ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2001. Серия 2. Том 8, № 1, 3–21

УДК 519.865.3

РАВНОВЕСИЕ НА РЕГУЛИРУЕМОМ РЫНКЕ. I: СУЩЕСТВОВАНИЕ*)

В. А. Васильев, А. В. Сидоров

Рассматривается модель экономики, в которой для каждого товара имеются два рынка: управляемый государством и конкурентный. При этом оба рынка сосуществуют в едином экономическом пространстве, допускающем свободное перемещение товаров и платёжных средств. В настоящей работе, являющейся первой в серии статей, доказывается теорема существования равновесных распределений в изучаемой модели.

Введение

Рассматриваемые в статье модели регулируемого рынка построены на основе общей концепции смешанной экономики, предложенной В. Л. Макаровым в конце 70-х годов, задолго до так называемой перестройки (см., например, [8, 15]). Если своим возникновением эта концепция обязана главным образом ростом интереса к проблематике совершенствования плановой системы с помощью элементов рыночного регулирования, то в настоящее время при анализе моделей смешанной экономики основное внимание уделяется вопросам повышения эффективности государственного регулирования в условиях свободного рынка. Главной отличительной чертой изучаемых ниже моделей является сосуществование (симбиоз) двух рынков разного типа: государственного — с твёрдыми ценами и конкурентного — со свободными ценами. При этом обмен по твёрдым ценам осуществляется только через некоторый государственный орган, устанавливающий как цены, так и фиксированные квоты закупок по ним. На конкурентном же рынке обмен между потребителями осуществляется в соответствии с ценовым механизмом выравнивания совокупного спроса и предложения. Кроме того, допускается перепродажа по свободным рыночным ценам избытка продуктов,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98–01–00664 и 00–15–98884), Российского гуманитарного научного фонда (проект 99–02–00141) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

приобретённых на государственном рынке. Именно в этом допущении и заключается принципиальное отличие используемой концепции смешанной экономики от других вариаций на эту тему [1, 11, 13, 16].

С формальной точки зрения рассматриваемые модели соединяют в себе некоторые элементы классической модели обмена Эрроу–Дебре (см. [9]) и модели экономики с рационированием, предложенной Е. М. Браверманом [1] и Ж. Дрезом [13] (см. также работу [11]). Сразу же подчеркнём, что в отличие от модели Бравермана–Дреза, в которой в качестве управляющих воздействий выступают ограничения как на цены, так и на объёмы всех закупок и продаж, в описываемых ниже моделях вмешательство центральных органов ограничивается установлением фиксированных параметров государственного рынка: твёрдых цен, объёмов госзаказа и квот рационирования.

Изучаемая модель регулируемого рынка представляет собой естественное обобщение модели смешанной экономики обмена, предложенной В. А. Васильевым [19] (см. также [3, 4, 14, 17, 20]. Основным приёмом исследования условий существования равновесных цен является построение и анализ вальрасовских расширений регулируемых рынков. В отличие от [2, 5, 7, 10, 18] этот подход допускает более широкое использование современного аппарата равновесного экономического анализа. Вместе с тем, как и в [5], ключевую роль в получении основных результатов играет рассмотрение так называемой предельной экономики, ассоциированной с исходным неклассическим рынком.

Работа состоит из четырёх параграфов. Основные понятия, включая описание модели регулируемого рынка и определение соответствующего равновесия, составляют содержание § 1. Здесь же приводится формулировка основного результата. В § 2 описаны некоторые простые, но важные свойства равновесных распределений и их аналогов. В § 3 даётся описание ряда вспомогательных конструкций, включая вальрасовское расширение отображения избыточного спроса. Наконец, в § 4 приводится доказательство теоремы существования равновесия на регулируемом рынке.

§ 1. Модель

В рассматриваемой ниже модели регулируемого рынка действуют n участников, занумерованных числами из $N = \{1, \dots, n\}$, присутствует l видов продуктов, занумерованных числами из $L = \{1, \dots, l\}$, и задан следующий набор параметров:

$$\mathscr{E} = \left\langle \{X_i, Y_i, \boldsymbol{\beta}^i, \boldsymbol{\theta}^i, \boldsymbol{\omega}^i, u_i\}_{i \in N}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathscr{P} \right\rangle, \tag{1}$$

как имеющих общесистемное значение (параметры $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\mathscr{P}$), так и дающих описание индивидуальных характеристик экономических агентов. Именно, каждый участник $i \in N$ характеризуется потребительским множеством $X_i \subseteq \mathbb{R}^L_+$, состоящим из наборов продуктов $\mathbf{x}^i = (x^i_1, \ldots, x^i_l)$, доступных ему на первом (государственном) рынке, а также потребительским множеством $Y_i \subseteq \mathbb{R}^L_+$, определяющим совокупности наборов продуктов $\mathbf{y}^i = (y^i_1, \ldots, y^i_l)$, доступных ему на втором (конкурентном) рынке. Предпочтения участников моделируются функциями полезности $u_i : X_i \times Y_i \to \mathbb{R}$, а их начальные запасы продуктов изображаются векторами $\boldsymbol{\omega}^i \in \mathbb{R}^L_+$. Кроме того, для каждого экономического агента $i \in N$ задан вектор $\boldsymbol{\theta}^i \in \mathbb{R}^L_+$, определяющий объём обязательных поставок в централизованный фонд экономики $\mathscr{E}$ (госзаказ), и вектор $\boldsymbol{\beta}^i \in \mathbb{R}^L_+$, задающий максимальный объём (квоту) рационируемых продуктов, доступных этому агенту на первом рынке. Цены, по которым централизованный орган выкупает госзаказ, изображаются вектором $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^L$, а фиксированные (твёрдые) цены, по которым этот орган даёт участникам право (не обязательство!) выкупать на первом рынке любое количество благ, не превышающее установленной квоты $\boldsymbol{\beta}^i$, задаётся вектором $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^L$. Наконец, множество $\mathscr{P} \subseteq \mathbb{R}^L$ представляет собой совокупность допустимых гибких цен, действующих на втором (конкурентном) рынке. Забегая вперёд, отметим, что, как правило, множество $\mathscr{P}$ состоит из всех неотрицательных векторов пространства $\mathbb{R}^L$ (т. е. гибкость цен на втором рынке ничем не ограничена).

Из приведённого описания видно, что вмешательство государства ограничивается тем, что оно устанавливает объёмы госзаказа $\boldsymbol{\theta}^i$ и квот $\boldsymbol{\beta}^i$, обеспечивает закупку обязательных поставок и продажу рационируемых продуктов по фиксированным ценам $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ соответственно.

Переходя к формальному определению индивидуальных бюджетных множеств участников, отметим, что главная отличительная черта этих множеств обусловлена необходимостью учёта взаимодействия рыночного и государственного регулирования: участникам предоставляется возможность исправлять «перекосы» централизованного планирования с помощью перепродажи избыточных рационируемых продуктов на свободном рынке. Разумеется, в модели учитывается, что такие перепродажи осуществляются лишь при условии, что они дают экономическим агентам дополнительный доход. Итак, при заданных ценах $\mathbf{p} \in \mathscr{P}$ каждый участник $i \in N$ приобретает товары в пределах потребительских множеств X^i, $Y^i \subseteq \mathbb{R}^L_+$ по ценам $\mathbf{h}$ и $\mathbf{p}$ соответственно. Поскольку потребление экономического агента i на государственном рынке ограничено сверху квотой $\boldsymbol{\beta}^i$, совокупность $\mathscr{A}_i$ его допустимых состояний имеет вид

$$\mathscr{A}_i = \{(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in X^i \times Y^i \mid \mathbf{x}^i \leqslant \boldsymbol{\beta}^i\}. \tag{2}$$

Далее в силу вышесказанного предполагается, что каждый агент i может перепродавать на свободном рынке излишки рационируемых товаров. Поэтому, находясь в допустимом состоянии $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in \mathscr{A}_i$, агент i располагает суммарным доходом, состоящим из двух частей:

1) $b_i(\mathbf{p}) = \mathbf{g} \cdot \theta^i + \mathbf{p} \cdot (\omega^i - \theta^i)$ — основной доход;

