ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2001. Серия 2. Том 8, № 1, 40–46

УДК 519.87+519.854

ТРЕХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА НОМЕНКЛАТУРЫ ИЗДЕЛИЙ*)

В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин

Модель выбора номенклатуры изделий рассматривается как игровая ситуация с тремя участниками. Производитель изделий максимизирует прибыль, которая зависит от предпочтений потребителей продукции, минимизирующих свои затраты. Третья сторона — государство — с помощью дотаций стремится согласовать интересы производителя и потребителей, минимизируя общую сумму дотаций. Показано, что решение этой трехуровневой задачи сводится к серии задач линейного программирования.

Введение

Многие модели исследования операций формулируются в виде экстремальных задач:

$$F(x) \to \min_x, \quad x \in X,$$

когда требуется найти наилучшее по критерию $F(x)$ решение x^* из множества X допустимых решений. Подобные задачи можно назвать *одноуровневыми*. В последние годы внимание исследователей привлекают *двухуровневые* модели [7, 8, 10]. Они отражают ситуации, когда лицо, принимающее решение, должно учитывать поведение другой стороны, действующей по своему критерию. Двухуровневые модели имеют следующую структуру.

Задача второго уровня: $F(x, y^*) \to \min\limits_x, \quad x \in X.$

Задача первого уровня: $G(y) \to \min\limits_y, \quad y \in Y(x).$

Элемент $y^* \in Y(x)$ — наилучшее решение задачи первого уровня при фиксированном элементе $x \in X$. Впервые двухуровневые модели принятия решений рассматривались в [9] при описании стратегий фирм, конкурирующих на одном рынке. В [2] подобные модели применялись

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00482).

для анализа задач распределения ресурсов в иерархических системах, состоящих из «центра» и связанных с ним производственных звеньев.

В [4] рассмотрена двухуровневая модель выбора номенклатуры изделий, обобщающая задачу стандартизации [1]. Производитель изделий максимизирует прибыль, зависящую от предпочтений потребителей продукции. Они выбирают те изделия из предлагаемых производителем, которые минимизируют закупочные и эксплуатационные расходы. Аналогичные модели при дополнительных предположениях изучались в [3, 6].

В настоящей работе продолжаются исследования в этом направлении и делается переход к трехуровневой модели. Первые два уровня по-прежнему представляют производитель изделий и их потребители. Третий уровень моделирует действия государственных структур, которые с помощью дотаций стремятся согласовать интересы производителя и потребителей, минимизируя общую сумму дотаций. Впервые подобная постановка предложена в [5].

1. Двухуровневая модель

Сначала сформулируем двухуровневую модель выбора номенклатуры изделий и затем от нее перейдем к трехуровневой постановке. Пусть имеется производитель, способный выпускать n видов изделий, которые используются m потребителями. Обозначим через $I = \{1, \dots, n\}$ множество номеров видов изделий и через $J = \{1, \dots, m\}$ множество номеров потребителей.

Производитель характеризуется следующими величинами:

g_i^0 — затраты на производство изделий вида $i \in I$. Предполагается, что эти затраты не зависят от числа выпускаемых изделий. Поэтому объем производства можно считать «неограниченным».

g_{ij} — доход от реализации изделий вида i потребителю $j \in J$.

x_i — переменные выбора производителя: $x_i = 1$, если изделия вида i выпускаются, и $x_i = 0$ в противном случае.

$x = (x_i)$ — вектор переменных x_i, $i \in I$. Он может быть любым двоичным вектором длины n, т. е. производитель вправе выпускать любую систему изделий или вовсе отказывается от производства при $x = 0$.

$I(x) = \{i \in I \mid x_i = 1\}$ — множество номеров выпускаемых видов изделий в варианте выбора x.

Потребители описываются следующими параметрами:

c_{ij} — закупочные и эксплуатационные затраты потребителя j при использовании изделий вида i. Предполагается, что каждый потребитель выбирает какой-либо один вид изделий из списка $I(x)$, выпускаемых производителем. Объем спроса учтен в величинах c_{ij} и g_{ij}.

d_j — ограничение на затраты потребителя j, т. е. он может выбрать изделия вида $i \in I(x)$, если только $c_{ij} \leqslant d_j$.

x_{ij} — переменные выбора потребителей: $x_{ij} = 1$, если потребитель j решает использовать изделия вида i, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

$J(x) = \left\{ j \in J \mid \min\limits_{i \in I(x)} c_{ij} \leqslant d_j \right\}$ — подмножество номеров потребителей, способных приобретать предлагаемую продукцию.

