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00351).

© 2001 Марченков С. С.

В качестве исходного алфавита Σ рассматриваем алфавит $\{1, 2\}$. Под словом в алфавите Σ понимаем непустое слово в этом алфавите. Предикаты $B(x, y)$ и $E(x, y)$ считаем истинными при $x = y$.

Через **BEA** обозначаем наименьший класс словарных предикатов в алфавите Σ, который содержит предикаты

$$B(x,y), \quad E(x,y), \quad xa = y, \quad ax = y \ (a \in \Sigma)$$

и замкнут относительно операций дизъюнкции и конъюнкции, навешивания кванторов существования и общности, перестановки и отождествления переменных.

Теорема 1. *Классы* **A** *и* **BEA** *совпадают.*

Доказательство. Включение $\mathbf{BEA} \subseteq \mathbf{A}$ очевидно. Согласно определению класса **A** для доказательства обратного включения достаточно установить, что класс **BEA** содержит предикат конкатенации, замкнут относительно логической операции отрицания и относительно подстановки констант.

Начнем с подстановки констант. Пусть

$$1(x) \equiv (x \text{ есть слово в алфавите } \{1\}),$$
$$2(x) \equiv (x \text{ есть слово в алфавите } \{2\}).$$

Имеем

$$1(x) \equiv (\exists y)((x1 = y) \,\&\, (1x = y)).$$

Таким образом, предикат $1(x)$ входит в класс **BEA**. Аналогично доказываем, что в **BEA** входит предикат $2(x)$.

Пусть

$$C(x,y) \equiv (\text{слово } x \text{ входит в слово } y)$$

(предикат $C(x, y)$ считаем истинным при $x = y$). Имеем

$$C(x,y) \equiv (\exists z)(B(z,y) \,\&\, E(x,z)).$$

Таким образом, $C \in \mathbf{BEA}$ (в дальнейшем подобные факты особо не отмечаем). Далее получаем

$$(x = y) \equiv B(x,y) \,\&\, B(y,x),$$
$$(x = 1) \equiv 1(x) \,\&\, (\forall y)(\exists z)(2(z) \,\&\, (C(x,y) \vee (y = z))).$$

Аналогичную формулу строим для предиката $x = 2$. Если теперь b — слово в алфавите Σ и предикат $x = b$ уже определен, то

$$(x = b1) \equiv (\exists y)((y = b) \,\&\, (y1 = x)).$$

Аналогичная формула справедлива для предиката $x = b2$.

Итак, для любого слова b классу **BEA** принадлежит предикат $x = b$. С помощью этих предикатов доказываем замкнутость класса **BEA** относительно подстановки констант. Именно, если $P(x_1, \ldots, x_n)$ — предикат класса **BEA** и b — слово в алфавите Σ, то

$$P(x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \equiv (\exists y)((y = b)\ \&\ P(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)).$$

Перейдем к доказательству замкнутости класса **BEA** относительно операции отрицания. Пусть

$$B_p(x, y) \equiv (\text{слово } x \text{ есть собственное начало слова } y).$$

Имеем

$$B_p(x, y) \equiv (\exists z)(B(z, y)\ \&\ ((x1 = z) \vee (x2 = z))).$$

Далее проверяем, что

$$\begin{aligned} \neg B(x, y) \equiv B_p(y, x) \vee B(1, x)\ \&\ B(2, y) \vee B(2, x)\ \&\ B(1, y) \\ \vee (\exists z)(\exists v)(\exists w)((z1 = v)\ \&\ (z2 = w)\ \&\ (B(v, x) \\ \&\ B(w, y) \vee B(w, x)\ \&\ B(v, y))), \end{aligned}$$

$$(x \neq y) \equiv B_p(x, y) \vee \neg B(x, y),$$

$$(x1 \neq y) \equiv (y = 1) \vee E(2, y) \vee (\exists z)((z1 = y)\ \&\ (x \neq z)).$$

Аналогичным образом доказываем принадлежность классу **BEA** предикатов $\neg E(x, y)$, $x2 \neq y$ и $ax \neq y$, где $a \in \Sigma$. Отсюда вытекает, что класс **BEA** замкнут относительно операции отрицания.