2) $s_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}^i) = (\mathbf{p} - \mathbf{h})^+ \cdot (\beta^i - \mathbf{x}^i)$ — дополнительный доход.*)

Таким образом, основной доход каждого участника складывается из суммы, полученной в качестве оплаты госзаказа, передаваемого в централизованный фонд, и выручки от реализации на свободном рынке остающейся (после такой передачи) части его начального запаса. Дополнительный же доход складывается из выручки от перепродажи тех рационируемых продуктов, для которых установившаяся конъюнктура свободного рынка оказалась благоприятной. Именно, предполагается, что при условии $h_j < p_j$ участник i выкупает по государственным ценам максимальный доступный для него объём β^i_j рационируемого продукта j и в случае, когда его реальная потребность x^i_j строго меньше β^i_j, продаёт избыток $\beta^i_j - x^i_j$ на свободном рынке, получая чистую прибыль от этой операции в сумме $(p_j - h_j)(\beta^i_j - x^i_j)$. Конечно, при плохой конъюнктуре $(p_j < h_j)$ такая перепродажа теряет смысл; более того, в этом случае на первом рынке выкупается лишь часть гарантированного рациона β^i_j, равная величине x^i_j, полностью идущей на потребление участника i.

В соответствии с вышесказанным множество бюджетно допустимых состояний (бюджетное множество) имеет вид

$$B_i(\mathbf{p}) = \{(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in \mathscr{A}_i \mid \mathbf{h}\cdot\mathbf{x}^i + \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^i \leqslant \mathbf{g}\cdot\theta^i + \mathbf{p}\cdot(\omega^i - \theta^i) + (\mathbf{p}-\mathbf{h})^+\cdot(\beta^i - \mathbf{x}^i)\}. \tag{3}$$

Отметим, что бюджетное неравенство в (3) можно переписать в более удобном для дальнейшего анализа виде:

$$(\mathbf{h} \vee \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}^i + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^i \leqslant d_i(\mathbf{p}) := \mathbf{g} \cdot \theta^i + \mathbf{p} \cdot (\omega^i - \theta^i) + (\mathbf{p} - \mathbf{h})^+ \cdot \beta^i, \tag{4}$$

где правая часть определяется лишь текущими ценами и фиксированными параметрами модели $\mathscr{E}$.

Что касается оптимальной реакции участников на свободные цены, то, как это принято в неоклассической теории экономического равновесия (с поправкой на специфику рассматриваемой модели), множество спроса $D_i(\mathbf{p}) \subseteq \mathscr{A}_i$ экономического агента $i \in N$ при ценах $\mathbf{p} \in \mathscr{P}$ определяется как совокупность наилучших для него элементов бюджетного

*) Здесь и далее мы будем использовать следующие обозначения: для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^L$ через $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ будем обозначать их скалярное произведение, а через $\mathbf{u} \vee \mathbf{v}$, $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$ — векторы из $\mathbb{R}^L$ с компонентами $(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_k = \max\{u_k, v_k\}$, $(\mathbf{u}^+)_k = \max\{u_k, 0\}$, $(\mathbf{u}^-)_k = \max\{-u_k, 0\}$ соответственно. Кроме того, соотношение $\mathbf{u} \gg \mathbf{v}$ будет означать, что $u_k > v_k$ для всех $k \in L$.

множества $B_i(\mathbf{p})$. Таким образом, множество спроса $D_i(\mathbf{p})$ состоит из всех решений экстремальной задачи $u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \to \max$ при условии, что

$$\begin{gathered} \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}^i + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^i \leqslant \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta}^i + \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\omega}^i - \boldsymbol{\theta}^i) + (\mathbf{p} - \mathbf{h})^+ \cdot (\boldsymbol{\beta}^i - \mathbf{x}^i), \\ \mathbf{x}^i \in X_i, \ \mathbf{x}^i \leqslant \boldsymbol{\beta}^i, \ \mathbf{y}^i \in Y_i. \end{gathered} \tag{5}$$

Попутно заметим, что функция полезности, участвующая в формулировке приведённой задачи, вообще говоря, не предполагается зависящей лишь от суммарного потребления $\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i$, т. е. $u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \not\equiv v_i(\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i)$ ни для какой функции $v_i : X_i + Y_i \to \mathbb{R}$. Это позволяет выражать различную степень доверия потребителя к государственному и конкурентному рынку.

Переходя к определению равновесных состояний модели $\mathscr{E}$ — аналогов вальрасовских равновесий классических рынков, сначала введём множество $Z(N)$ сбалансированных распределений регулируемого рынка $\mathscr{E}$, задаваемое формулой

$$Z(N) = \Big\{(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod_N \mathscr{A}_i \mid \sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i) = \sum_N \widehat{\boldsymbol{\omega}}^i\Big\},$$

где $\widehat{\boldsymbol{\omega}}^i = \boldsymbol{\omega}^i - \boldsymbol{\theta}^i + \boldsymbol{\beta}^i$ — модифицированные начальные запасы участника $i \in N$. Отметим, что распределяемый запас $\sum_N \widehat{\boldsymbol{\omega}}^i$ рынка $\mathscr{E}$ может не совпадать с суммой начальных запасов $\sum_N \boldsymbol{\omega}^i$ его участников. Это важное отличие от рассматривавшихся ранее постановок (см., например, [3, 4, 14, 17, 20]) обусловлено тем, что модели регулируемых рынков охватывают более широкий спектр воздействия на рыночную систему, включая, например, возможность увеличения объёмов рационируемых благ за счёт внешних источников $\Big($случай $\sum_N \boldsymbol{\beta}^i > \sum_N \boldsymbol{\theta}^i\Big)$.

Определение 1. Распределение $(\overline{\mathbf{x}}^i, \overline{\mathbf{y}}^i)_N \in Z(N)$ называется *равновесным*, если существует ненулевой вектор цен $\overline{\mathbf{p}} \in \mathscr{P}$ такой, что $(\overline{\mathbf{x}}^i, \overline{\mathbf{y}}^i) \in D_i(\overline{\mathbf{p}})$ для каждого $i \in N$. Совокупность всех равновесных распределений регулируемого рынка $\mathscr{E}$ обозначим через $\mathrm{W}(\mathscr{E})$.

Вектор $\overline{\mathbf{p}}$, участвующий в определении равновесного распределения, будем называть, как обычно, *равновесными ценами*, а набор $(\overline{\mathbf{p}}, (\overline{\mathbf{x}}^i, \overline{\mathbf{y}}^i)_N)$ — *равновесием*, или *равновесным состоянием* модели $\mathscr{E}$ (когда уместно подчеркнуть специфику $\mathscr{E}$, этот набор будем также называть смешанным равновесием). Как и в классическом определении вальрасовских равновесий включения $(\overline{\mathbf{x}}^i, \overline{\mathbf{y}}^i) \in D_i(\overline{\mathbf{p}})$ характеризуют оптимальность реакции участников на цены $\overline{\mathbf{p}}$, а условие $(\overline{\mathbf{x}}^i, \overline{\mathbf{y}}^i)_N \in Z(N)$ — сбалансированность спроса и предложения при этих ценах. Что касается отличительных черт смешанного равновесия, то они определяются строением бюджетных множеств $B_i(\overline{\mathbf{p}})$ (и соответствующих им множеств спроса $D_i(\overline{\mathbf{p}})$), отражающих особенности регулируемого рынка $\mathscr{E}$.

Сформулируем некоторые предположения, используемые в дальнейшем для доказательства непустоты множества $\mathrm{W}(\mathscr{E})$.

A1. При каждом $i \in N$ множества X_i и Y_i являются выпуклыми и замкнутыми подмножествами из $\mathbb{R}^L_+$, содержащими нулевой вектор.

A2. При каждом $i \in N$ функция $u_i : X_i \times Y_i \to \mathbb{R}$ является непрерывной, полустрого квазивогнутой $^{**)}$ и удовлетворяет следующему условию ненасыщаемости: при каждом $\mathbf{x}^i \in X_i$ функция $u_i(\mathbf{x}^i, \cdot) : Y_i \to \mathbb{R}$ не достигает максимального значения на Y_i.