Задача первого уровня заключается в том, что потребители выбирают изделия из предлагаемого варианта x, минимизируя суммарные расходы на удовлетворение спроса:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \min_{(x_{ij})}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J(x), \tag{2}$$

$$x_{ij} = 0, \quad i \in I,\ j \notin J(x), \tag{3}$$

$$x_{ij} \leqslant x_i, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{4}$$

Обозначим через x^*_{ij} компоненты оптимального решения этой задачи, т. е. наилучший потребительский выбор. Чтобы обеспечить его единственность, будем предполагать, что $c_{ij} \neq c_{kj}$ при любых j и $i \neq k$. Тогда $x^*_{ij} = 1$, если $j \in J(x)$ и $c_{ij} = \min\{c_{kj} \mid k \in I(x)\}$, и $x^*_{ij} = 0$ в противном случае.

Задача второго уровня состоит в максимизации прибыли производителя с учетом реакции потребителей:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} x^*_{ij} - \sum_{i \in I} g^0_i x_i \to \max_x, \quad x \in \{0, 1\}^n. \tag{5}$$

2. Трехуровневая модель

В задаче (5) наилучшее решение может не обеспечивать весь потребительский спрос. Оно может быть нулевым, либо производителю оказывается выгоднее выпускать дорогие изделия в расчете на состоятельных потребителей. Предположим, что государственные структуры хотели бы с помощью дотаций производителю и потребителям согласовать их интересы. Вопрос о минимальной сумме дотаций и представляет задачу третьего уровня.

Будем рассматривать следующие дотации:

y_i — покрытие затрат производителя, связанных с выпуском изделий вида $i \in I$;

z_j — покрытие расходов потребителя $j \in J$.
Эти величины являются переменными в задаче третьего уровня.

Смысл потребительских дотаций z_j заключается в том, что ресурс d_j потребителя j увеличивается до $d_j + z_j$. Множество $J(x)$ номеров потребителей, обладающих покупательной способностью, определяется теперь равенством

$$J(x) = \Big\{ j \in J \mid \min_{i \in I(x)} c_{ij} \leqslant d_j + z_j \Big\}.$$

В остальном задача первого уровня сохраняет вид (1)–(4). По-прежнему предполагается, что $c_{ij} \neq c_{kj}$ при $i \neq k$. Поэтому оптимальное решение (x^*_{ij}) задачи (1)–(4) единственно.

Дотации y_i производителю уменьшают его затраты g^0_i до величины $g^0_i - y_i$. Кроме того, если выше производитель выбирал решение среди всех двоичных векторов, то в данной постановке его произвол ограничивается заданным списком альтернатив

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subseteq \{0, 1\}^n,$$

где $p \geqslant 2$. С учетом сделанных замечаний задача второго уровня принимает вид

$$G(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} x^*_{ij} - \sum_{i \in I} (g^0_i - y_i) x_i \to \max_x, \quad x \in A. \tag{6}$$

Оптимальное решение этой задачи обозначим через $x^* = (x^*_i)$ и назовем его *α-отделимым*, если $G(x^*) \geqslant G(x) + \alpha$ при любом $x \in A$, $x \neq x^*$, и некотором $\alpha > 0$. Если вектор x^* является α-отделимым, то он представляет собой единственное оптимальное решение задачи (6).

Перейдем к формулировке задачи третьего уровня. Положим $y = (y_i)$, $z = (z_j)$. Вектор $w = (y, z)$, все компоненты которого неотрицательны, назовем *допустимым решением* в задаче третьего уровня, если выполняются следующие условия:

— оптимальное решение x^* задачи второго уровня (6) является α-отделимым при заданном α;

— прибыль производителя не менее заданной величины β, т. е. $G(x^*) \geqslant \beta$;

— потребительский спрос удовлетворяется полностью, т. е. $J(x^*) = J$.

Таким образом, предполагается, что государство стремится выполнить перечисленные условия, выделяя минимум дотаций. Обозначая через W множество допустимых решений w, приходим к задаче третьего уровня:

$$H(w) = \sum_{i \in I} y_i + \sum_{j \in J} z_j \to \min_w, \quad w \in W. \tag{7}$$

Первые два уровня представляют задачи (1)–(4) и (6).

3. Декомпозиция трехуровневой задачи

Обозначим через $b_{kj} = \max\left\{0, \min\limits_{i\in I(a_k)} c_{ij} - d_j\right\}$ величину минимальной дотации, необходимой потребителю j для удовлетворения спроса, если производитель выбирает альтернативу $a_k \in A$, и через $b_k = (b_{kj})$ вектор минимальных дотаций. Будем писать $G(x,z)$ вместо $G(x)$, выделяя зависимость прибыли производителя от потребительских дотаций z.