Оставшуюся часть доказательства теоремы 1 посвятим построению в классе **BEA** предиката конкатенации.

Пусть $|x|$ обозначает длину слова x. Если $1 \leqslant i \leqslant |x|$, то через $(x)_i$ будем обозначать начало слова x длины i.

Чтобы убедиться в справедливости равенства $xy = z$, достаточно выбрать такое натуральное число k, что слово 1^k не входит в слово xy, образовать слово u вида

$$21^k2(y)_1 21^{k+1}2x(y)_1 21^k2(y)_2 21^{k+1}2x(y)_2 21^k2 \ldots 21^k2(y)_{|y|} 21^{k+1}2x(y)_{|y|} 21^k2 \tag{1}$$

и проверить, что слово z совпадает со словом, заключенным в слове u между последними двумя подсловами $21^{k+1}2$ и 21^k2 (это слово, разумеется, есть xy). Поскольку конкатенацию xy мы пока образовать не можем, вместо невхождения слова 1^k в слово xy будем проверять невхождение слова 1^k в слово z (как мы увидим далее, это не приведет к возникновению коллизий, поскольку в слове u нас будут интересовать исключительно подслова, которые расположены между словами 21^k2, $21^{k+1}2$ и не содержат подслов 1^k).

Введем обозначения:

$$c = 1^k, \quad d = 1^{k+1}, \quad c_1 = 2c2, \quad d_1 = 2d2.$$

Слова c_1, d_1 назовем разделителями. Формула класса **BEA**, выражающая предикат $xy = z$, будет иметь вид $(\exists u)(\exists c)\Phi(x, y, z, u, c)$, где переменная c в формуле $\Phi(x, y, z, u, c)$ выделяется конъюнктивно предикатом $1(c) \mathbin{\&} \neg C(c, z)$.

Ниже формулируется ряд требований к слову u, которые в совокупности обеспечивают слову u вид (1). Каждое требование будет выражаться предикатом из класса **BEA**, который конъюнктивно войдет в формулу Φ.

Первое требование состоит в том, что слово u не содержит подслов вида 1^l, где $l > k + 1$. Это требование выражается формулой

$$\neg(\exists v)(\exists w)((c1 = v) \mathbin{\&} (v1 = w) \mathbin{\&} C(w, u)).$$

Прежде чем формулировать остальные требования, в классе **BEA** определим предикаты $D_1(c, s, t)$, $D_2(c, s, t_1, t_2)$, $D_3(c, s, t_1, t_2, t_3)$, которые выделяют соответственно слова s вида $c2t2c$, $c2t_12d2t_22c$, $c2t_12d2t_22c2t_32c$, где слова t, t_1, t_2, t_3 не содержат слова c. Имеем

$$\begin{aligned} D_1(c, s, t) \equiv (\exists v_1)(\exists v_2)(\forall w)(B(c, s) \mathbin{\&} E(c, s) \mathbin{\&} \neg C(c, t) \\ \mathbin{\&} (t2 = v_1) \mathbin{\&} (2v_1 = v_2) \mathbin{\&} C(v_2, s) \mathbin{\&} (C(w, s) \mathbin{\&} C(v_2, w) \\ \Rightarrow (w = v_2 \lor B(1, w) \lor E(1, w))) \end{aligned}$$

(в этой формуле $v_2 = 2t2$ и w — слово, «промежуточное» между словами v_2 и s).

Предикат $D_2(c, s, t_1, t_2)$ строим с использованием предиката D_1:

$$\begin{aligned} D_2(c, s, t_1, t_2) \equiv (\exists s_1)(\exists s_2)(\exists s_3)(\exists s_4)(\forall v)(\forall w)(D_1(c, s_1, t_1) \\ \mathbin{\&} (s_1 12 = s_2) \mathbin{\&} B_p(s_2, s_3) \mathbin{\&} (s_3 2 = s_4) \mathbin{\&} B(s_4, s) \\ \mathbin{\&} ((B(s_2, v) \mathbin{\&} B(v, s_3) \Rightarrow \neg E(c, v)) \mathbin{\&} (B(s_4, w) \mathbin{\&} B(w, s) \\ \Rightarrow (w = s_4 \lor E(1, w))) \mathbin{\&} (\exists s_5)(D_1(c, s_5, t_2) \mathbin{\&} E(s_5, s)). \end{aligned}$$