A3. Для каждого продукта $k \in L$ существует участник $i \in N$ такой, что $\mathbf{y}^i + \lambda \mathbf{e}^k \in Y_i$ при любых $\mathbf{y}^i \in Y_i$ и $\lambda > 0$; при этом функция u_i является строго возрастающей по y_k (здесь $\mathbf{e}^k$ — k-й орт в $\mathbb{R}^L_+$).

A4. $\widehat{\omega}^i \gg \mathbf{0}$ при любом $i \in N$.

A5. $\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\theta}^i > 0$ при любом $i \in N$.

Отметим, что условия **A1–A5** являются аналогами стандартных предположений, используемых в теоремах существования вальрасовских распределений. В частности, предположения **A4, A5** (вместе с включениями $\mathbf{0} \in X_i$, $\mathbf{0} \in Y_i$) представляют собой модификацию известного условия Слейтера, обеспечивающего непрерывность бюджетного соответствия в моделях классических рынков (см., например, [12]). Что касается предположений **A1–A3**, то они автоматически выполняются для аналогов стандартных моделей чистого обмена, когда $X_i = Y_i = \mathbb{R}^L_+$ при любом $i \in N$, а функции u_i являются непрерывными, квазивогнутыми и строго возрастающими.

Основной целью работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть регулируемый рынок $\mathscr{E}$ удовлетворяет предположениям* **A1–A3** *и множество $\mathscr{P}$ является положительным ортантом $\mathbb{R}^L_+$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathbf{g} \cdot \sum_N \boldsymbol{\theta}^i < \mathbf{h} \cdot \sum_N \boldsymbol{\beta}^i$ и выполняются предположения* **A4, A5**, *то рынок $\mathscr{E}$ имеет равновесное состояние;*

2) *если $\mathbf{g} \cdot \sum_N \boldsymbol{\theta}^i = \mathbf{h} \cdot \sum_N \boldsymbol{\beta}^i$, то для существования равновесного состояния $\mathscr{E}$ достаточно выполнения предположения* **A4**;

$^{**)}$ Функция $u : X \to \mathbb{R}$, заданная на выпуклом множестве X, называется **полустрого квазивогнутой**, если при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ таких, что $u(\mathbf{x}) \neq u(\mathbf{y})$, и $\lambda \in (0,1)$ выполнено неравенство $u(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) > \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\}$.

3) *если* $\mathbf{g} \cdot \sum\limits_N \theta^i > \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i$, *то рынок* $\mathscr{E}$ *не имеет равновесного состояния.*

§ 2. Некоторые свойства полусбалансированных распределений

Приступая к рассмотрению некоторых свойств равновесных состояний, используемых в доказательстве теоремы 1, введём множество $Z^S(N)$ полусбалансированных распределений модели $\mathscr{E}$, полагая

$$Z^S(N) = \Big\{(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod_N \mathscr{A}_i \mid \sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i) \leqslant \sum_N \widehat{\omega}^i\Big\}.$$

Обозначим через X_i^S и Y_i^S проекции множества $Z^S(N)$ на множества X_i и Y_i соответственно. Так как для любого полусбалансированного распределения $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N$ справедливы неравенства $0 \leqslant \mathbf{x}^i \leqslant \beta^i$, $0 \leqslant \mathbf{y}^i \leqslant \sum\limits_N \widehat{\omega}^j$, $i \in N$, то X_i^S и Y_i^S — ограниченные множества при любом $i \in N$. Поэтому найдётся такой выпуклый компакт $C \subseteq \mathbb{R}^L$, что $X_i^S, Y_i^S \subseteq \operatorname{int} C$ $(i \in N)$, где $\operatorname{int} C$ — совокупность всех внутренних точек множества C.

Положим $X_i^C = X_i \cap C$ и $Y_i^C = Y_i \cap C$ при любом $i \in N$. Используя схему доказательства теоремы 16.5 из [9], нетрудно убедиться, что в условиях **A1, A2** множество равновесных состояний исходной модели $\mathscr{E}$ совпадает с множеством равновесий модифицированной модели регулируемого рынка

$$\mathscr{E}^C = \langle \{X_i^C, Y_i^C, \beta^i, \theta^i, \omega^i, u_i\}_{i \in N}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathscr{P}\rangle. \tag{6}$$

Следовательно, в дальнейшем можно ограничиться доказательством существования равновесия для модели $\mathscr{E}^C$ с ограниченными потребительскими множествами X_i^C и Y_i^C.

Рассмотрим специальный вариант модели экономики смешанного типа

$$\mathscr{E}^0 = \langle \{X_i^C, Y_i^C, \beta^i, \theta^i, \omega^i, u_i\}_N, \mathscr{P}\rangle,$$

где предполагается, что $\mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$, а остальные параметры те же, что и в модели $\mathscr{E}^C$. Пусть $E^C : \mathbf{p} \mapsto E^C(\mathbf{p})$ и $E^0 : \mathbf{p} \mapsto E^0(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_+)$ — многозначные отображения избыточного спроса моделей $\mathscr{E}^C$ и $\mathscr{E}^0$, где

$$E^C(\mathbf{p}) = \Big\{\sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \mid (\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in D_i^C(\mathbf{p}),\ i \in N\Big\},$$

$$E^0(\mathbf{p}) = \Big\{\sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \mid (\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in D_i^0(\mathbf{p}),\ i \in N\Big\},$$

$D_i^C(\mathbf{p})$ — множество спроса i-го участника модели $\mathscr{E}^C$, определяемое как совокупность решений задачи оптимизации $u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \to \max$ при условии, что

$$(\mathbf{h} \vee \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}^i + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^i \leqslant d_i(\mathbf{p}), \quad \mathbf{x}^i \in X_i^C, \quad \mathbf{x}^i \leqslant \beta^i, \quad \mathbf{y}^i \in Y_i^C, \tag{7}$$

а $D_i^0(\mathbf{p})$ — множество спроса i-го участника модели $\mathscr{E}^0$, являющееся (в силу $\mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$) совокупностью решений задачи $u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \to \max$ при условии, что

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i) \leqslant \mathbf{p} \cdot \widehat{\omega}^i, \quad \mathbf{x}^i \in X_i^C, \quad \mathbf{x}^i \leqslant \beta^i, \quad \mathbf{y}^i \in Y_i^C \tag{8}$$

(как и ранее, функция $d_i(\mathbf{p})$ определяется формулой (4)).

Замечание 1. Осуществляя элементарные преобразования, бюджетное ограничение (7) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \leqslant \mathbf{g} \cdot \theta^i - \mathbf{h} \cdot \beta^i + (\mathbf{h} - \mathbf{p})^+ \cdot (\beta^i - \mathbf{x}^i), \quad i \in N. \tag{9}$$

Поэтому для любого распределения $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod\limits_N D_i^C(\mathbf{p})$ и определяемого им элемента $\mathbf{e} = \sum\limits_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \in E^C(\mathbf{p})$ справедливо неравенство $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \leqslant r\Big(\mathbf{p}, \sum\limits_N \mathbf{x}^i\Big)$, или в более развёрнутом виде

$$\mathbf{p} \cdot \sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \leqslant r\Big(\mathbf{p}, \sum_N \mathbf{x}^i\Big), \tag{10}$$

где

$$r\Big(\mathbf{p}, \sum_N \mathbf{x}^i\Big) = \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i - \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i + (\mathbf{h} - \mathbf{p})^+ \cdot \sum_N (\beta^i - \mathbf{x}^i).$$

Отметим, что в случае, когда выполняются предположения **A1, A2** и распределение $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod\limits_N D_i^C(\mathbf{p})$ является полусбалансированным, в предыдущем соотношении реализуется равенство

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) = r\Big(\mathbf{p}, \sum_N \mathbf{x}^i\Big) \tag{11}$$

для всех $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in Z^S(N) \cap \prod\limits_N D_i^C(\mathbf{p})$. Действительно, используя выпуклость Y_i, предположение **A2** и определение множества C, нетрудно показать, что для любого набора $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod\limits_N D_i^C(\mathbf{p})$, удовлетворяющего условию $\mathbf{y}^i \in \operatorname{int} C$ (как это имеет место в рассматриваемом случае), бюджетное ограничение (9) выполняется как равенство. Суммируя эти равенства, получаем соотношение (11). Аналоги соотношений (10), (11) для модели $\mathscr{E}^0$ в условиях **A1, A2** вытекают непосредственно из определения бюджетных ограничений (8), а также из выпуклости множеств Y_i и ненасыщаемости предпочтений u_i. Именно, для любых $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_+$ и $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod\limits_N D_i^0(\mathbf{p})$ справедливы неравенства $\mathbf{p} \cdot \sum\limits_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \leqslant 0$; при этом в случае полусбалансированности распределения $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N$ в последнем соотношении реализуется равенство $\mathbf{p} \cdot \sum\limits_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) = 0$ для всех $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in Z^S(N) \cap \prod\limits_N D_i^0(\mathbf{p})$.