Множество W разобьем на подмножества W_k, $k = 1,\dots,p$. Множество W_k состоит из тех точек $w \in W$, в которых оптимальным решением задачи (6) является альтернатива a_k. В силу определения допустимого решения $w = (y,z)$ множество W_k описывается неравенствами

$$G(a_k,z) \geqslant \beta, \tag{8}$$

$$G(a_k,z) \geqslant G(a_l,z) + \alpha, \quad l \neq k, \tag{9}$$

$$y_i \geqslant 0,\ i \in I, \quad z_j \geqslant b_{kj},\ j \in J. \tag{10}$$

Из условия α-отделимости (9) следует, что множества W_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, не пересекаются.

Если $(y,z) \in W_k$, то $G(a_k,z) = G(a_k,b_k)$, поскольку при дотациях z и b_k потребительский спрос удовлетворяется полностью и прибыль производителя одна и та же. При $l \neq k$ имеем $G(a_l,z) \geqslant G(a_l,b_k)$, так как уменьшение дотаций от z до b_k ведет только к сокращению покупательной способности потребителей и уменьшению дохода производителя. Следовательно, неравенства (8)–(10) выполняются при $z = b_k$. Поэтому $(y,b_k) \in W_k$ и в любой точке $w = (y,z) \in W_k$, доставляющей минимум функционалу $H(w)$ на множестве W_k, должно быть $z = b_k$. Далее можно ограничиться только точками $w \in W_k$ вида $w = (y,b_k)$.

Зафиксируем номер k и обозначим через x^*_{ijl} компоненты оптимального потребительского выбора при альтернативе производителя a_l и дотациях b_k. С учетом выражения (6) получаем

$$G(a_l,b_k) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} g_{ij}x^*_{ijl} - \sum_{i\in I}(g^0_i - y_i)a_{li}, \quad l = 1,\dots,p, \tag{11}$$

где a_{li} — координаты вектора $a_l = (a_{li}) \in A$. После подстановки (11) в (8), (9) и приведения подобных членов система неравенств (8)–(10) при $z = b_k$ принимает вид

$$\sum_{i\in S_k} y_i \geqslant \beta_0, \tag{12}$$

$$\sum_{i\in S_k\setminus S_l} y_i - \sum_{i\in S_l\setminus S_k} y_i \geqslant \beta_l, \quad l \neq k, \tag{13}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i \in I. \tag{14}$$

Для сокращения записи здесь введено обозначение $S_l = I(a_l), l = 1, \ldots, p$.

Неравенства (12)–(14) не совместны (и, следовательно, $W_k = \varnothing$), если только при некотором $l \neq k$ имеем $S_k \setminus S_l = \varnothing$ и $\beta_l > 0$. Если множество S_k не содержится ни в одном из множеств S_l при $l \neq k$ (а такое множество существует среди $S_1, \ldots, S_p$), то неравенства (12)–(14) совместны, т. е. $W_k \neq \varnothing$, и задача минимизации

$$H(w) = \sum_{i \in I} y_i + \sum_{j \in J} b_{kj} \to \min_{(y_i)} \tag{15}$$

при ограничениях (12)–(14) имеет оптимальное решение.

Обозначим через Y_k^* множество оптимальных решений в задаче (12)–(15) и через H_k^* значение минимума в этой задаче. Если $W_k = \varnothing$, то полагаем $H_k^* = \infty$. Таким образом, задача (7) сводится к решению p линейных задач (12)–(15). Ее оптимум равен

$$H^* = \min\{H_k^* \mid k = 1, \ldots, p\}$$

и достигается на множестве точек

$$W^* = \bigcup_{k \mid H_k^* = H^*} (Y_k^*, b_k).$$

В любом оптимальном решении $y^* = (y_i^*)$ задачи (12)–(15) имеем $y_i^* = 0$ при $i \notin I(a_k)$. Поэтому в оптимальном решении задачи третьего уровня (7) дотируются только те виды изделий, которые входят в наилучшее решение производителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. **Горбачевская Л. Е.** Алгоритмы и сложность решения двухуровневых задач стандартизации с коррекцией дохода // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, № 2. С. 20–33.
4. **Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В.** Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 3–11.
5. **Дементьев В. Т.** Производство экологического оборудования в условиях рыночной экономики и госдотаций // Математические проблемы экологии: Тр. III междунар. конф. МАПЭК-96. Новосибирск, 1996. С. 110–112.

6. **Шамардин Ю. В.** О двухуровневой задаче размещения при ограничениях на объем производства // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 114–118.
7. **Ben-Ayed O.** Bilevel linear programming // Comput. Oper. Res. 1993. V. 20, N 5. P. 485–501.
8. **Shimizu K., Ishizuka Y., Bard J. F.** Nondiffentiable and two-level mathematical programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
9. **Stackelberg H. V.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.
10. **Vicente L. N., Calamai P. H.** Bilevel and multilevel programming: a bibliography review // J. Global Optim. 1994. V. 5, N 3. P. 291–306.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
1 февраля 2001 г.