Чтобы облегчить понимание этой формулы, отметим, что содержательно $s_1 = c2t_12c$, $s_2 = c2t_12d2$, $s_3 = c2t_12d2t_2$, $s_4 = c2t_12d2t_22$, v — слово, промежуточное между словами s_2 и s_3, w — слово, промежуточное между словами s_4 и s. Кроме того, формула $s_1 12 = s_2$ есть сокращение для формулы $(\exists r)((s_1 1 = r) \mathbin{\&} (r2 = s_2))$.

По аналогии с предикатом $D_2(c, s, t_1, t_2)$ определяем предикат $D_3(c, s, t_1, t_2, t_3)$:

$$\begin{aligned} D_3(c, s, t_1, t_2, t_3) \equiv (\exists s_1)(\exists s_2)(\exists s_3)(\exists s_4)(\forall v)(\forall w)(D_2(c, s_1, t_1, t_2) \\ \mathbin{\&} (s_1 2 = s_2) \mathbin{\&} B_p(s_2, s_3) \mathbin{\&} (s_3 2 = s_4) \mathbin{\&} B(s_4, s) \\ \mathbin{\&} (B(s_2, v) \mathbin{\&} B(v, s_3) \Rightarrow \neg E(c, v)) \mathbin{\&} (B(s_4, w) \mathbin{\&} B(w, s) \\ \Rightarrow (w = s_4 \lor E(1, w))) \mathbin{\&} (\exists s_5)(D_1(c, s_5, t_2) \mathbin{\&} E(s_5, s)). \end{aligned}$$

Теперь потребуем, чтобы разделители c_1, d_1 в слове u чередовались:

$$(\forall s)(\forall t)(D_1(c,s,t) \,\&\, C(s,u) \Rightarrow (C(2s12,u) \vee C(21s2,u)).$$

Далее потребуем, чтобы началом слова u было слово $2c2(y)_1 2d2x(y)_1 2c2$, а концом — слово $2c2y2d2z2c2$:

$$\begin{aligned}&(\exists s)(\exists t_1)(\exists t_2)(D_2(c,s,t_1,t_2) \,\&\, B(2s2,u)\\ &\quad \& \,(B(1,y) \,\&\, (t_1 = 1) \,\&\, (x1 = t_2) \vee B(2,y) \,\&\, (t_1 = 2) \,\&\, (x2 = t_2))\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \&(\exists s)(D_2(c,s,y,z) \,\&\, E(2s2,u)).\end{aligned}$$

Следующее наше условие состоит в том, что для всякого слова вида c_1td_1, входящего в u, где t не содержит слова c, слово t является началом слова y:

$$(\forall s)(\forall t)(D_1(c,s,t) \,\&\, C(2s12,u) \Rightarrow B(t,y)).$$

Потребуем, чтобы для любого слова вида $c2t_1d_1t_2c$, входящего в u, где слова t_1, t_2 не содержат слова c, началом слова t_2 являлось слово x, а концом — слово t_1:

$$(\forall s)(\forall t_1)(\forall t_2)(D_2(c,s,t_1,t_2) \,\&\, C(s,u) \Rightarrow B(x,t_2) \,\&\, E(t_1,t_2)).$$

Теперь запишем требование, чтобы для всякого слова вида $c2t_1d_1t_2c_1t_32c$, входящего в u, где слова t_1, t_2, t_3 не содержат слово c, для некоторого a из Σ выполнялось соотношение $t_1a = t_3$:

$$(\forall s)(\forall t_1)(\forall t_2)(\forall t_3)(D_3(c,s,t_1,t_2,t_3) \,\&\, C(s,u) \Rightarrow (t_11 = t_3 \vee t_12 = t_3)).$$

Наконец, аналогичным образом добиваемся выполнения условия: если в слово u входит слово вида $c2t_1c_1t_2d_1t_32c$, где слова t_1, t_2, t_3 не содержат слово c, то $t_1a = t_3$.