Отметим ещё одно важное свойство экстремальных полусбалансированных распределений моделей $\mathscr{E}^C$ и $\mathscr{E}^0$, состоящее в положительности отвечающих им цен.

Лемма 1. *Пусть выполняются предположения* **A1–A3**. *Тогда для любого* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_+$ *справедливы импликации*

(a) $E^C(\mathbf{p}) \cap (-\mathbb{R}^L_+) \neq \varnothing \Rightarrow \mathbf{p} \gg \mathbf{0}$,

(b) $E^0(\mathbf{p}) \cap (-\mathbb{R}^L_+) \neq \varnothing \Rightarrow \mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.

Доказательство. Ограничимся проверкой первой импликации (вторая доказывается аналогично). Пусть $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_+$, $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod\limits_N D_i^C(\mathbf{p})$, $\sum\limits_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) \leqslant \mathbf{0}$, и при этом $p_k = 0$ для некоторого $k \in L$. В силу предположения **A3** найдётся участник $i \in N$ такой, что $\mathbf{y}^i + \varepsilon \mathbf{e}^k \in Y_i$ при некотором $\varepsilon > 0$. Далее, на основании выбора C и полусбалансированности распределения $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N$ справедливо включение $\mathbf{y}^i \in \operatorname{int} C$. Поэтому в силу выпуклости Y_i найдётся $\overline{\varepsilon} > 0$ такое, что $\mathbf{y}^i + \overline{\varepsilon} \mathbf{e}^k \in Y_i^C$. Учитывая соотношения $p_k = 0$ и $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in B_i^C(\mathbf{p})$, получаем включение $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i + \overline{\varepsilon} \mathbf{e}^k) \in B_i^C(\mathbf{p})$, где $B_i^C(\mathbf{p})$ — бюджетное множество i-го участника модели $\mathscr{E}^C$ при ценах $\mathbf{p}$:

$$B_i^C(\mathbf{p}) = \{(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in B_i(\mathbf{p}) \mid \mathbf{x}^i \in X_i^C,\ \mathbf{y}^i \in Y_i^C\}.$$

В то же время на основании условия строгой монотонности из **A3** следует неравенство $u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i + \overline{\varepsilon} \mathbf{e}^k) > u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)$, что противоречит предположению $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in D_i^C(\mathbf{p})$.

§ 3. Вальрасовское расширение отображения избыточного спроса

Введём вспомогательные конструкции, полезные при исследовании соответствия избыточного спроса модели $\mathscr{E}^0$. Положим $L_0 = \{0\} \cup L$ и для каждого числа p_0 и вектора $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_l) \in \mathbb{R}^L$ через $(p_0, \mathbf{p})$ обозначим вектор $(p_0, p_1, \ldots, p_l) \in \mathbb{R}^{L_0}$. Далее для каждого $i \in N$ определим соответствие $\widetilde{D}_i^C : (p_0, \mathbf{p}) \mapsto \widetilde{D}_i^C(p_0, \mathbf{p})$, которое каждому элементу симплекса $S^{L_0} = \left\{(p_0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{L_0}_+ \mid \sum\limits_{L_0} p_k = 1\right\}$ ставит в соответствие совокупность $\widetilde{D}_i^C(p_0,\mathbf{p})$ решений задачи оптимизации $u_i(\mathbf{x}^i,\mathbf{y}^i)\to\max$ при условии, что

$$\begin{gathered}((p_0\mathbf{h})\vee\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}^i+\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^i\leqslant(p_0\mathbf{g})\cdot\boldsymbol{\theta}^i+\mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\omega}^i-\boldsymbol{\theta}^i)+(\mathbf{p}-p_0\mathbf{h})^+\cdot\boldsymbol{\beta}^i,\\ \mathbf{x}^i\in X_i^C,\quad \mathbf{x}^i\leqslant\boldsymbol{\beta}^i,\quad \mathbf{y}^i\in Y_i^C.\end{gathered}\tag{12}$$

Напомним [6, В.III], что соответствие $\varphi: X\to\mathbb{R}^m$, определённое на метрическом пространстве X, называется замкнутым в точке x, если для любых сходящихся последовательностей $\{\mathbf{x}_n\}$ и $\{\mathbf{y}_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n\in\varphi(\mathbf{x}_n)$ $(n\geqslant 1)$, справедливо включение $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{y}_n\in\varphi(\mathbf{x})$. Будем говорить, что соответствие φ ограничено, если $\varphi(\mathbf{x})\subseteq B$ для каждого $\mathbf{x}\in X$ и некоторого ограниченного множества $B\subseteq\mathbb{R}^m$.

Учитывая компактность множеств X_i^C, Y_i^C и используя стандартную аргументацию равновесного анализа [6, § 1.2, теорема 2], нетрудно проверить, что при выполнении условий **A1**, **A2** соответствие $\widetilde{D}_i^C$ является замкнутым во всех точках $(p_0,\mathbf{p})$, где функция

$$\tilde{d}(p_0,\mathbf{p})=(p_0\mathbf{g})\cdot\boldsymbol{\theta}^i+\mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\omega}^i-\boldsymbol{\theta}^i)+(\mathbf{p}-p_0\mathbf{h})^+\cdot\boldsymbol{\beta}^i,$$

являющаяся правой частью ограничения (12), удовлетворяет условию $\tilde{d}(p_0,\mathbf{p})>0$ (наряду с этим неравенством важную роль в обеспечении замкнутости соответствия $\widetilde{D}_i^C$ играет включение $(\mathbf{0},\mathbf{0})\in X_i^C\times Y_i^C$, вытекающее из **A1**). Отметим также, что из компактности множеств X_i^C и Y_i^C вытекает ограниченность соответствий $\widetilde{D}_i^C$, а из условий **A1**, **A2** — непустота, выпуклость и компактность множества $\widetilde{D}_i^C(p_0,\mathbf{p})$ при каждом $i\in N$ и $(p_0,\mathbf{p})\in S^{L_0}$.

По аналогии с отображением E^C построим вспомогательное многозначное соответствие $\widetilde{E}^C: S^{L_0}\to\mathbb{R}^L$, полагая

$$\widetilde{E}^C(p_0,\mathbf{p})=\sum_N\widetilde{D}_i^C(p_0,\mathbf{p})-\Big\{\sum_N\widehat{\boldsymbol{\omega}}^i\Big\}.$$

Непосредственно из определения соответствия $\widetilde{E}^C$ вытекает соотношение

$$\widetilde{E}^C(p_0,\mathbf{p})=\begin{cases}E^C(\mathbf{p}/p_0), & p_0>0,\\ E^0(\mathbf{p}), & p_0=0,\end{cases}$$

связывающее $\widetilde{E}^C$с введёнными ранее соответствиями избыточного спроса в моделях $\mathscr{E}^C$ и $\mathscr{E}^0$.

Замечание 2. Из условия замкнутости соответствий $\widetilde{D}_i^C$ следует, что при условиях **A1**, **A2** соответствие $\widetilde{E}^C$ замкнуто в каждой такой точке $(p_0,\mathbf{p})$, в которой выполняются неравенства $\tilde{d}_i(p_0,\mathbf{p})>0$, $i\in N$. Ограниченность соответствия $\widetilde{E}^C$ вытекает непосредственно из ограниченности соответствий $\widetilde{D}_i^C$, $i\in N$.

Центральную роль в доказательстве теоремы 1 играет вводимая ниже модификация $\widehat{E} : S^{L_0} \to \mathbb{R}^{L_0}$ соответствия E^C.

Определение 2. Соответствие $\widehat{E} : S^{L_0} \to \mathbb{R}^{L_0}$, заданное формулой

$$\widehat{E}(p_0, \mathbf{p}) = \begin{cases} \Big\{\Big(- r\Big(\mathbf{p}/p_0, \sum_N \mathbf{x}^i\Big), \sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i)\Big) \mid \\ (\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \in \prod_N D_i^C(\mathbf{p}/p_0)\Big\}, & p_0 > 0, \\ \Big[- \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i,\ \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i - \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i \Big] \times \widetilde{E}^C(0, \mathbf{p}), & p_0 = 0, \end{cases}$$

называется *вальрасовским расширением* отображения избыточного спроса E^C.

Здесь, как и ранее, используется сокращение

$$r\Big(\frac{\mathbf{p}}{p_0}, \sum_N \mathbf{x}^i\Big) = \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i - \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i + (\mathbf{h} - \mathbf{p}/p_0)^+ \cdot \sum_N (\beta^i - \mathbf{x}^i),$$

а через $[a, b]$ обозначается замкнутый интервал с концами a, b. Одно из важных свойств соответствия $\widehat{E}$ непосредственно вытекает из его построения и замечания 1.

Лемма 2. *Для любых точек $(p_0, \mathbf{p}) \in S^{L_0}$ и $(e_0, \mathbf{e}) \in \widehat{E}(p_0, \mathbf{p})$ выполняется неравенство*

$$p_0 e_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \leqslant 0. \tag{13}$$

При этом если выполняются предположения **A1**, **A2**, *то для любых $(e_0, \mathbf{e}) \in \widehat{E}(p_0, \mathbf{p})$ таких, что $\mathbf{e} \leqslant \mathbf{0}$, реализуется равенство*

$$p_0 e_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Таким образом, в отличие от E^C для соответствия $\widehat{E}$ выполняется так называемый слабый закон Вальраса (соотношение (13)). Это позволяет использовать для анализа $\widehat{E}$ приводимую ниже лемму Гейла–Никайдо–Дебре. Другим важным свойством соответствия $\widehat{E}$, обеспечивающим применимость этой леммы, является замкнутость. Ниже приводятся условия, гарантирующие наличие этого свойства как в некоторой части множества S^{L_0}, так и во всей области определения $\widehat{E}$. Отметим сразу же, что рассматриваемые части множества S^{L_0} имеют вид

$$S_\varepsilon^{L_0} = \{(p_0, \mathbf{p}) \in S^{L_0} \mid p_0 \leqslant \varepsilon\},$$

где ε — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Лемма 3. *Пусть модель $\mathscr{E}$ удовлетворяет предположениям* **A1**, **A2**. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если выполняется предположение* **A4**, *то существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что соответствие* $\widehat{E}$ *замкнуто на множестве* $S_\varepsilon^{L_0}$;

2) *если выполняются предположения* **A4** *и* **A5**, *то соответствие* $\widehat{E}$ *замкнуто на всей области определения* S^{L_0}.

Доказательство.

Утверждение 1. Сначала покажем, что при условиях **A1, A2** и **A4** найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $(p_0, \mathbf{p}) \in S_\varepsilon^{L_0}$ выполняются неравенства $\tilde{d}_i(p_0, \mathbf{p}) > 0$ для всех $i \in N$. С этой целью отметим, что из неравенств $\boldsymbol{\theta}^i \leqslant \boldsymbol{\omega}^i$ $(i \in N)$ и определения функций $\tilde{d}_i$ вытекают неравенства $\tilde{d}_i(p_0, \mathbf{p}) \geqslant 0$ для всех $i \in N$ и $(p_0, \mathbf{p}) \in S^{L_0}$. Далее, ввиду **A4** для каждого $\mathbf{p} \in S^L = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^L \mid \sum_L p_k = 1\right\}$ выполняются неравенства $\tilde{d}_i(0, \mathbf{p}) > 0$, $i \in N$. Поэтому, допуская, что для каждого $\delta \in (0, 1)$ существуют $j \in N$ и $(p_0, \mathbf{p}) \in S^{L_0}$ такие, что $p_0 \leqslant \delta$ и $\tilde{d}_j(p_0, \mathbf{p}) = 0$, получаем: для некоторого участника $i \in N$ найдутся числа $\varepsilon_m > 0$ и векторы $(p_0(m), \mathbf{p}(m)) \in S^{L_0}$ такие, что $p_0(m) \leqslant \varepsilon_m$, $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ и $\tilde{d}_i(p_0(m), \mathbf{p}(m)) = 0$ при каждом $m \geqslant 1$. Учитывая компактность S^{L_0}, можно считать, что последовательность $\{(p_0(m), \mathbf{p}(m))\}$ сходится к некоторому элементу $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}) \in S^{L_0}$. Ясно, что $\overline{p}_0 = 0$. Но тогда из непрерывности функции $\tilde{d}_i$ вытекает соотношение $\tilde{d}_i(0, \overline{\mathbf{p}}) = \lim\limits_{m\to\infty} \tilde{d}_i(p_0(m), \mathbf{p}(m)) = 0$, что противоречит неравенствам $\tilde{d}_i(0, \mathbf{p}) > 0$ $(\mathbf{p} \in S^L)$, о которых говорилось выше.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\tilde{d}_i(p_0, \mathbf{p}) > 0$ для любого $i \in N$ и любого $(p_0, \mathbf{p}) \in S_\varepsilon^{L_0}$. Рассмотрим произвольные сходящиеся последовательности $\{(p_0(m), \mathbf{p}(m))\} \subseteq S_\varepsilon^{L_0}$, $\{(e_0(m), \mathbf{e}(m))\} \subseteq \mathbb{R}^{L_0}$ такие, что $\lim\limits_{m\to\infty} (p_0(m), \mathbf{p}(m)) = (\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}})$, $\lim\limits_{m\to\infty} (e_0(m), \mathbf{e}(m)) = (\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}})$, и при каждом $m \geqslant 1$ выполняется включение $(e_0(m), \mathbf{e}(m)) \in \widehat{E}(p_0(m), \mathbf{p}(m))$. При доказательстве включения $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in \widehat{E}(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}})$ достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $\overline{p}_0 = 0$ и $p_0(m) > 0$ при любом $m \geqslant 1$ (во всех остальных ситуациях включение $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in \widehat{E}(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}})$ вытекает из построения соответствия $\widehat{E}$ и отмечавшейся в замечании 2 замкнутости соответствия $\widetilde{E}^C$ в каждой точке, где выполняются неравенства $\tilde{d}_i(p_0, \mathbf{p}) > 0$, $i \in N$). Напомним, что согласно определению соответствия $\widehat{E}$ для каждого $m \geqslant 1$ существует распределение $(\mathbf{x}^i(m), \mathbf{y}^i(m))_N \in \prod_N \widetilde{D}_i^C(p_0(m), \mathbf{p}(m))$ такое, что $\mathbf{e}(m) = \sum_N (\mathbf{x}^i(m) + \mathbf{y}^i(m) - \widehat{\boldsymbol{\omega}}^i)$, а $e_0(m)$ определяется формулой

$$e_0(m) = \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i - \mathbf{g} \cdot \sum_N \boldsymbol{\theta}^i - \left(\mathbf{h} - \frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}\right)^+ \cdot \sum_N (\beta^i - \mathbf{x}^i(m)) \qquad (14)$$

(отметим, что ввиду компактности множеств X_i^C, Y_i^C последовательности $\{(\mathbf{x}^i(m), \mathbf{y}^i(m)\}$ $(m \geqslant 1)$ можно считать сходящимися при каждом $i \in N$). Учитывая замкнутость соответствия $\widetilde{E}$ на $S_\varepsilon^{L_0}$, имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{e}(m) = \overline{\mathbf{e}} \in \widetilde{E}(0, \overline{\mathbf{p}})$. Далее в силу формулы (14) и неравенств

$$0 \leqslant \left(\mathbf{h} - \frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}\right)^+ \cdot \sum_N (\beta^i - \mathbf{x}^i(m)) \leqslant \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i,$$

вытекающих из соотношений $\mathbf{x}^i(m) \leqslant \beta^i$ $(i \in N)$, имеем

$$-\mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i \leqslant e_0(m) \leqslant \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i - \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i$$

для каждого $m \geqslant 1$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} (e_0(m), \mathbf{e}(m)) = (\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in \left[-\mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i, \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i - \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i\right] \times \widetilde{E}(0, \overline{\mathbf{p}}),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Поскольку при условиях **A4, A5** неравенства $\tilde{d}_i(p_0, \mathbf{p}) > 0$ справедливы при любом $i \in N$ и $(p_0, \mathbf{p}) \in S^{L_0}$, использование тех же рассуждений, что и в доказательстве первого утверждения, даёт искомый результат: соответствие $\widehat{E}$ замкнуто во всей области определения множества S^{L_0}.