Как видно из представления (1), перечисленные выше требования обеспечивают совпадение структуры слова u со структурой представления (1) и тем самым приводят к выполнению соотношения $xy = z$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Приведенное выше доказательство теоремы 1 позволяет обосновать также несколько утверждений, близких к теореме 1. Так, при определении класса **BEA** предикаты $xa = y$, $ax = y$ можно эквивалентным образом заменить одним предикатом $|x| + 1 = |y|$. Другой вариант теоремы 1 получится, если в определении класса **BEA** исключить предикаты $xa = y$, $ax = y$ и разрешить использовать любые операции логики высказываний. Это вытекает из следующей эквивалентности:

$$\begin{aligned}(xa = y) \equiv B(x,y) \,\&\, E(a,y) \,\&\, (x \neq y) \,\&\, (\forall z)(B(z,y) \,\&\, B(x,y)&\\ \Rightarrow (z = x \vee z = y)).&\end{aligned}$$

Перейдем к исследованию класса $\mathbf{R}$ рудиментарных предикатов. Класс $\mathbf{R}$ определяется как наименьший класс словарных предикатов в алфавите Σ, который содержит предикаты равенства $x = y$, конкатенации $xy = z$ и замкнут относительно операций логики высказываний, перестановки и отождествления переменных, подстановки констант и навешивания ограниченных кванторов $(\exists x)_{x \leqslant y}$ и $(\forall x)_{x \leqslant y}$ [4]. При этом отношение $x \leqslant y$ между словами в алфавите Σ определяется следующим образом. Всякому непустому слову $a_k a_{k-1} \ldots a_1$, составленному из символов 1 и 2, ставится в соответствие натуральное число

$$\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1}.$$

Отношение между этими числами переносится на соответствующие слова в алфавите Σ.

Обозначим через $\mathbf{BER}$ наименьший класс словарных предикатов в алфавите Σ, который содержит предикаты $B(x, y)$, $E(x, y)$ и замкнут относительно операций дизъюнкции и конъюнкции, перестановки и отождествления переменных, подстановки констант, а также навешивания ограниченных кванторов $(\exists x)_{x \leqslant y}$ и $(\forall x)_{x \leqslant y}$.

Теорема 2. *Классы* $\mathbf{R}$ *и* $\mathbf{BER}$ *совпадают.*

Доказательство. Включение $\mathbf{BER} \subseteq \mathbf{R}$ следует из соотношения

$$B(x, y) \equiv (x = y) \vee (\exists z)_{z \leqslant y}(xz = y)$$

и аналогичного соотношения для предиката $E(x, y)$. Установим обратное включение. Имеем

$$\begin{aligned}(x \leqslant y) &\equiv (\exists z)_{z \leqslant y}(x = z),\\ C(x, y) &\equiv (\exists z)_{z \leqslant y}(B(z, y) \mathbin{\&} E(x, z)),\\ 1(x) &\equiv (\forall y)_{y \leqslant x}(C(2, y) \vee B(y, x))\end{aligned}$$

(выразимость предиката равенства через предикаты B и E установлена при доказательстве теоремы 1).

Пусть

$$\begin{aligned}(|x|^1 < |y|^1) &\equiv (x, y \text{ — слова в алфавите } \{1\} \text{ и } |x| < |y|),\\ (|x|^1 + 1 = |y|^1) &\equiv (x, y \text{ — слова в алфавите } \{1\} \text{ и } |x| + 1 = |y|).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(|x|^1 < |y|^1) &\equiv 1(x) \mathbin{\&} 1(y) \mathbin{\&} (\exists z)_{z \leqslant y}(E(2, z) \mathbin{\&} B(x, z)),\\ (|x|^1 + 1 = |y|^1) &\equiv (|x|^1 < |y|^1) \mathbin{\&} (\forall z)_{z \leqslant y}(C(2, z) \vee z = y \vee B(z, x)).\end{aligned}$$