Установленные свойства соответствия $\widehat{E}$, как уже отмечалось, позволяют воспользоваться для доказательства теоремы 1 следующим вариантом известной леммы Гейла–Никайдо–Дебре [6, С.III.(15)].

Лемма 4. *Пусть $K \subseteq \mathbb{R}_+^m$ — произвольный непустой выпуклый замкнутый конус с вершиной в точке $\mathbf{0}$, не содержащий линейных подпространств, $S^m = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum\limits_{k=1}^m p_k = 1\right\}$, $Q = S^m \cap K \neq \varnothing$, а $F : Q \to \mathbb{R}^m$ — ограниченное замкнутое соответствие с непустыми выпуклыми компактными значениями. Если для любых $\mathbf{q} \in Q$ и $\mathbf{f} \in F(\mathbf{q})$ выполняются неравенства $\mathbf{q} \cdot \mathbf{f} \leqslant 0$, то найдется вектор $\mathbf{q}^* \in Q$ такой, что $F(\mathbf{q}^*) \cap K^- \neq \varnothing$, где $K^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \leqslant 0,\ \mathbf{u} \in K\}$ — отрицательная поляра конуса K.*

§ 4. Доказательство теоремы существования

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 1, отметим, что непустота и выпуклость значений соответствия $\widehat{E}$, требующиеся для использования леммы 4, обеспечиваются компактностью и выпуклостью множеств X_i^C, Y_i^C, а также квазивогнутостью и непрерывностью функций u_i (предположения **A1, A2**).

Доказательство теоремы 1.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i < \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i$ и выполняются предположения **A1–A5**. Положим $Q_0 = S^{L_0}$ и для каждого целого $m \geqslant 1$ определим множество

$$Q_m = \left\{(p_0, \mathbf{p}) \in Q_0 \mid p_0 \geqslant \frac{1}{m+1}\right\}.$$

Далее обозначим через K_m конические оболочки множеств Q_m $(m \geqslant 0)$. В силу конечной порождённости непустые выпуклые конусы K_m замкнуты, причём непосредственно из их построения вытекают равенства $K_m \cap S^{L_0} = Q_m$. Таким образом, на основании лемм 2 и 3 и отмечавшейся ограниченности соответствия $\widehat{E}$, а также непустоты и выпуклости его значений получаем, что соответствия $\widehat{E}_m : Q_m \to \mathbb{R}^{L_0}$ и конусы K_m удовлетворяют всем условиям леммы 4 (здесь $\widehat{E}_m$ — сужение соответствия $\widehat{E}$ на множество Q_m). Следовательно, для каждого $m \geqslant 1$ существуют векторы $(p_0(m), \mathbf{p}(m)) \in Q_m$ и $(e_0(m), \mathbf{e}(m)) \in \widehat{E}(p_0(m), \mathbf{p}(m))$ такие, что $(e_0(m), \mathbf{e}(m))$ содержится в отрицательной поляре конуса K_m

$$\forall (p_0, \mathbf{p}) \in K_m [p_0 \cdot e_0(m) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(m) \leqslant 0]. \tag{15}$$

Ввиду ограниченности соответствия $\widehat{E}$, а также в силу включений $(p_0(m), \mathbf{p}(m)) \in Q_0$ можно считать, что существуют пределы $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) = \lim_{m\to\infty} (e_0(m), \mathbf{e}(m))$ и $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}) = \lim_{m\to\infty} (p_0(m), \mathbf{p}(m))$. В силу замкнутости соответствия $\widehat{E}$ на Q_0, вытекающей из леммы 3, для предельных точек выполняется включение

$$(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in \widehat{E}(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}). \tag{16}$$

Далее, поскольку замыкание множества $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$ совпадает с Q_0, в силу неравенств (15) имеем $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in K_0^-$. Так как $K_0 = \mathbb{R}_+^{L_0}$, из последнего неравенства получаем $\overline{e}_0 \leqslant 0$, $\overline{\mathbf{e}} \leqslant \mathbf{0}$. Комбинируя неравенство $\overline{\mathbf{e}} \leqslant \mathbf{0}$ и включение $\overline{\mathbf{e}} \in \widetilde{E}(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}})$, вытекающее из (16), согласно лемме 1 имеем $\overline{\mathbf{p}} \gg \mathbf{0}$. Покажем, что выполняется и более сильное неравенство $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}) \gg \mathbf{0}$. С этой целью отметим, что ввиду соотношений $\overline{\mathbf{p}} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{p}(m)$ и $\overline{\mathbf{p}} \gg \mathbf{0}$ при любом достаточно большом m выполняется неравенство $\mathbf{p}(m) \gg \mathbf{0}$. Поэтому если $\overline{p}_0 = 0$, то компоненты векторов $\frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}$ неограниченно возрастают и, следовательно, при любом достаточно большом m выполняется неравенство $\frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)} \geqslant \mathbf{h}$. Значит, в силу определения $e_0(m)$ для любого такого m выполняется равенство $e_0(m) = \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i - \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i$. Отсюда и из неравенства $\mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i - \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i > 0$ получаем противоречие с установленным выше соотношением $\lim_{m\to\infty} e_0(m) = \overline{e}_0 \leqslant 0$.

Из сказанного следует справедливость неравенств $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}) \gg \mathbf{0}$ и $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \leqslant \mathbf{0}$. Используя соотношение $\overline{\mathbf{e}} \leqslant \mathbf{0}$, включение (16) и лемму 2, имеем $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}) \cdot (\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) = 0$. Отсюда с учетом положительности вектора $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}})$ получаем равенство $\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$, которое в силу включения $\overline{\mathbf{e}} \in E^C(\overline{\mathbf{p}}/\overline{p}_0)$ означает равновесность цен $\overline{\mathbf{p}}/\overline{p}_0$ в модели $\mathscr{E}^C$.

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{g} \cdot \sum\limits_N \theta^i = \mathbf{h} \cdot \sum\limits_N \beta^i$ и выполняются предположения **A1–A4**. Модифицируя надлежащим образом доказательство пункта **(1)**, покажем, что в рассматриваемом случае $\mathrm{W}(\mathscr{E}) \neq \varnothing$. Прежде всего отметим, что согласно первому утверждению леммы 3 существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение $\widehat{E} : S_\varepsilon^{L_0} \to \mathbb{R}^{L_0}$ является замкнутым. Положим $Q_{(0)} = S_\varepsilon^{L_0}$ и для каждого целого $m \geqslant 1$ определим множество

$$Q_{(m)} = \left\{(p_0, \mathbf{p}) \in Q_{(0)} \mid p_0 \geqslant \frac{\varepsilon}{m+1}\right\}.$$

Далее обозначим через $K(m)$ конические оболочки множеств $Q_{(m)}$ $(m \geqslant 0)$. В силу конечной порождённости непустые выпуклые конусы $K_{(m)}$ являются замкнутыми, при этом непосредственно из их построения вытекают равенства $K_{(m)} \cap S^{L_0} = Q_{(m)}$. Учитывая отмечавшуюся уже непустоту и выпуклость значений соответствия $\widehat{E}$, на основании лемм 2 и 3 получаем, что соответствия $\widehat{E}_{(m)} : Q_{(m)} \to \mathbb{R}^{L_0}$ и конусы $K_{(m)}$ удовлетворяют всем условиям леммы 4 (здесь $\widehat{E}_{(m)}$ — сужение соответствия $\widehat{E}$ на множество $Q_{(m)}$). Следовательно, для каждого $m \geqslant 1$ существуют векторы $(p_0(m), \mathbf{p}(m)) \in Q_{(m)}$ и $(e_0(m), \mathbf{e}(m)) \in \widehat{E}(p_0(m), \mathbf{p}(m))$ такие, что $(e_0(m), \mathbf{e}(m))$ содержатся в отрицательной поляре конуса $K_{(m)}$:

$$\forall (p_0, \mathbf{p}) \in K_{(m)}[p_0 e_0(m) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}(m) \leqslant 0]. \tag{17}$$

Учитывая компактность $S_\varepsilon^{L_0}$ и ограниченность соответствия $\widehat{E}$, можно считать, что существуют пределы $(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}) = \lim\limits_{m\to\infty} (p_0(m), \mathbf{p}(m))$ и $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) = \lim\limits_{m\to\infty} (e_0(m), \mathbf{e}(m))$. В силу леммы 3 для предельных точек выполняется соотношение

$$(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in \widehat{E}(\overline{p}_0, \overline{\mathbf{p}}). \tag{18}$$

С другой стороны, так как замыкание множества $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_{(m)}$ совпадает с $Q_{(0)}$, то неравенства (17) дают включение $(\overline{e}_0, \overline{\mathbf{e}}) \in K_{(0)}^-$. Пользуясь этим фактом и тем, что конус $K_{(0)}$ содержит все орты $\mathbf{e}^k$ $(k = 1, \ldots, l)$ из $\mathbb{R}^{L_0}$, получаем неравенство $\overline{\mathbf{e}} \leqslant \mathbf{0}$. Следовательно, из (18) и определения соответствия $\widehat{E}$ вытекает одно из включений: 1) $\overline{\mathbf{e}} \in E^C\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}}{\overline{p}_0}\right) \cap \left(-\mathbb{R}_+^L\right)$ при $\overline{p}_0 > 0$ или 2) $\overline{\mathbf{e}} \in E^0(\overline{\mathbf{p}}) \cap \left(-\mathbb{R}_+^L\right)$ при $\overline{p}_0 = 0$. Согласно лемме 1 каждое из этих включений влечёт положительность всех компонент вектора $\overline{\mathbf{p}}$.

Значит, в силу соотношения $\overline{\mathbf{p}} = \lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{p}(m)$ имеем $\mathbf{p}(m) \gg \mathbf{0}$ для любого m, начиная с некоторого $m_0 \geqslant 1$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $\overline{p}_0 = 0$ и 2) $\overline{p}_0 > 0$. В первом случае в силу положительности вектора $\overline{\mathbf{p}}$ при достаточно больших $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство $\frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)} \geqslant \mathbf{h}$. Значит, в предположении $\mathbf{g} \cdot \sum\limits_N \theta^i = \mathbf{h} \cdot \sum\limits_N \beta^i$ для достаточно больших m из определения величин $e_0(m)$ вытекают равенства

$$e_0(m) = -\Big(\mathbf{h} - \frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}\Big)^+ \Big(\sum_N \beta^i - \sum_N \mathbf{x}^i(m)\Big) - \mathbf{g} \cdot \sum_N \theta^i + \mathbf{h} \cdot \sum_N \beta^i = 0,$$

где $\mathbf{x}^i(m)$ — компоненты такого распределения

$$(\mathbf{x}^i(m), \mathbf{y}^i(m))_N \in \prod_N \widetilde{D}_i^C(p_0(m), \mathbf{p}(m)),$$

что $\mathbf{e}(m) = \sum\limits_N (\mathbf{x}^i(m) + \mathbf{y}^i(m) - \widehat{\omega}^i)$ и $e_0(m) = -r\Big(\frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}, \sum\limits_N \mathbf{x}^i(m)\Big)$. Итак, существует $m_1 \geqslant 1$ такое, что $\mathbf{p}(m) \gg \mathbf{0}$, $e_0(m) = 0$ и $(0, \mathbf{e}(m)) \in \widehat{E}(p_0(m), \mathbf{p}(m)) \cap K^-_{(m)}$ при любом $m \geqslant m_1$. Покажем, что последнее включение допускает усиление: для любого $m \geqslant m_1$ справедливо включение $(0, \mathbf{e}(m)) \in K^-_{(0)}$. Действительно, каждый вектор $\mathbf{v} \in K_{(0)}$ можно представить в виде суммы $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, где $\mathbf{v}' \in K_{(m)}$, а $\mathbf{v}'' = (-\delta, 0, \dots, 0)$ для некоторого $\delta \geqslant 0$. Поэтому $(0, \mathbf{e}(m)) \cdot \mathbf{v} = (0, \mathbf{e}(m)) \cdot \mathbf{v}' \leqslant 0$. Ввиду произвольности $\mathbf{v}$ и $m \geqslant m_1$ это означает, что $(0, \mathbf{e}(m)) \in K^-_{(0)}$ $(m \geqslant m_1)$. Как уже отмечалось, для всех $(z_0, \mathbf{z}) \in K^-_{(0)}$ выполняется неравенство $\mathbf{z} \leqslant \mathbf{0}$. Значит, в силу сказанного имеем $\mathbf{e}(m) \leqslant \mathbf{0}$ для любого $m \geqslant m_1$. Отсюда и из леммы 2 вытекает равенство $(p_0(m), \mathbf{p}(m)) \cdot (e_0(m), \mathbf{e}(m)) = 0$ при любом $m \geqslant m_1$. Пользуясь этим фактом и соотношениями $\mathbf{p}(m) \gg \mathbf{0}$, $e_0(m) = 0$ $(m \geqslant m_1)$, получаем $\mathbf{e}(m) = \mathbf{0}$ для всех $m \geqslant m_1$. В силу включений $\mathbf{e}(m) \in E^C\left(\frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}\right)$ последние равенства означают равновесность всех цен $\frac{\mathbf{p}(m)}{p_0(m)}$ $(m \geqslant m_1)$ в модели $\mathscr{E}^C$.

Рассмотрим второй случай: $\overline{p}_0 > 0$. Как уже отмечалось, в этой ситуации справедливо включение $\overline{\mathbf{e}} \in E^C\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}}{\overline{p}_0}\right) \cap \left(-\mathbb{R}^L_+\right)$. Поэтому на основании леммы 2 имеем $\overline{p}_0\overline{e}_0 + \overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{e}} = 0$. Отсюда и из неравенства $\overline{e}_0 \leqslant 0$, вытекающего из равенства $\mathbf{g} \cdot \sum\limits_N \theta^i = \mathbf{h} \cdot \sum\limits_N \beta^i$ и определения отображения $\widehat{E}$, получаем $\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{e}} = -\overline{p}_0\overline{e}_0 \geqslant 0$. Последнее соотношение вместе с очевидным неравенством $\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{e}} \leqslant 0$ доказывает равновесность цен $\overline{\mathbf{p}}/\overline{p}_0$. Действительно, соотношение $\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{e}} = 0$ и положительность вектора $\overline{\mathbf{p}}$, вытекающая из леммы 1 на основании включения $\overline{\mathbf{e}} \in E^C\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}}{\overline{p}_0}\right) \cap \left(-\mathbb{R}^L_+\right)$, дают искомое равенство $\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$.