Далее имеем

$$(|x| = |y|) \equiv (\exists z)_{z \leqslant x} (\forall v)_{v \leqslant x} (\forall w)_{w \leqslant y} (1(z) \mathbin{\&} (z \leqslant y) \\ \mathbin{\&} (C(2,v) \vee B(v,z)) \mathbin{\&} (C(2,w) \vee B(w,z))),$$

$$(|x| < |y|) \equiv (\exists z)_{z \leqslant x} (\exists v)_{v \leqslant y} ((|z| = |x|) \mathbin{\&} (|v| = |y|) \mathbin{\&} (|z|^1 < |v|^1)),$$

$$(|x| + 1 = |y|) \equiv (\exists z)_{z \leqslant x} (\exists v)_{v \leqslant y} ((|z| = |x|) \mathbin{\&} (|v| = |y|) \mathbin{\&} (|z|^1 + 1 = |v|^1)),$$

$$B_p(x,y) \equiv B(x,y) \mathbin{\&} (|x| < |y|).$$

Если $a \in \Sigma$, то

$$(xa = y) \equiv B(x,y) \mathbin{\&} E(a,y) \mathbin{\&} (|x| + 1 = |y|).$$

Теперь имеем

$$\neg B(x,y) \equiv B_p(y,x) \vee B(1,x) \mathbin{\&} B(2,y) \vee B(2,x) \mathbin{\&} B(1,y) \\ \vee (\exists z)_{z \leqslant x} (\exists v)_{v \leqslant x} (\exists w)_{w \leqslant y} ((z1 = v) \mathbin{\&} (z2 = w) \\ \vee (z2 = v) \mathbin{\&} (z1 = w)) \mathbin{\&} B(v,x) \mathbin{\&} B(w,y)).$$

Аналогично рассматривается предикат $\neg E(x,y)$. Таким образом, класс **BER** замкнут относительно операции отрицания.

Пусть

$C_2(x) \equiv$(слово x имеет вид $1^m 2 1^n$, где $m, n \geqslant 1$),

$B^1_{\max}(x,y) \equiv$(x есть максимальное начало слова y, являющееся словом в алфавите $\{1\}$).

Имеем

$$C_2(x) \equiv E(1,x) \mathbin{\&} (\exists y)_{y \leqslant x} (\exists z)_{z \leqslant x} (\forall v)_{v \leqslant x} (1(y) \mathbin{\&} (y2 = z) \mathbin{\&} B(z,x) \\ \mathbin{\&} (B(v,x) \mathbin{\&} B_p(z,v) \Rightarrow E(1,v))),$$

$$B^1_{\max}(x,y) \equiv 1(x) \mathbin{\&} B(x,y) \mathbin{\&} (\forall z)_{z \leqslant y} (1(z) \mathbin{\&} B(z,y) \Rightarrow B(z,x)).$$

Аналогично определяем предикат $E^1_{\max}(x,y)$. Далее получаем

$$(|x| + |y| = |z|) \equiv (x = 1 \vee x = 2) \mathbin{\&} (|y| + 1 = |z|) \vee (y = 1 \vee y = 2) \\ \mathbin{\&} (|x| + 1 = |z|) \vee (\exists s)_{s \leqslant z} (\exists t)_{t \leqslant z} (\exists v)_{v \leqslant z} (C_2(v) \mathbin{\&} B^1_{\max}(s,v) \mathbin{\&} E^1_{\max}(t,v) \\ \mathbin{\&} (|s| + 1 = |x|) \mathbin{\&} (|t| + 1 = |y|) \mathbin{\&} (|v| + 1 = |z|).$$

Доказательство теоремы 2 завершает эквивалентность

$$(xy = z) \equiv B(x,z) \mathbin{\&} E(y,z) \mathbin{\&} (|x| + |y| = |z|).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Косовский Н. К.** Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
2. **Марченков С. С.** О представлении словарных предикатов из арифметической иерархии // Дискрет. математика. 1990. Т. 2, вып. 1. С. 87–93.
3. **Марченков С. С.** О сложности вычисления рудиментарных предикатов // Дискрет. математика. 2000. Т. 12, вып. 4. С. 83–98.
4. **Смальян Р.** Теория формальных систем. М.: Наука, 1981.
5. **Quine W.** Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symb. Logic. 1946. V. 11. P. 105–114.

Адрес автора:

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова,
Воробьевы горы,
2-й учеб. корпус,
119899 Москва, Россия.
E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
3 сентября 2001 г.