Утверждение 3. Пусть $\mathbf{g} \cdot \sum\limits_N \boldsymbol{\theta}^i > \mathbf{h} \cdot \sum\limits_N \boldsymbol{\beta}^i$ и выполняются предположения **A1–A3**. Допуская существование сбалансированного распределения $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N$ и цен $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющих соотношениям $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \in D_i^C(\mathbf{p})$ $(i \in N)$, на основании леммы 1 получаем

$$\mathbf{p} \cdot \sum_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) = \mathbf{g} \cdot \sum_N \boldsymbol{\theta}^i - \mathbf{h} \cdot \sum_N \boldsymbol{\beta}^i + (\mathbf{h} - \mathbf{p})^+ \cdot \sum_N (\boldsymbol{\beta}^i - \mathbf{x}^i) > 0,$$

что противоречит равенству $\mathbf{p} \cdot \sum\limits_N (\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i - \widehat{\omega}^i) = 0$, вытекающему из сбалансированности $(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N$.

Замечание 3. Нетрудно проверить, что приведённым доказательством можно воспользоваться и при несколько более слабых (но более громоздких) предположениях. Например, некоторые условия из предположений **A2, A3** можно ослабить, заменяя при этом в подходящих местах множества X_i и Y_i на X_i^C и Y_i^C. Именно, вместо условия ненасыщаемости из **A2** достаточно потребовать, чтобы для всех $\mathbf{x}^i \in X_i^C$ выполнялось неравенство $\sup\{u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \mid \mathbf{y}^i \in Y_i\} > \sup\{u_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) \mid \mathbf{y}^i \in Y_i^C\}$, а условие $\forall \mathbf{y}^i \in Y_i \forall \lambda > 0 [\mathbf{y}^i + \lambda \mathbf{e}^k \in Y_i]$ можно заменить требованием $\forall \mathbf{y}^i \in Y_i^C \exists \lambda > 0 [\mathbf{y}^i + \lambda \mathbf{e}^k \in Y_i]$. Если предположить, как и в исходных формулировках, достаточно «большие» размеры потребительских множеств Y_i, то указанные ослабления условий **A2, A3** не исключают ограниченности этих множеств.

В заключение этого параграфа отметим, что теоремы существования равновесий в смешанных экономиках играют важную роль в вопросах регуляризации несбалансированных (т. е. не имеющих равновесий) классических рынков. Поскольку общая постановка задач регуляризации выходит за рамки настоящей статьи, для иллюстрации ограничимся рассмотрением одного известного примера двухпродуктового несбалансированного рынка $\mathscr{E}$, имеющего вид

$$\mathscr{E} = \left\langle \{u_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1, u_2(x_1^2, x_2^2) = x_2^2, \boldsymbol{\omega}^1 = (1,1), \boldsymbol{\omega}^2 = (0,1)\} \right\rangle$$

(напомним, что в классических рынках все регулирующие параметры равны нулю). Простая проверка убеждает, что ни один из векторов цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^2 \backslash 0$ не уравновешивает спрос и предложение в модели $\mathscr{E}$. В то же время сколь угодно малые регулирующие воздействия могут приводить к появлению равновесных состояний в смешанных экономиках, близких к $\mathscr{E}$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим последовательность регулируемых рынков при $m \geqslant 2$

$$\mathscr{E}_m = \left\langle \{\widetilde{u}_i, \boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{\beta}^i(m), \boldsymbol{\theta}^i(m)\}_N, \mathbf{g}(m), \mathbf{h}(m) \right\rangle,$$

где N и $\boldsymbol{\omega}^i$ те же, что и в модели $\mathscr{E}$, $\widetilde{u}_i$ определяется из соотношений $\widetilde{u}_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i) = u_i(\mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i)$, а $\boldsymbol{\beta}^1(m) = \boldsymbol{\beta}^2(m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$, $\boldsymbol{\theta}^1(m) = \left(\frac{2}{m}, \frac{1}{m}\right)$,

$\theta^2(m) = \left(0, \frac{1}{m}\right)$ и $\mathbf{g}(m) = \mathbf{h}(m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$. Нетрудно убедиться, что все модели $\mathscr{E}_m$ удовлетворяют условиям утверждения 2 теоремы 1. Соответствующие множества равновесных цен P_m^0 имеют вид

$$P_m^0 = \left\{(p_1, p_2) \mid p_1 \geqslant 1,\, p_2 = \frac{p_1}{m}\right\},$$

а соответствующие им совокупности равновесных распределений образуют множества

$$W_m^0 = \left\{(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i)_N \mid \mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i = \mathbf{z}^i,\, 0 \leqslant \mathbf{x}^i \leqslant \beta^i(m),\ i = 1, 2\right\},$$

где $\mathbf{z}^1 = (1, 0)$, $\mathbf{z}^2 = (0, 2)$.

Итак, ввиду сходимости к нулю всех регулирующих параметров при достаточно больших m модели $\mathscr{E}_m$ мало отличаются от $\mathscr{E}$, а любая последовательность соответствующих им равновесных распределений $(\mathbf{x}^i(m), \mathbf{y}^i(m))_N$ сходится к предельному распределению $(0, \mathbf{z}^i)_N$, порождающему (единственное) оптимальное по Парето распределение $(\mathbf{z}^i)_N$ в $\mathscr{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Браверман Е. М.** Модель производства с неравновесными ценами // Экономика и мат. методы. 1972. Т. 8, № 2. С. 175–190.
2. **Васильев В. А.** О согласованных распределениях в экономических моделях с двумя типами цен // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. Вып. 42(59). С. 23–41.
3. **Васильев В. А.** О равновесии Эджворта для некоторых видов неклассических рынков // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 3–52. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 28).
4. **Васильев В. А.** О совпадении ядер и согласованных состояний в смешанных экономических системах // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 3. С. 446–450.
5. **Васильев В. А., Сидоров А. В.** Существование согласованных состояний при неограниченности гибких цен // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. Вып. 49(66). С. 5–23.
6. **Гильденбрандт В.** Ядро и равновесие в большой экономике. М.: Наука, 1986.
7. **Кошевой Г. А.** Теоремы о равновесиях в моделях экономики с двумя видами цен // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. Вып. 43(60). С. 130–141.
8. **Макаров В. Л., Васильев В. А., Козырев А. Н., Маракулин В. М.** О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982. Вып. 30(47). С. 5–86.

9. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры в математической экономике. М.: Мир, 1972.
10. **Чугунов П. И.** Равновесия и полуравновесия в моделях экономики с двумя видами цен // Оптимизация: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. Вып. 43(60). С. 142–160.
11. **Bènassy J. P.** Nonclearing markets, microeconomic concepts and macroeconomic applications // J. Econom. Lit. 1993. V. 31. P. 732–761.
12. **Debreu G.** Existence of competitive equilibrium // Handbook of Mathematical Economics. Amsterdam–New York: North-Holland Publ. Co., 1982. V. 2. P. 697–744.
13. **Drèze J. H.** Existence of an exchange equilibrium under price rigidities // Intern. Econom. Rev. 1975. V. 16, N 2. P. 301–320.
14. **van der Laan G., Vasil'ev V. A., Venniker R. J. G.** On the transition of mixed economies to market economies // Siberian Adv. Math. 2000. V. 10, N 1. P. 1–33.
15. **Makarov V. L., Vasil'ev V. A., Kozyrev A. N., Marakulin V. M.** Equilibria, rationing and stability // Matekon. 1989. V. 25, N 4. P. 4–95.
16. **Polterovich V. M.** Rationing, queues and black market // Econometrica. 1993. V. 61, N 1. P. 1–28.
17. **Sidorov A. V., Vasil'ev V. A.** Equilibria in mixed economies: existence and stability of tatonnement process // Тр. Второй Сиб. конф. по прикладной и индустриальной математике. Т. 1. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1997. С. 365–374.
18. **Vasil'ev V. A.** Rationing schemes and markets // Optimal Decisions in Markets and Planed Economies. San Francisco; Boulder; London: Westview Press, 1990. P. 283–295.
19. **Vasil'ev V. A.** On the core equivalence theorem in mixed economy // European Meeting of the Econometric Society: Abstracts. Brussels: ULB Press, 1992. P. 80.
20. **Vasil'ev V. A.** Core equivalence in a mixed economy // The Theory of Markets. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1999. P. 59–82.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: sidorov@math.nsc.ru,
vasilev@math.nsc.ru

Статья поступила
9 февраля 2001 г.